LCE0216 - Introdução à Bioestatística Florestal
5. Distribuições amostrais

Profa. Dra. Clarice Garcia Borges Demétrio
Monitores: Giovana Fumes e Ricardo Klein

Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"
Universidade de São Paulo

Piracicaba, 11 de Maio 2017

Distribuições amostrais

$$\left.\begin{array}{l}\text{estimação dos parâmetros}\\ \text{teste de hipóteses}\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c}\text{conhecimento das distribuições}\\ \text{dos estimadores}\end{array}.$$

Exemplo: Seja uma população composta por quatro árvores dada na tabela a seguir:

Árvore	Diâmetro (cm)
A	8,0
B	20,0
C	24,0
D	27,0

A proporção de árvores com diâmetro inferior a 20 cm:

$$\pi = \frac{1}{4} = 0,25.$$

O diâmetro médio (μ):

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i}{4} = 19,75 \text{ cm}.$$

Exemplo: Seja uma população composta por quatro árvores dada na tabela a seguir:

Árvore	Diâmetro (cm)
A	8,0
B	20,0
C	24,0
D	27,0

A variância (σ^2):

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu)^2}{4} = \frac{208,75}{4} = 52,1875 \text{ cm}^2.$$

O desvio padrão (σ):

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{52,1875} = 7,2241 \text{ cm}.$$

Distribuições amostrais

Amostra	Elementos	$\hat{\pi}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$
1	A,B	0,50	14,0	72,0
2	A,C	0,50	16,0	128,0
3	A,D	0,50	17,5	180,5
4	B,C	0,00	22,0	8,0
5	B,D	0,00	23,5	24,5
6	C,D	0,00	25,5	4,5
7	B,A	0,50	14,0	72,0
8	C,A	0,50	16,0	128,5
9	D,A	0,50	17,5	180,0
10	C,B	0,00	22,0	8,0
11	D,B	0,00	23,5	24,5
12	D,C	0,00	25,5	4,5
13	A,A	1,00	8,0	0,0
14	B,B	0,00	20,0	0,0
15	C,C	0,00	24,0	0,0
16	D,D	0,00	27,0	0,0

Distribuição amostral da estatística P

Vamos supor que uma árvore com menos de 20 cm de diâmetro não seja interessante para o mercado.

- Existe apenas uma árvore na população com determinada característica $\Rightarrow \pi = 1/4 = 0,25$.
- Estimar tal proporção observando árvores dessa população

$$\Downarrow$$

Observar uma amostra de tamanho dois, com reposição

$$\Downarrow$$

Estimar π por meio da estatística

$$P = \frac{\text{número de casos favoráveis (sucessos)}}{\text{tamanho da amostra}}$$

Distribuição amostral da estatística P

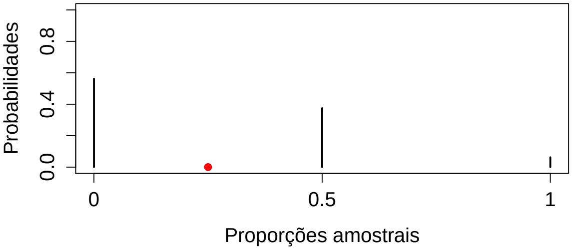
Perguntas:

1. Quais proporções amostrais podem ser obtidas?
2. Qual a probabilidade associada a cada uma?
3. Qual a forma da distribuição das proporções amostrais?
4. Qual a média da distribuição amostral dessas proporções?
5. Qual a variância da distribuição amostral dessas proporções?

Distribuição amostral da estatística P

Distribuição amostral da proporção:

y_i	0	1	2
$\hat{p} = y_i/2$	0	0,5	1
$\mathrm{P}(P = \hat{p})$	9/16=0,5625	6/16=0,3750	1/16=0,0625



- Forma: distribuição assimétrica;

Distribuição amostral da estatística P

Distribuição amostral da proporção:

y_i	0	1	2
$\hat{p} = y_i/2$	0	0,5	1
$\mathrm{P}(P = \hat{p})$	9/16=0,5625	6/16=0,3750	1/16=0,0625

- Média:

$$\mu_p = 0 \times 0,5625 + 0,50 \times 0,3750 + 1 \times 0,0625 = 0,25 = \pi$$

- Variância:

$$(0-0,25)^2 \times 0,5625 + (0,50-0,25)^2 \times 0,3750 + (1-0,25)^2 \times 0,0625 =$$

$$= 0,09375 = \pi(1-\pi)/n$$

Distribuição amostral da estatística P

Vimos que...

Y: número de árvores com diâmetro inferior a 20 cm

$$\text{Se } Y \sim Bin(n, \pi).$$

Então,

$$\mu = n\pi \qquad \text{e} \qquad \sigma^2 = n\pi(1-\pi).$$

Logo, a distribuição amostral das proporções poderá ser aproximada por uma distribuição normal com parâmetros:

$$\mu_p = \pi \qquad \text{e} \qquad \sigma_p^2 = \frac{\pi(1-\pi)}{n}.$$

Observação: Quando são utilizadas amostras sem reposição, deve-se fazer uma correção na variância.

Distribuição amostral da estatística P

Exemplo: Uma proporção de 37% dos visitantes de um parque favorecem a cobrança de taxas de entrada. Uma amostra aleatória de 200 visitantes foi tomada.

