

Comparação dos índices de capacidade do processo para distribuições não-normais

Patricia Ueda Gonçalves

Liane Werner



Resumo

A análise de capacidade do processo para dados com distribuição não-normal tem sido explorada nos últimos anos, porém ainda são poucas as referências que abordam este assunto. Por isto, este trabalho apresenta os principais métodos de análise de capacidade do processo para dados com distribuição não-normal, sendo o primeiro deles o método proposto por Clements em 1989, o segundo, proposto por Pearn e Chen (1997) e o terceiro método apresentado foi proposto por Chen e Ding (2001). Os métodos de Clements (1989) e Pearn e Chen (1997) são parecidos em muitos aspectos, mas cada um deles apresenta uma novidade em relação ao cálculo dos índices de capacidade. Em comum, ambos os métodos apresentam índices semelhantes aos índices tradicionais, que supõem normalidade dos dados. O método de Chen e Ding (2001) é em si uma forma de estimar o número de não-conformes observado no processo em estudo. Além de abordar os métodos, são apresentados dois casos. No primeiro deles, comparando-se os métodos de Clements (1989) e de Pearn e Chen (1997), procura-se concluir qual dos métodos é o melhor para o cálculo da capacidade do processo não-normal. No segundo, os três métodos apresentados são aplicados em um conjunto de dados, obtidos de uma indústria metalúrgica. Para a execução das análises nos casos, foi aplicado o software livre R versão 2.2.

Palavras-chave: Índices de capacidade. Dados não-normais. Capabilidade.

1 Introdução

Atualmente as empresas buscam produzir com a menor perda possível, de tempo, recursos e custos, sem deixar de atender aos desejos e necessidades dos clientes. Para atingir esse objetivo, muitas empresas fazem uso do controle estatístico do processo, um dos ramos do controle de qualidade, que trata da coleta, análise e interpretação de dados para a proposta de melhorias e controle da qualidade de produtos e serviços.

Analisando-se a variabilidade do processo, têm-se duas classificações possíveis para ele. O processo é dito estatisticamente sob controle quando somente causas comuns de variabilidade estiverem presentes. Ao contrário, se um processo apresentar, além das causas comuns de variabilidade, causas especiais, ele será dito fora de controle estatístico.

Quando se verifica que o processo encontra-se sob controle estatístico, pode-se medir quanto esse processo consegue gerar produtos que atendam às especificações de projeto que refletem os desejos e exigências de seus clientes. Para isso, faz-se uso dos índices de capacidade do processo. Os índices estabelecidos nos estudos tradi-

cionais de capacidade do processo, ou de capacidade do processo, do inglês *process capability*, procuram detectar dois tipos de problemas. O primeiro é de localização do processo, se o processo atende em média ao valor nominal de especificação, e o segundo, de variabilidade, quando o processo apresenta muita dispersão e não atende às especificações (bilaterais) que são estabelecidas no projeto.

A teoria de capacidade do processo foi primeiramente desenvolvida supondo-se que o processo em análise apresenta distribuição normal e quando a característica de qualidade é do tipo nominal com especificações bilaterais, porém, em algumas situações, é desejável atender a uma especificação unilateral, na qual, certamente, um processo não-normal seria desejado. Por exemplo, produtos alimentares, que são obrigados por lei a ter certo peso, por causa do custo, terão uma quantidade mais próxima desse peso, o que certamente irá gerar um processo com assimetria (não-normal). Sendo assim, é importante que se busquem alternativas para atender a este tipo de situação, visando minimizar conclusões errôneas na análise da capacidade.

2 Capacidade do processo

Quando as causas especiais de variação são eliminadas de um processo com distribuição normal relativo à característica de qualidade em estudo, diz-se que o processo está sob controle estatístico ou que se trata de um processo estável. Porém, mesmo um processo sob controle estatístico produz itens defeituosos. Logo, não é suficiente colocar e manter um processo sob controle; é fundamental avaliar se o processo é capaz de atender às especificações estabelecidas a partir das necessidades dos clientes. É esta avaliação que constitui a análise da capacidade do processo, que é medida através da relação entre a variabilidade natural do processo em relação à variabilidade que é permitida a esse processo, dada pelos limites de especificação.

Conforme Montgomery (1997) e Deleryd (1999), quatro são os índices de capacidade para dados normalmente distribuídos. Estes índices são números adimensionais que permitem uma quantificação do desempenho de processos, sendo eles: C_p , C_{pk} , C_{pm} e C_{pmk} .

2.1 Índice C_p

O índice C_p , chamado de índice de capacidade potencial do processo, considera que o processo está centrado no valor nominal da especificação. Caso a característica de qualidade em estudo tenha distribuição bilateral, o índice C_p é definido pela Equação (1).

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} \quad (1)$$

em que: LSE é o limite superior de especificação; LIE é o limite inferior de especificação e σ é o desvio-padrão do processo.

Este índice relaciona a variabilidade permitida ao processo (especificada no projeto) com a variabilidade natural do processo, e com isso tem-se que quanto maior for o valor de C_p , maior será a capacidade do processo em satisfazer às especificações, desde que a média esteja centrada no valor nominal. Uma regra prática, conforme Montgomery (1997), para analisar este índice é definir três intervalos de referência, mostrados na Tabela 1.

Porém, o índice C_p , não considera a localização do processo, estando embasado apenas na relação entre a

amplitude do intervalo de especificação e da variabilidade natural do processo para o seu cálculo. Como consequência disto, para um determinado valor de C_p , pode-se ter qualquer percentual de itens fora das especificações, este percentual vai depender apenas de onde está localizada a média do processo. Por isso, o índice C_p dá apenas uma idéia de quanto o processo é potencialmente capaz de produzir dentro do intervalo especificado no projeto.

2.2 Índice C_{pk}

Como na prática nem sempre o processo está centrado no valor nominal da especificação então, o uso do índice C_p pode levar a conclusões erradas, Kane (1986) propôs o índice de desempenho C_{pk} , que leva em consideração a distância da média do processo em relação aos limites de especificação. Este índice é dado pela Equação (2).

$$C_{pk} = \min\left(\frac{LSE - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LIE}{3\sigma}\right) \quad (2)$$

em que: LSE é o limite superior de especificação; LIE é o limite inferior de especificação; μ é a média do processo e σ é o desvio-padrão do processo.

Se o processo estiver centrado no valor nominal de especificação, $C_p = C_{pk}$. Então, caso C_p seja diferente de C_{pk} , sabe-se que o processo está descentrado, isto é, que a média não coincide com o valor nominal das especificações. As interpretações do índice C_{pk} podem ser feitas pela regra mostrada para o índice C_p , já que a análise da capacidade do processo é feita usando-se estes dois índices em conjunto.

