

Eletricidade e Magnetismo - IGC

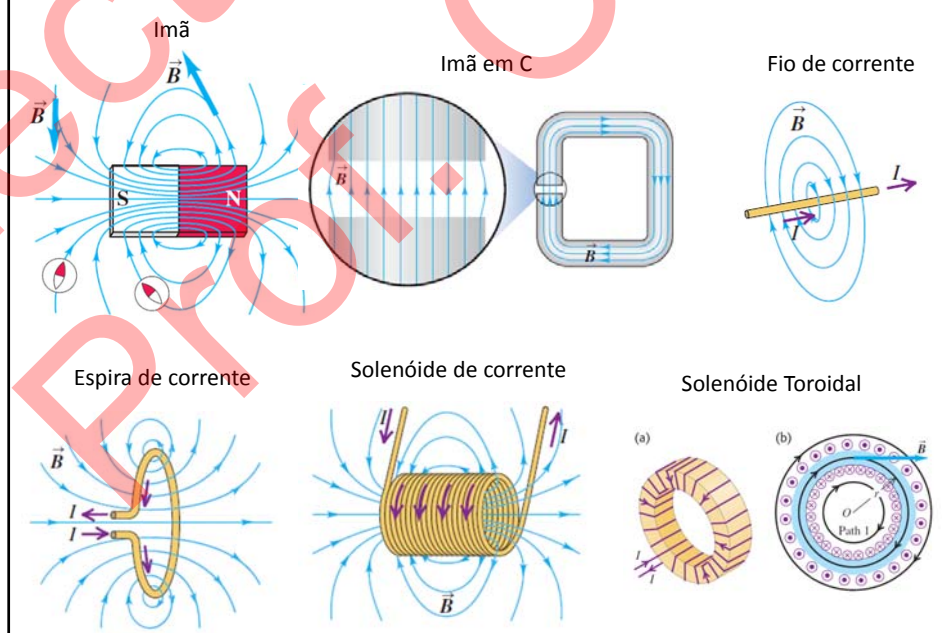
Fontes de Campo Magnético

Prof. Cristiano Oliveira

Ed. Basilio Jafet – sala 202

crislpo@if.usp.br

Fonte de Campo Magnético

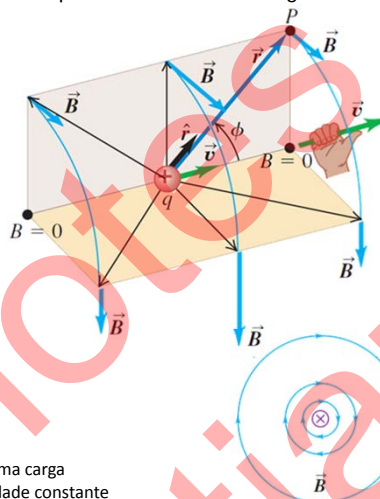


Campo gerado por carga em velocidade constante

Quando estudamos cargas elétricas, anteriormente, vimos que dados *experimentais* demonstravam a presença da força elétrica entre duas cargas e isso serviu para a *definição* do campo elétrico para uma carga puntiforme.

Seja uma carga q se deslocando com velocidade $\mathbf{v}$. A experiência mostra as seguintes informações

- O módulo do campo magnético $\mathbf{B}$ é proporcional a $1/r^2$
- A direção de $\mathbf{B}$ **não é dada** pela direção da reta que une a carga com o ponto do campo. Na realidade, a direção de $\mathbf{B}$ é perpendicular ao plano que contém essa reta e o vetor velocidade $\mathbf{v}$.
- O módulo de $\mathbf{B}$ também é proporcional ao módulo da velocidade $\mathbf{v}$ da partícula e o seno do ângulo ϕ entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$.