(a) Qual é a probabilidade que na amostra de 200 visitantes pelo menos 40% favoreçam a cobrança de taxas?

(b) Qual é a probabilidade que na amostra de 200 visitantes, a proporção dos que favorecem a cobrança de taxas fique entre 35% e 39%?

(c) Uma nova amostra de 10 visitantes foi tomada. Qual a probabilidade de que pelo menos 50% dos visitantes na amostra favoreçam a cobrança de taxas? É válido utilizar o mesmo método utilizado anteriormente? Qual método deveria ser utilizado nesse caso?

Distribuição amostral da média

Distribuição amostral da estatística $\bar{X}$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Distribuição amostral da média

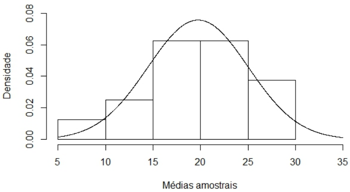
Considerando-se o exemplo de diâmetro das árvores. Agora o interesse é estimar o diâmetro médio (μ).

Amostra	Elementos	$\hat{\pi}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma^2}$
1	A,B	0,50	14,0	72,0
2	A,C	0,50	16,0	128,0
3	A,D	0,50	17,5	180,5
4	B,C	0,00	22,0	8,0
5	B,D	0,00	23,5	24,5
6	C,D	0,00	25,5	4,5
7	B,A	0,50	14,0	72,0
8	C,A	0,50	16,0	128,5
9	D,A	0,50	17,5	180,0
10	C,B	0,00	22,0	8,0
11	D,B	0,00	23,5	24,5
12	D,C	0,00	25,5	4,5
13	A,A	1,00	8,0	0,0
14	B,B	0,00	20,0	0,0
15	C,C	0,00	24,	0,0
16	D,D	0,00	27,0	0,0

Distribuição amostral da média

1. Qual a forma da distribuição das médias amostrais?
2. Qual a média da distribuição amostral dessas médias?
3. Qual a variância da distribuição amostral dessas médias?

Distribuição amostral da média



- Forma: distribuição simétrica
- Média:

$$\frac{14,0 + 16,0 + \ldots + 27,0}{16} = 19,75 \text{ cm} = \mu$$

- Variância:

$$\frac{(14,0 - 19,75)^2 + (16,0 - 19,75)^2 + \ldots + (27,0 - 19,75)^2}{16} =$$

$$= 26,09 \text{ kg}^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Distribuição amostral da média

Assim...

Y: média do diâmetro das árvores (cm)

$$\text{Se } Y \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Então, a distribuição amostral da média terá distribuição normal com parâmetros:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \qquad \text{e} \qquad \sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Observação: Quando são utilizadas amostras sem reposição, deve-se fazer uma correção na variância.

Teorema Central do Limite

Teorema Central do Limite

Se a população original tem uma distribuição qualquer com média μ e variância σ^2, para n "suficientemente grande" (na prática, quando $n \geq 30$), $\bar{X}$ tem distribuição **aproximadamente** normal:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{E}(X) = \mu \\ \mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Teorema Central do Limite

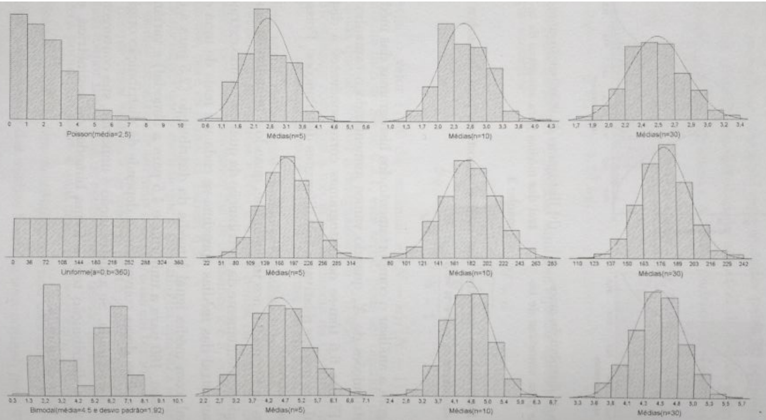


Figura 6.6 — Histogramas da distribuição amostral das médias obtidas de amostras de três tamanhos (n=5, n=10 e n=30) para três distribuições (Poisson, uniforme e uma bimodal)

Distribuição amostral da média

Exemplo: Seja X a produção anual de resina de árvores de *Pinus elliotti*. Suponha que X segue uma distribuição normal com média 2,3 kg e desvio padrão 0,7 kg.

(a) Faça um esboço da distribuição de X.

(b) Foi tomada uma amostra aleatória de 16 árvores. Qual é a probabilidade de que a produção média das 16 árvores amostradas seja maior do que 2,8 kg?

(c) Uma amostra aleatória de 49 árvores foi tomada. Qual é a probabilidade de que a produção média das 49 árvores amostradas seja maior do que 2,8 kg?

(d) Uma amostra aleatória de 25 árvores foi tomada. Obter $\bar{x}$ tal que:

- $P(\bar{X} < \bar{x}) = 0,985$
- $P(\bar{X} < \bar{x}) = 0,975$