2.3 Índice C_{pm} e C_{pmk}

São alternativos aos índices anteriores e consideram, além da variação do processo, a distância de sua média em relação ao valor nominal da especificação.

O índice C_{pm} é dado pela expressão da Equação (3).

$$C_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (3)$$

em que: LSE é o limite superior de especificação; LIE é o limite inferior de especificação; μ é a média do processo; σ é o desvio-padrão do processo; e T é o valor nominal da especificação.

Pela definição do índice C_{pm} , um aumento na variabilidade do processo faz com que o denominador do índice aumente e consequentemente o valor do índice diminuirá. Além disso, um distanciamento maior do processo em relação ao valor nominal também poderá provocar um aumento no denominador do índice, tornando-o menor.

Uma vantagem do índice C_{pm} em relação ao índice C_p é que ele fornece uma boa idéia da capacidade do processo, tanto para os processos que se apresentam próximos ao valor nominal quanto para os que se apresentam mais

Tabela 1. Intervalos de referência para análise do índice C_p .

C_p	Itens não-conformes (PPM)	Interpretação
$C_p < 1$	Acima de 2700	Processo incapaz
$1 \leq C_p \leq 1,33$	64 a 2700	Processo aceitável ou relativamente capaz
$C_p \geq 1,33$	Abaixo de 64	Processo potencialmente capaz

afastados dele. Além disso, segundo Chan et al. (1988), se o processo segue uma distribuição normal e a média do processo está centrada no valor nominal de especificação, o índice C_{pm} apresenta distribuição semelhante à do índice C_p , mas seu estimador \hat{C}_{pm} é mais eficiente e apresenta viés menor que \hat{C}_p , estimador de C_p .

Como o índice C_{pm} considera em seu numerador apenas a variabilidade permitida ao processo, a literatura sugere ainda outro índice, o C_{pmk} , que refina mais a análise, já que considera a menor distância entre a média do processo em relação aos limites de especificação em seu numerador. Seu cálculo é dado pela Equação (4).

$$C_{pmk} = \min \left(\frac{LSE - \mu}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}, \frac{\mu - LIE}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \right) \quad (4)$$

em que: LSE é o limite superior de especificação; LIE é o limite inferior de especificação; μ é a média do processo; σ é o desvio-padrão do processo e T é o valor nominal da especificação.

2.4 Formulação única dos índices

Vännman (1995) construiu uma fórmula única da qual podem ser derivados os índices de capacidade. Os quatro índices apresentados (C_p , C_{pk} , C_{pm} , C_{pmk}) poderiam ser vistos como seus casos especiais. A fórmula de Vännman é definida conforme a Equação (5).

$$C_p(u, v) = \frac{d - u|\mu - m|}{3\sqrt{\sigma^2 + v(u - T)^2}} \quad (5)$$

em que: μ é a média do processo; σ é o desvio-padrão do processo; $d = \frac{(LSE - LIE)}{2}$ é a metade do comprimento

do intervalo de especificação; $m = \frac{(LSE + LIE)}{2}$ é o

ponto médio entre os limites de especificação; T é o valor nominal e $u, v \geq 0$.

Substituindo-se u e v por combinações de 0 e 1 na Equação (5), chega-se aos índices de capacidade já apresentados: $C_p(0,0) = C_p$; $C_p(1,0) = C_{pk}$; $C_p(0,1) = C_{pm}$; $C_p(1,1) = C_{pmk}$. Além de poderem ser derivados de uma fórmula única, estes índices se relacionam conforme as Equações (6) e (7).

$$C_{pm} = C_p \left[1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (6)$$

$$C_{pmk} = C_{pk} \left[1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Além disto, para processos com limites de especificação simétricos em relação ao valor nominal e com média do processo sobre esse valor nominal, os índices C_{pk} , C_{pm} e C_{pmk} tornam-se iguais ao índice C_p .

Em um estudo realizado por Pearn e Chen (1997), foi estabelecido um ranking entre os quatro índices. O ranqueamento considera a sensibilidade de captar a distância entre a média do processo e o valor nominal de especificação. Os autores concluíram que o índice mais sensível é o C_{pmk} , sendo seguido pelo C_{pm} , C_{pk} e C_p , respectivamente.

3 Capacidade do processo não-normal

Muitas indústrias, pelo desconhecimento dos métodos de análise da capacidade de processos não-normais, assumem que seu processo fornece dados que são normalmente distribuídos e fazem uso de um ou mais índices citados anteriormente para analisar a capacidade de produção de itens conformes. Porém essa prática pode gerar interpretações errôneas sobre a capacidade do processo, já que os índices C_p , C_{pk} , C_{pm} e C_{pmk} supõem normalidade da característica de qualidade em estudo.

Para exemplificar que tipo de interpretação errônea pode ser provocada pelo uso desses índices básicos em distribuições não-normais, Pearn e Chen (1997) consideram três processos A, B e C, todos com distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade. Na figura 1, são mostradas as distribuições dos três processos e suas relações com os limites de especificação, sendo que o processo A apresenta média igual a 30, o processo B, média igual a 37, e o processo C apresenta média igual a 44. Todos os processos apresentam desvio-padrão igual a 2.

Observando-se a Figura 1, nota-se que o processo A apresenta média igual ao LIE, a média do processo B é igual ao valor nominal de especificação e que o processo C tem média igual ao LSE. A partir destas informações,

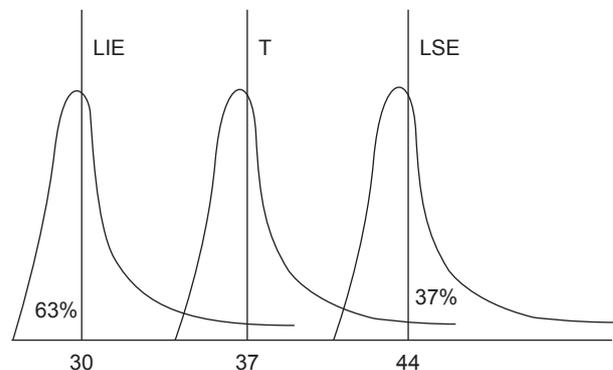


Figura 1. Distribuições dos processos A, B e C, Pearn e Chen, 1997.

tem-se que o processo B está centrado no valor nominal e que os processos A e C apresentam-se igualmente, porém opostamente, distantes do valor nominal. Calculando-se os quatro índices de capacidade, supondo-se normalidade destes processos, verifica-se, conforme a Tabela 2, que eles não permitem estimar um percentual correto de itens não-conformes, já que esse percentual para o processo A é de 63% e para C é de 37%, mas os índices dos processos A e C não apresentaram diferenças entre si, conforme os índices citados.