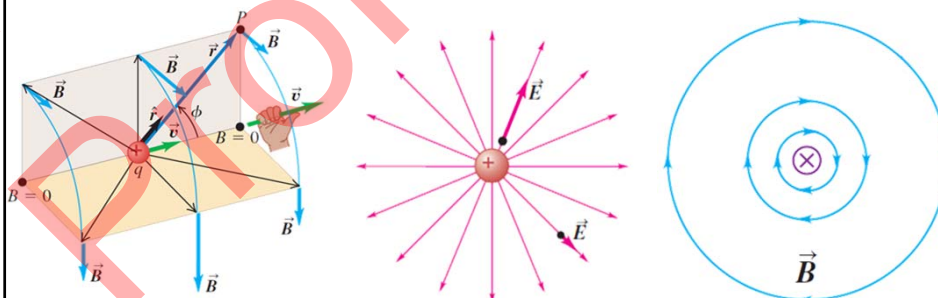
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

Campo magnético de uma carga puntiforme com velocidade constante

Campo gerado por carga em velocidade constante

Uma carga elétrica, gerará um campo elétrico $\mathbf{E}$ e, seu movimento, também dá origem a um campo magnético $\mathbf{B}$.

Note que o campo elétrico está sempre presente, independente do movimento ou não da carga. Já o campo magnético somente aparece quando temos o movimento da carga.



$$\vec{E} \rightarrow \left\{ \frac{1}{r^2} \hat{r} \right.$$

$$\vec{B} \rightarrow \left\{ \frac{1}{r^2} \vec{v} \times \hat{r} \right.$$

Campo gerado por carga em velocidade constante

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

Campo magnético de uma carga puntiforme com velocidade constante

O pre-fator μ_0 é denominado permeabilidade magnética e possui valor exato:

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m} \\ &= 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}\end{aligned}$$

Na lei de Coulomb, havíamos utilizado a constante ϵ_0 , conhecida como permissividade elétrica

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

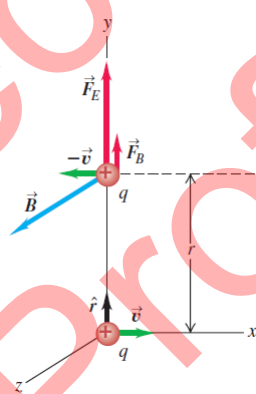
Campo elétrico de uma carga puntiforme

Interessantemente, o produto da permissividade elétrica e da permeabilidade magnética se relacionam com o quadrado da velocidade da luz:

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$$

Esta relação não é uma mera coincidência. Veremos que isso é consequência da unificação entre eletricidade e magnetismo na teoria **eletromagnética**.

Força entre duas cargas em movimento



$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q(v\hat{i}) \times \hat{j}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv}{r^2} \hat{k}$$

$$\vec{F}_B = q(-\vec{v}) \times \vec{B} = q(-v\hat{i}) \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv}{r^2} \hat{k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2 v^2}{r^2} \hat{j}$$

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{\mu_0 q^2 v^2 / 4\pi r^2}{q^2 / 4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\mu_0 v^2}{1/\epsilon_0} = \epsilon_0 \mu_0 v^2$$

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{v^2}{c^2}$$

Para baixas velocidades, $F_B \ll F_E$

Quando temos cargas próxima da velocidade da luz sofrendo **aceleração**, outros efeitos acontecem. Pode acontecer **emissão de radiação** e estes efeitos não serão abordados aqui.

Campo gerado por um elemento de corrente

Se temos um elemento de corrente de comprimento $d\vec{l}$, o volume deste elemento será $A d\vec{l}$. Se temos n partículas por unidade de volume, a carga total dQ que se move no segmento será:

$$dQ = nqA dl$$

Estas cargas se movem e podem ser descritas como essa carga única dQ se movendo com uma velocidade de arraste $\vec{v}_d$. Assim, podemos usar o resultado anterior:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|dQ|v_d \sin \phi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{n|q|v_d A dl \sin \phi}{r^2}$$

Mas $nqv_d A$ é a corrente no elemento, assim,

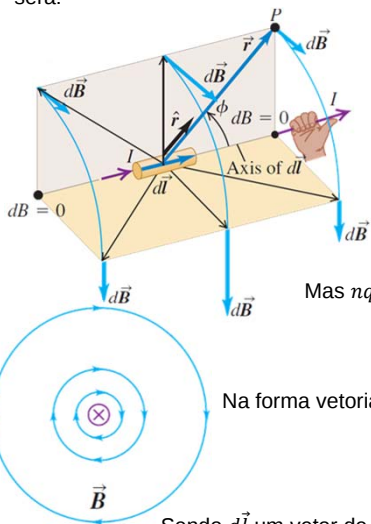
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \phi}{r^2}$$

Na forma vetorial, temos

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Campo magnético do elemento de corrente

Sendo $d\vec{l}$ um vetor de comprimento dl que aponta no mesmo sentido da corrente.



Lei de Biot e Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Esta equação é uma das formas da **Lei de Biot e Savart**. Podemos utilizar essa Lei para determinar o campo magnético $\vec{B}$ produzido em qualquer ponto do espaço por uma corrente que flui em um circuito completo. Para isso, podemos integrar em todos os segmentos $d\vec{l}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Veremos algumas aplicações desta lei para o cálculo do campo magnético em casos particulares.

Jean-Baptiste Biot



Conhecido(a) por Lei de Biot-Savart
 Nascimento 21 de abril de 1774
 Paris
 Morte 3 de fevereiro de 1862 (87 anos)
 Paris
 Nacionalidade Francês
 Prêmios Medalha Rumford (1840)
 Assinatura
 Campo(s) Física, matemática e astronomia

Félix Savart



Nascimento 30 de junho de 1791
 Chailleville-Mézères
 Morte 16 de março de 1841 (49 anos)
 Paris
 Nacionalidade Francês
 Campo(s) Física

Campo gerado por um Condutor retilíneo de corrente

Tomemos um fio conduzindo corrente, alinhado na direção y , de comprimento $2a$. Vamos calcular $\vec{B}$ em um ponto sobre a reta perpendicular que divide o condutor em duas metades situado a uma distância x do seu centro.

Tome um elemento $d\vec{l}$ no condutor. Pela construção, $dl = dy$. Obtemos a direção $\hat{r}$ unindo ele esse elemento e o ponto de interesse.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

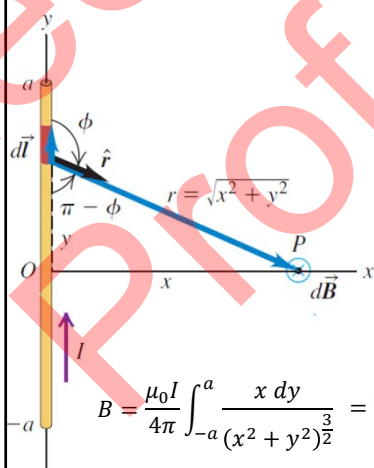
$$\sin\phi = \sin(\pi - \phi) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

A regra da mão direita mostra que todos os vetores $d\vec{B}$ apontam na mesma direção: $d\vec{l} \times \hat{r} \rightarrow -\hat{k}$

Assim, podemos simplesmente somar os módulos de cada vetor $d\vec{B}$ integrando ao longo do fio:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I dl \sin\phi}{r^2} \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{x dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Campo gerado por um Condutor retilíneo de corrente



Wolfram Mathematica
ONLINE INTEGRATOR

HOW TO ENTER INPUT | RANDOM EXAMPLE

$\int \frac{a}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx$

Compute Online With Mathematica

Traditional Form | Input Form | Output Form

$$\int \frac{a}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{a\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Time to compute: 0.02 second

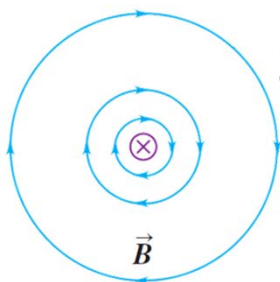
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{x dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{y}{x(x^2 + y^2)^{1/2}} \Big|_{-a}^a = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