Interessante também comparar o comportamento do processo B, supondo-se diferentes distribuições com o $C_p = 1,17$. Se este processo apresenta distribuição normal com média 37 e desvio-padrão condizente com o referido C_p , não se encontrariam produtos fora das especificações, o que não ocorre com a distribuição χ^2 com 2 graus de liberdade, em que o percentual de itens fora da especificação no limite superior é estimado em 3,18%.

Somerville e Montgomery (1996-1997) fizeram um estudo para verificar os efeitos da falta de normalidade dos dados no cálculo do número de itens não-conformes produzidos por um processo em quatro famílias de distri-

buições não-normais: t-Student, gamma, lognormal e Weibull. Neste estudo, diversos valores de C_{pk} foram usados para estimar o número de itens não-conformes, em partes por milhão (PPM), considerando-se que o processo seguia uma distribuição normal. Com isso, verificaram que pequenos afastamentos de uma curva em relação à normal produziam sérios erros de estimação do número de não-conformes. As tabelas 3 e 4 resumem alguns resultados obtidos pelo estudo.

De uma forma geral, observa-se na tabela 3 que, para os parâmetros estudados, quanto maior a capacidade do processo, menor é o erro absoluto cometido na estimação do número de não-conformes. Em relação à variação dos parâmetros, tem-se que: a) no caso da distribuição t-Student, este erro se tornava menor quanto maior o número de graus de liberdade, pois a distribuição se aproximava da distribuição normal; b) para a distribuição gamma, fixado o parâmetro β , quanto maior o valor de α , mais simétrica a distribuição se torna, o que diminui o erro na estimação do número de não-conformes, supondo normalidade; c) a distribuição lognormal, diferentemente das demais, tem a assimetria aumentada quanto maior o valor do parâmetro β , com isso, maior se torna o erro na estimação do número de não-conformes; d) na distribuição Weibull, para $\beta = 1$, quanto maior o valor de α , mais próxima ela se torna da distribuição normal, porém quando $\alpha > 3$, a área sob a cauda na distribuição Weibull é menor que a cauda da distribuição normal.

Para se ter o mesmo número de não-conformes obtido na estimação de cada uma das quatro distribuições apresentadas, Somerville e Montgomery (1996-1997)

Tabela 2. Índices de capacidade, sob suposição normalidade, para os processos A, B e C.

Processo	C_p	C_{pk}	C_{pm}	C_{pmk}
A	1,17	0,00	0,32	0,00
B	1,17	1,17	1,17	1,17
C	1,17	0,00	0,32	0,00

Adaptado de Somerville e Montgomery (1996-1997).

Tabela 3. Erros absolutos em PPM obtidos nas 4 distribuições estudadas no caso unilateral.

Valor C_{pk}	t-Student		Gamma ($\beta = 1$)		Lognormal ($\alpha = 1$)		Weibull ($\beta = 1$)	
	5 gl	20 gl	$\alpha = 1,5$	$\alpha = 3$	$\beta = 0,25$	$\beta = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3$
0,67	1906	1164	25396	21440	15788	14224	27037	2801
1,00	4512	1100	14475	10446	7063	16698	16966	148
1,33	1755	180	5063	2905	1668	9831	6706	-5
1,67	664	18	1617	696	332	5833	2478	-0,17
2,00	287	2	508	159	65	3658	912	-0,0009

Nas distribuições Gamma e Weibull, α é parâmetro de forma e β é de escala, e na distribuição Lognormal é o contrário. Adaptado de Somerville e Montgomery (1996-1997).

Tabela 4. C_{pk} da distribuição normal equivalente ao número de não-conformes estimados nas 4 distribuições.

Valor C_{pk}	t-Student		Gamma ($\beta = 1$)		Lognormal		Weibull ($\beta = 1$)	
	5 gl	20 gl	$\alpha = 1,5$	$\alpha = 3$	$\beta = 0,25$	$\beta = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3$
0,67	-	-	0,55	0,57	0,59	0,60	0,55	0,65
1,00	-	-	0,72	0,75	0,80	0,70	0,70	0,99
1,33	-	-	0,86	0,92	0,98	0,78	0,82	1,35
1,67	0,97	1,17	0,98	1,07	1,13	0,84	0,94	1,72
2,00	-	-	1,10	1,20	1,28	0,89	1,04	2,12

Adaptado de Somerville e Montgomery (1996-1997).

calcularam o valor equivalente de C_{pk} da distribuição normal para estes números de não-conformes. Os valores obtidos, que são apresentados na tabela 4, mostram que sob suposição de normalidade, a capacidade do processo é superestimada para estas quatro distribuições, com exceção da distribuição Weibull, que apresenta área sob a cauda menor que a da distribuição normal quando o parâmetro $\alpha = 3$, para processos capazes.

Com essas distribuições não-normais, Somerville e Montgomery (1996-1997) exemplificaram como a suposição de normalidade, quando não atendida, pode produzir estimativas erradas do número de itens não-conformes. Como o não atendimento da suposição de normalidade dos dados pode levar a conclusões errôneas sobre o processo, é necessário buscar por alternativas que utilizem as distribuições adequadas. As já divulgadas transformações de Box-Cox ou de Johnson, em que dados que não são normalmente distribuídos são convertidos em dados que apresentam distribuição normal, têm sido utilizadas, pois são práticas e fáceis de aplicar. Porém este trabalho aborda métodos alternativos para a análise da capacidade do processo. São três os métodos: Clements (1989), Pearn e Chen (1997) e Chen e Ding (2001).

O primeiro deles, proposto por Clements (1989), se baseia em medidas de percentil para obter os índices de capacidade C'_p e C'_{pk} . A partir desse método de Clements, Pearn e Kotz, Pearn e Chen *apud* Pearn e Chen (1997) propuseram uma generalização da formulação única apresentada na Equação (5) para que se pudessem obter quatro índices com interpretações semelhantes aos dos índices para dados normais.

O segundo método, proposto por Pearn e Chen (1997), também faz uso dos percentis para o cálculo dos índices, diferindo apenas quanto aos índices C'_{pk} e C'_{pmk} , pois no cálculo do denominador destes índices, é considerada a metade da distância entre os percentis da distribuição, enquanto no primeiro método se tem a distância entre a mediana e o percentil, superior ou inferior.

O terceiro método foi proposto por Chen e Ding (2001) e considera em seu cálculo a variabilidade do processo, a distância entre a média do processo e o valor nominal e a proporção de itens não-conformes, obtendo o índice S_{pmk} . Este índice proposto por este terceiro método consegue refletir exatamente o número de não-conformes do processo, sendo superior aos outros dois métodos anteriores (CHEN; DING, 2001).

3.1 Método 1- Índices propostos por Clements

Em 1989, Clements propôs um método simples de cálculo dos índices C_p e C_{pk} para qualquer tipo de distribuição dos dados de interesse, usando a família de curvas de Pearson. Essa família de curvas foi publicada em 1893,

pelo matemático Karl Pearson, e inclui diversas distribuições, sendo elas a normal, a lognormal, a t-student, a F, a beta e a gamma.

Segundo o autor, seu método de cálculo dos índices apresenta algumas vantagens, como por exemplo, a redução de seus índices aos índices C_p e C_{pk} quando a distribuição dos dados é normal, a possibilidade de estimar o percentual de itens não-conformes para uma grande variedade de distribuições e, ainda, poder ser aplicado em qualquer família de curvas de probabilidade.

O índice C'_p de Clements é definido pela Equação (8):

$$C'_p = \frac{LSE - LIE}{F_{99,865} - F_{0,135}} \quad (8)$$

em que: LSE é o limite superior de especificação, LIE é o limite inferior de especificação e F_α é o percentil na posição α -ésima do processo.

Mas como o índice C'_p considera apenas a dispersão do processo e não leva em conta a sua posição em relação aos limites de especificação, ele pode levar a uma interpretação errada da capacidade do processo. Considerando-se também a posição do processo, tem-se o índice C'_{pk} de Clements, que é definido como o mínimo de dois índices, C'_{pl} e C'_{ps} , definidos pelas Equações (9) e (10):

$$C'_{pl} = \frac{M - LIE}{M - F_{0,135}} \quad (9)$$

$$C'_{ps} = \frac{LSE - M}{F_{99,865} - M} \quad (10)$$

em que: M é a mediana do processo, LSE é o limite superior de especificação, LIE é o limite inferior de especificação e F_α é o percentil α -ésimo do processo.

Para garantir que C'_{pl} e C'_{ps} venham a medir a relação de cada metade da distribuição, tanto inferior como superior, com as respectivas especificações, utiliza-se a mediana como medida de tendência central.

Quando a distribuição dos dados é normal, a distância entre a mediana e cada um dos limites de especificação é igual a 3σ . Com isso, o índice C'_p de Clements se reduz ao índice C_p tradicional, mostrado na Equação (1). Nesta situação, o índice C'_{pk} de Clements também se reduz ao índice C_{pk} tradicional da Equação (2).

Posteriormente Pearn e Kotz (1992) e Pearn e Chen (1995) *apud* Pearn e Chen (1997), baseados neste método de Clements, propuseram uma generalização da formulação única mostrada na Equação (5), da qual se obteriam quatro índices para dados com distribuição não-normal. Essa generalização é dada pela Equação (11):

$$C'_p(u, v) = (1-u) \times \frac{LSE - LIE}{6 \sqrt{\left[\frac{F_{99,865} - F_{0,135}}{6} \right]^2 + v(M-T)^2}} + u \times \min \left\{ \frac{LSE - M}{3 \sqrt{\left[\frac{F_{99,865} - M}{3} \right]^2 + v(M-T)^2}}, \frac{M - LIE}{3 \sqrt{\left[\frac{M - F_{0,135}}{3} \right]^2 + v(M-T)^2}} \right\} \quad (11)$$

em que: LSE e LIE são os limites superior e inferior de especificação, respectivamente; F_α é o α -ésimo percentil do processo, M é a mediana, T é o valor nominal do processo e $u, v \geq 0$.

Substituindo-se (u, v) pelas diversas combinações de 0 e 1, obtêm-se os quatro índices equivalentes aos índices para distribuições normais, que podem ser interpretados da mesma forma, porém atendendo a qualquer distribuição, não se restringindo apenas à normal. Esses índices são mostrados na Tabela 5 (Equações 8, 12, 13, 14).

3.2 Método 2- Índices propostos por Pearn e Chen

Fazendo uso da formulação única apresentada na Equação (5), Pearn e Chen (1997) propuseram uma gene-

ralização, chamada de $C_{Np}(u, v)$, que atende a casos em que a suposição de normalidade não seja verificada. Essa generalização é dada pela Equação (12):

$$C_{Np}(u, v) = \frac{d - u|M - m|}{3 \sqrt{\left[\frac{F_{99,865} - F_{0,135}}{6} \right]^2 + v(M-T)^2}} \quad (12)$$

em que: F_α é o α -ésimo percentil, M é a mediana da distribuição, $d = \frac{(LSE - LIE)}{2}$ é a metade do compri-

mento do intervalo de especificação, $m = \frac{(LSE + LIE)}{2}$

é o ponto médio entre os limites de especificação, T é o valor nominal e $u, v \geq 0$.

Para desenvolver essa generalização, Pearn e Chen substituíram o desvio-padrão σ de $C_p(u, v)$ por $\frac{F_{99,865} - F_{0,135}}{6}$ em $C_{Np}(u, v)$, pois assim é mantida a idéia

de medir a variabilidade inerente ao processo, mas não se restringindo à distribuição normal. Outra substituição feita foi da média μ em $C_p(u, v)$ pela mediana M em $C_{Np}(u, v)$, já que a mediana é uma medida mais robusta para tendência central que a média quando existe uma distribuição assimétrica, especialmente se essa distribuição tiver caudas longas.

Da mesma forma que no primeiro método, substituindo (u, v) pelas diversas combinações de 0 e 1, obtêm-se os quatro índices equivalentes aos índices para distribuição

Tabela 5. Índices de capacidade do processo obtidos pelo método de Clements.

(u, v)	$C'_p(u, v)$
(0,0)	$C'_p = \frac{LSE - LIE}{F_{99,865} - F_{0,135}} \quad (8)$
(0,1)	$C'_{pk} = \min \left(\frac{LSE - M}{F_{99,865} - M}, \frac{M - LIE}{M - F_{0,135}} \right) \quad (12)$
(1,0)	$C'_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6 \sqrt{\left[\frac{F_{99,865} - F_{0,135}}{6} \right]^2 + (M - T)^2}} \quad (13)$
(1,1)	$C'_{pmk} = \min \left(\frac{LSE - M}{3 \sqrt{\left[\frac{F_{99,865} - M}{3} \right]^2 + (M - T)^2}}, \frac{M - LIE}{3 \sqrt{\left[\frac{M - F_{0,135}}{3} \right]^2 + (M - T)^2}} \right) \quad (14)$

normal, que também podem ser interpretados da mesma forma, porém atendendo a qualquer distribuição, não se restringindo apenas à normal. Note-se que $C_{Np} = C_p^*$ e que $C_{Npk} = C_{pk}^*$. Os índices $C_{Np}(u,v)$ são apresentados na Tabela 6 (Equações 8, 13, 16, 17).

Assim como nos índices para distribuição normal, pode ser estabelecida uma relação entre os índices: $C_{Npm} = C_{Np} \{1 + [(\mu-T)/\sigma'']^2\}^{-1/2}$ e $C_{Npmk} = C_{Npk} \{1 + [(\mu-T)/\sigma'']^2\}^{-1/2}$, em que $\sigma'' = (F_{99,865} - F_{0,135})/6$. Também existe um *ranking* (PEARN; CHEN, 1997), para os quatro índices propostos, segundo sua sensibilidade em captar a distância entre a mediana do processo e o valor nominal, do mais sensível ao menos, tem-se: C_{Npmk} , C_{Npm} , C_{Npk} e C_{Np} .

Quando as especificações são simétricas em relação ao valor nominal, $C_{Npk} = (1-k)C_{Np}$ e $C_{Npmk} = (1-k)C_{Npm}$, em que $k = |M - T|/d$ e $d = \frac{(LSE - LIE)}{2}$. Se o processo com distribuição não-normal está centrado no valor nominal, isto é, $M = T$, $C_{Np} = C_{Npk} = C_{Npm} = C_{Npmk} = d/3\sigma''$. Mais ainda, se a distribuição dos dados for normal, têm-se $M = m$ e $s'' = s$, e, então, vale ressaltar que as generalizações $C_{Np}(u,v)$ reduzir-se-ão aos quatro índices básicos $C_p(u,v)$, obtendo-se $C_{Np} = C_p$, $C_{Npk} = C_{pk}$, $C_{Npm} = C_{pm}$ e $C_{Npmk} = C_{pmk}$.

3.3 Método 3 - índice proposto por Chen e Ding

O terceiro método se refere à proposta de Chen e Ding (2001). Os autores propuseram um índice denominado S_{pmk} , que atende a qualquer distribuição de dados, e considera em seu cálculo a variabilidade do processo, a distância da média do processo em relação ao valor nominal e a proporção de não-conformes. Esse índice é dado pela Equação (13):

$$S_{pmk} = \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1 + F(LSE) - F(LIE)}{2}\right)}{3\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}} \quad (13)$$

em que: $F(x)$ é a função de distribuição acumulada do processo, μ é a média do processo, σ é o desvio padrão do processo, T é o valor nominal de especificação, LIE é o limite inferior de especificação e LSE é o limite superior de especificação.

Segundo Chen e Ding (2001), a construção deste índice vem da seguinte propriedade dos índices apresentada pela Equação (19):

Tabela 6. Índices de capacidade do processo propostos por Pearn e Chen.

(u,v)	$C_{Np}(u,v)$
(0,0)	$C_{Np} = \frac{LSE - LIE}{F_{99,865} - F_{0,135}} \quad (8)$
(0,1)	$C_{Npk} = \min \left(\left[\frac{LSE - M}{\frac{F_{99,865} - F_{0,135}}{2}} \right], \left[\frac{M - LIE}{\frac{F_{99,865} - F_{0,135}}{2}} \right] \right) \quad (16)$
(1,0)	$C_{Npm} = \frac{LSE - LIE}{6\sqrt{\left[\frac{F_{99,865} - F_{0,135}}{6}\right]^2 + (M - T)^2}} \quad (13)$
(1,1)	$C_{Npmk} = \min \left(\frac{LSE - M}{3\sqrt{\left[\frac{F_{99,865} - F_{0,135}}{6}\right]^2 + (M - T)^2}}, \frac{M - LIE}{3\sqrt{\left[\frac{F_{99,865} - F_{0,135}}{6}\right]^2 + (M - T)^2}} \right) \quad (17)$

$$C_{pmk} = C_{pm}(1-K) = \frac{C_p}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu-T}{\sigma}\right)^2}}(1-K) = \frac{C_{pk}}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu-T}{\sigma}\right)^2}} \quad (19)$$

em que: K é o índice de capacidade obtido pela expressão $\frac{2|(\mu-T)|}{(LSE-LIE)}$, μ , σ e T são, respectivamente, a média, o desvio-padrão e o valor alvo do processo.

Segundo Chen (2000), em qualquer distribuição de probabilidade, a expressão $\frac{1}{3}\Phi^{-1}\left(\frac{1+F(LSE)-F(LIE)}{2}\right)$ é uma boa aproximação para o valor de C_{pk} na Equação (19), sendo que Φ denota a função acumulada da distribuição normal padrão.

A proporção de não-conformes P pode ser estimada a partir de S_{pmk} é dada pela Equação (20):

$$P = 2 \times \left[1 - \Phi \left(3S_{pmk} \sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma} \right)^2} \right) \right] \quad (20)$$

e não difere da proporção real de não-conformes (CHEN; DING, 2001).

Para mostrar a superioridade de seu índice em relação ao índice C_{Npmk} , descrito na Equação (19), Chen e Ding (2001) aplicaram o índice S_{pmk} em seis processos não-normais: (i) $\chi^2_3 + 7$; (ii) $\chi^2_3 + 14,8$; (iii) $\chi^2_3 + 22,6$; (iv) Gamma (6,3); (v) Gamma (1,12); e (vi) uniforme (17; 25,8). Para cada um destes processos, foi obtido a $P(X < 10,0) + P(X > 25,6)$, sendo o limite inferior de especificação igual a 10 e o superior igual a 25,6, para este exemplo. Em seguida, os autores calcularam o percentual de erro na estimação da proporção de itens não-conformes gerados pelo uso do índice C_{Npmk} , de Pearn e Chen (1997) e como resultado obtiveram percentuais de erro razoáveis, sendo o menor deles 28,7 e o maior, 106,2. Com isso, evidenciaram que o índice C_{Npmk} não fornecia estimativas corretas da proporção de não-conformes, enquanto o índice S_{pmk} o fornecia. Quanto à interpretação do índice S_{pmk} , é a mesma dos demais índices; por exemplo, se o valor do índice obtido foi $S_{pmk} = 0,4092$, interpreta-se que o processo não é capaz.

4 Estudos comparativos dos métodos de capacidade não-normal apresentados

Primeiramente será apresentado um caso prático para a comparação entre os índices de capacidade para processos não-normais, que inclui um estudo que foi realizado por Pearn e Chen (1997). A seguir será apresentado um estudo que consiste na aplicação dos três métodos de análise de capacidade do processo não-normal apresentados ante-

riormente, em um banco de dados real, obtido de uma metalúrgica da Grande Porto Alegre. Todos os resultados são obtidos a partir do software livre R versão 2.2.

4.1 Estudo comparativo entre os métodos de análise de capacidade do processo não-normal

Neste estudo, é mostrado um estudo comparativo entre os métodos 1 e 2 de capacidade do processo não-normal. Os dois métodos que serão comparados fazem uso dos percentis para o cálculo dos índices, porém enquanto os índices de Clements (1989) consideram em seu denominador a distância entre a mediana e o percentil, superior ou inferior, para o cálculo dos índices C'_{pk} e C'_{Npmk} , os índices de Pearn e Chen (1997) fazem uso da metade da distância entre os percentis da distribuição no cálculo do denominador dos índices C_{Npk} e C_{Npmk} .

Devido a essa diferença entre os métodos, quanto mais assimétrica for a distribuição dos dados, mais diferentes serão os denominadores desses índices e, por consequência, mais diferentes serão os resultados obtidos da análise de capacidade do processo desses dois métodos. Para exemplificar essa diferença entre os dois métodos, são geradas três distribuições assimétricas: Gamma (2,100), Gamma (5,100) e Gamma (15,100), cada uma com 1000 repetições, cujos histogramas são mostrados na Figura 2, e algumas estatísticas descritivas necessárias para o estudo estão na Tabela 7.

Calculando a “distância relativa” da mediana em relação ao valor nominal para as distribuições simuladas, tem-se a Equação (21):

$$dr = \frac{M - T}{\text{Max}(X) - \text{Min}(X)} \quad (21)$$

em que: X é a variável de interesse que foi medida, T é o valor nominal de especificação e M é a mediana do processo.

As medidas mostradas na Tabela 8 foram obtidas da Equação (21), com esses resultados e observando os

Tabela 7. Estatísticas descritivas das distribuições assimétricas.

Distribuição	Mínimo	Máximo	Mediana	d = (max-min)/2
Gamma(2,100)	0,0002	0,0881	0,0170	0,0440
Gamma(5,100)	0,0087	0,1453	0,0470	0,0683
Gamma(15,100)	0,0543	0,2895	0,1466	0,1176

Tabela 8. “Distâncias relativas” da mediana em relação ao valor nominal.

Distribuições	Gamma (2,100)	Gamma (5,100)	Gamma (15,100)
“Distância relativa” (dr)	-0,3068	-0,1560	0,1233

histogramas da Figura 2, tem-se que o processo representado pela distribuição Gamma (2,100) é o pior deles, pois este processo é o que está centrado em um valor mais distante do seu valor nominal, e que o representado pela distribuição Gamma (15,100) é o melhor deles, já que a mediana e o valor nominal encontram-se mais próximos que nos outros dois processos simulados.

Para comparar os índices propostos por Clements (1989) e os índices propostos por Pearn e Chen (1997), foi admitido que cada um dos três processos possui limites de especificação superior e inferior coincidentes com os valores de máximos e de mínimos do processo, respectivamente, e valor nominal igual a $d = \frac{\max - \min}{2}$.

Os índices obtidos para cada uma das três distribuições são mostrados na Tabela 9.

De um modo geral, observa-se que todos os índices da Tabela 9, com exceção do índice C'_p e seu equivalente C_{Np} , calculados para distribuições não-normais, conseguem quantificar bem a relação de capacidade dos processos. O processo representado pela distribuição Gama (15,100), que é o melhor dentre os três, possui capacidade maior em todos os índices, enquanto o processo representado pela distribuição Gamma (2,100) possui menor capacidade dentre os processos quanto aos índices calculados.

Comparando-se os índices C'_{pk} e seu equivalente C_{Npk} , e os índices C'_{pmk} e seu equivalente C_{Npmk} , que são os que diferem de um método para o outro, tem-se que, para todas as três distribuições, os valores dos índices C'_{pk} e de seu equivalente C_{Npk} apresentam, além das diferenças numéricas, diferenças de interpretações quanto à capacidade do processo. Enquanto C'_{pk} avalia todos os três processos

como potencialmente capazes, o índice C_{Npk} informa que os processos não são potencialmente capazes com valores de índices abaixo de 1. Quanto aos índices C'_{pmk} e C_{Npmk} , também se notam valores mais altos para o primeiro índice que para o segundo nos três processos simulados.

Como os processos são assimétricos e não estão centrados (segundo a mediana) no valor nominal, tem-se que os índices propostos por Pearn e Chen (1997) conseguem quantificar melhor a capacidade do processo em relação aos índices propostos por Clements (1989), que considerou, por exemplo, o processo representado pela distribuição Gama (2,100) como potencialmente capaz segundo o índice C'_{pk} quando se nota, apenas olhando para o histograma do processo, que grande parte dos itens produzidos encontra-se abaixo do valor nominal.

Para reforçar ainda mais que os índices propostos por Pearn e Chen (1997) são melhores que os índices propostos por Clements (1989), os próprios Pearn e Chen (1997) fizeram um estudo comparativo entre seus índices e os propostos por Clements (1989), calculando-os para diversos valores de mediana, com $F_{99,865}$ e $F_{0,135}$ fixos e com

$$LIE = T - d, \text{ em que: } d = \frac{F_{99,865} - F_{0,135}}{2}$$

valores foram reproduzidos na Tabela 10, e se nota que os índices de Pearn e Chen (1997) alcançam valor máximo quando a mediana é igual ao valor nominal e que os índices de Clements (1989) alcançam valor máximo quando o processo é assimétrico, com a mediana assumindo valor inferior ao valor nominal. Como a maioria dos processos produtivos tem por objetivo produzir itens em torno do valor nominal, os índices de Pearn e Chen (1997) conseguem quantificar melhor a capacidade do processo.

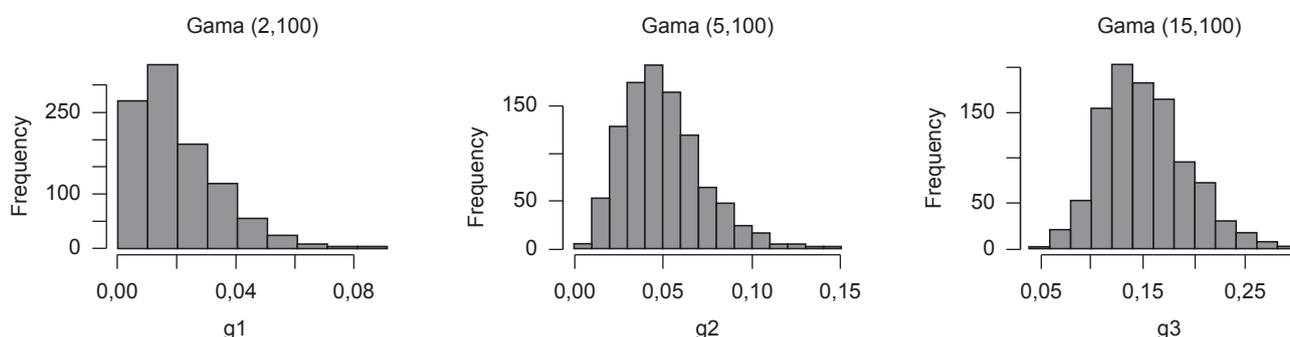


Figura 2. Histogramas das distribuições assimétricas.

Tabela 9. Índices de capacidade para as distribuições geradas.

Distribuição	Índices de Clements (1989)				Índices Pearn e Chen (1997)			
	C'_p	C'_{pk}	C'_{pm}	C'_{pmk}	C_{Np}	C_{Npk}	C_{Npm}	C_{Npmk}
Gamma (2,100)	1,194	1,013	0,494	0,203	1,194	0,456	0,494	0,153
Gamma (5,100)	1,050	1,012	0,750	0,517	1,050	0,590	0,750	0,264
Gamma (15,100)	1,058	1,043	0,833	0,758	1,058	0,831	0,833	0,387

4.2 Aplicação dos métodos de análise de capacidade do processo não-normal

Neste estudo, são aplicados os três métodos de análise de capacidade do processo não-normal em dados coletados em uma metalúrgica da Grande Porto Alegre. Esses dados se referem à primeira medição de dureza de um processo produtivo de braços de direção para caminhões feitos em aço. Os valores são medidos por um equipamento chamado durômetro e são coletados após o processo de têmpera. A escala de medida é chamada escala brinell de dureza. O limite superior de especificação (LSE) desta primeira medição é de 595 brinell, o limite inferior de especificação (LIE) é de 415 brinell e o valor nominal (T) é igual a 505 brinell. Peças com valores de dureza fora dos limites de especificação voltam para uma etapa inicial do processo para que sejam retrabalhadas e peças dentro dos limites de especificação são enviadas para a etapa de revenimento, da qual seguem para mais uma etapa de medição. As peças dentro dos limites de especificação desta etapa final de medição são, então, liberadas para o cliente.

Tabela 10. Comparação entre os índices de Clements e os índices de Pearn e Chen.

Mediana	Índices de Clements (1989)		Índices de Pearn e Chen (1997)	
	C'_{pk}	C'_{pmk}	C_{Npk}	C_{Npmk}
LIE	0,000	0,000	0,000	0,000
T-0,9d	0,200	0,036	0,100	0,035
T-0,8d	0,400	0,082	0,200	0,077
T-0,7d	0,600	0,139	0,300	0,129
T-0,6d	0,800	0,214	0,400	0,194
T-0,5d	1,000	0,316	0,500	0,277
T-0,4d	0,933	0,462	0,600	0,384
T-0,3d	0,867	0,680	0,700	0,520
T-0,2d	0,800	0,743	0,800	0,686
T-0,1d	0,733	0,719	0,900	0,862
T	0,667	0,667	1,000	1,000

Adaptado de Pearn e Chen (1997).

Para se conhecer melhor a etapa do processo produtivo utilizada neste estudo, são mostradas na Tabela 11 algumas estatísticas descritivas da medição de dureza.

Antes da aplicação dos três métodos de análise da capacidade do processo não-normal, é necessário verificar se os dados não apresentam distribuição normal. Para tanto, foram aplicados os testes de Shapiro-Wilk e Kolmogorov-Smirnov de normalidade nos dados. Por ambos os testes, a suposição de normalidade dos dados é rejeitada. Para o teste de Shapiro-Wilk, a estatística W obtida foi igual a 0,9535, com $p\text{-value} = 7,37 \times 10^{-13}$ e, com o teste de Kolmogorov-Smirnov, a rejeição da normalidade dos dados foi confirmada pelo valor da estatística $D = 0,1046$, com $p\text{-value} = 3,717 \times 10^{-6}$. Visualmente pode-se observar a não-normalidade dos dados através dos gráficos mostrados nas Figuras 3(a) e 3(b).

Observa-se na Tabela 12 que apesar dos índices tradicionais, utilizados para analisar a capacidade do processo com distribuição normal, captarem a falta de capacidade do processo, estes subestimaram a capacidade do processo, pois seus valores foram, em sua maioria, inferiores aos índices que tratam dados que apresentam distribuições não-normais, tanto através de capacidade potencial como dos índices de capacidade nominal. Cabe ressaltar que, em situações práticas, geralmente apenas um índice é adotado para a avaliação da capacidade de um processo e, dentre os métodos apresentados neste trabalho, a melhor escolha seria a do método 2 para a avaliação do processo, conforme mostrado anteriormente.

5 Considerações Finais

Quando a suposição de normalidade da variável de interesse não é atendida, a aplicação dos métodos de análise de capacidade de processos normais não é adequada, pois a estimação do percentual (ou PPM) de itens fora das especificações certamente não contempla a realidade, sendo necessária a aplicação de algum método de

Tabela 11. Estatísticas descritivas da etapa de primeira medição de dureza do processo.

Tamanho da amostra	Média	Desvio-padrão	Mínimo	Máximo	$F_{0,135}$	Mediana	$F_{99,865}$
600	521,25	32,399	415	595	415	526	588,49

Tabela 12. Índices de capacidade do processo produtivo de braços de direção.

Índices tradicionais: supondo normalidade		Método 1 Clements (1998)		Método 2 Pearn e Chen (1997)		Método 3 Chen e Ding (2001)	
C_p	0,926	C'_p	1,037	C_{Np}	1,037		
C_{pk}	0,759	C'_{pk}	1,000	C_{Npk}	0,795	S_{pmk}	0,298
C_{pm}	0,828	C'_{pm}	0,839	C_{Npm}	0,839		
C_{pmk}	0,678	C'_{pmk}	0,778	C_{Npmk}	0,601		

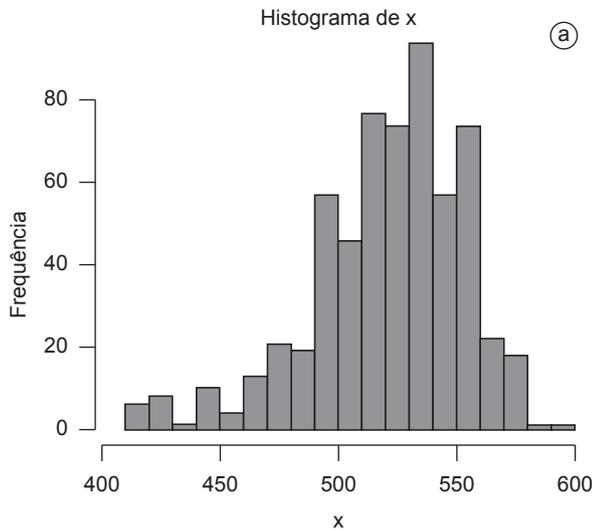


Figura 3(a). Histograma dos valores de dureza.

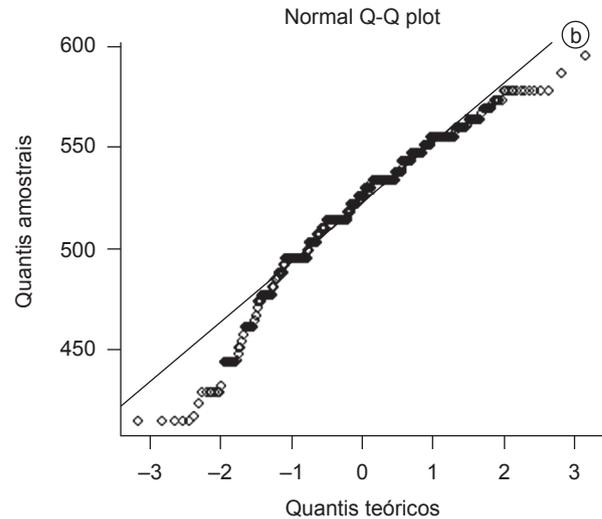


Figura 3(b). Normal-plot dos valores de dureza.

análise de capacidade de processo não-normal. Os erros obtidos com a suposição de normalidade para dados não-normais foram apresentados pelo estudo de Somerville e Montgomery (1996-97). Estes autores, ao estudarem as distribuições t, gamma, lognormal e Weibull quando estas têm um comportamento muito próximo da distribuição normal, verificaram diferenças nas estimativas do percentual (ou PPM) de itens fora das especificações, entre outras estatísticas.

Na comparação dos índices de capacidade não-normais feitas entre os índices propostos, os índices de Pearn e Chen (1997) indicam que estes são melhores que os propostos por Clements (1989), pois os índices C_{Npk} e C_{Npmk} consideram em seus cálculos a assimetria do processo. Além disto, no estudo de Pearn e Chen (1997)

os índices alcançam valor máximo, para limites fixos, quando a mediana coincide com o valor nominal de especificação. Por outro lado, os índices de Clements (1989) apresentaram, no mesmo estudo, valor máximo quando a distribuição era nitidamente assimétrica, com mediana menor que o valor nominal.

Quanto ao estudo aplicado no processo de medição de dureza, cujas análises foram realizadas através do software livre R, com os valores dos índices obtidos ao se utilizarem os índices tradicionais para dados que apresentam distribuição não-normal, se conclui que estes tendem a subestimar a capacidade do processo. Neste caso aplicado, a capacidade do processo foi totalmente insatisfatória, tanto quando os índices tradicionais foram aplicados como quando o foram os índices adequados para tal situação.

Comparations of process capability index to non-normal distributions

Abstract

Although process capability analysis for non-normal data has been used lately, there are only few works on this subject. This article presents the major methods for process capability analysis with non-normal data. Three methods are presented, which were proposed by Clements in 1989, Pearn and (1997), and Chen and Ding (2001). The first two methods are similar in many aspects, but each one presents novelties in the computation of the capability indexes. They present indexes similar to the traditional ones, which assume normality. The method by Chen and Ding (2001) brings as novelty the use of an index to estimate the number of nonconforming items produced in the process. After the review of these methods, they are compared by means of their application in two cases. In the first case, the methods by Clements (1989) and by Pearn and Chen (1997) were analyzed to identify the best for the non-normal process capability determination. In the second case, all three methods were applied in a metallurgical industry data set. In both cases, the free software R (version 2.2) was used for the statistical analysis.

Keywords: Capability index. Non-normal data. Capability.

Referências bibliográficas

- CHAN, L. K.; CHENG, S. W., SPIRING, F. A. A new measure of process capability: Cpm. **Journal of Quality Technology**, v. 20, n. 3, p. 162-75, 1988.
- CHEN, J. P. Re-evaluating the process capability indices for non-normal distributions. **International Journal of Production Research**, v. 38 n. 6, p. 1311-1324, 2000.
- CHEN, J. P.; DING, C. G. A new process capability index for non-normal distributions. **The International Journal of Quality & Reliability Management**, v. 18 n. 6-7, p. 762-770, 2001.
- CLEMENTS, J. A. Process capability calculations for non-normal distributions. **Quality Progress**, v. 22 n. 9, p. 95-100, 1989.
- DELERYD, M. The effect of Skewness on estimates of some process capability indices. **International Journal of Applied Quality Management**, v. 2, n. 2, p. 153-186, 1999.
- KANE, V. E. Process capability indices. **Journal of Quality Technology**, v. 18, n. 1, p. 41-52, 1986.
- MONTGOMERY, D. C. **Introduction to statistical quality control**. 3 ed. New York: John Wiley & Sons, 1997.
- PEARN, W. L.; CHEN, K. S. Capability indices for non-normal distributions with an application in electrolytic capacitor manufacturing. **Microelectronics Reliability**, v. 37 n. 12, p. 1853-1858, 1997.
- SOMERVILLE, S. E.; MONTGOMERY, D. C. Process capability indices and non-normal distributions. **Quality Engineering**, v. 9, n. 2, p. 305-316, 1996-1997.
- VÄNNMAN, K. A unified approach to capability indices. **Statistica Sinica**, v. 5, n. 2, p. 805-820, 1995.

Sobre os autores

Patricia Ueda Gonzalez

Liane Werner

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Av. Osvaldo Aranha, 99, 5º andar, Porto Alegre, RS, CEP 90035-190
e-mails: patyueda@yahoo.com.br, liane@producao.ufrgs.br

Recebido em 17/5/2007

Aceito em 2/3/2009