Campo gerado por um Condutor retilíneo de corrente

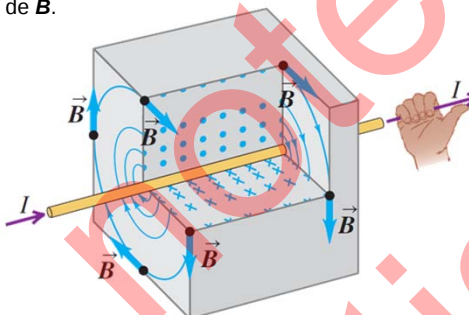
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x\sqrt{x^2 + a^2}} (-\hat{k})$$

Para um fio infinito, podemos fazer $a \rightarrow \infty$, $\sqrt{x^2 + a^2} \approx \sqrt{a^2} = a$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

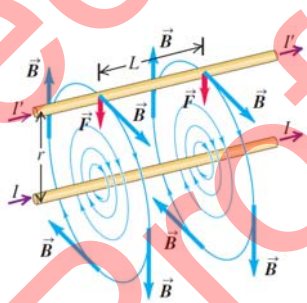


Para obter a direção de B , aponte o polegar de sua mão direita no sentido de I . Os outros dedos de sua mão, indicam a direção e sentido de B .



Força entre Condutores Paralelos

Se tivermos dois fios paralelos, conduzindo correntes I e I' , cada condutor estará sob a influência do campo magnético do outro e assim sofre a ação de uma força. Vamos assumir inicialmente que as direções de I e I' são as mesmas.



O fio inferior produz um campo magnético B que, no local onde está o fio superior possui módulo dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

A força exercida no fio superior, em uma região de comprimento L será dada por $\vec{F} = I'\vec{L} \times \vec{B}$

O campo B é perpendicular a L e assim a força terá módulo:

$$F = I'LB = \frac{\mu_0 I I' L}{2\pi r}$$

A força exercida por unidade de comprimento, F/L , será: $\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}$ Dois fios paralelos longos conduzindo corrente

Aplicando a regra da mão direita, vemos que a força sobre o fio superior é aplicada para baixo. Em outras palavras, a força é direcionada no plano definido pelos dois fios, orientada de modo a atrair o fio 2 para o fio 1,

Força entre Condutores Paralelos

Fazendo a mesma análise para o campo gerado pelo fio 2 no fio 1, chegaremos na conclusão que a força sobre o fio inferior é orientada de baixo para cima.

Assim, existe uma força de atração entre dois fios paralelos que conduzem correntes com o mesmo sentido.

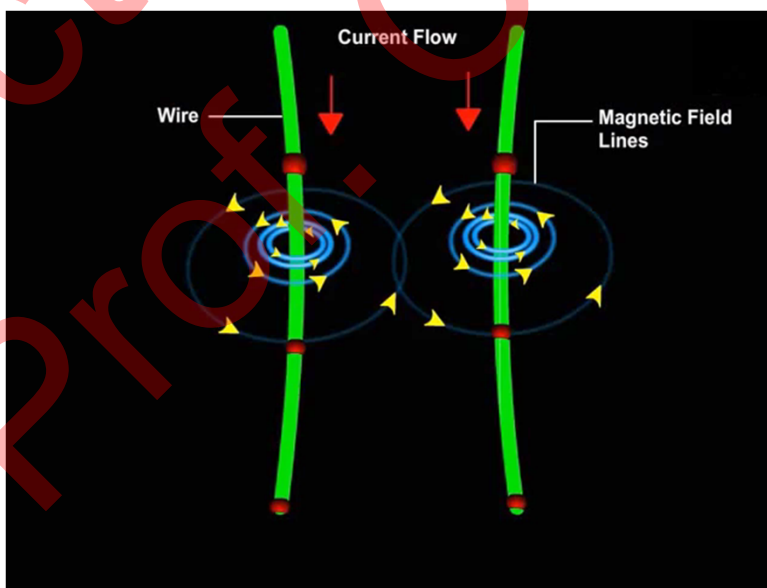
Se o sentido de qualquer uma das duas correntes é invertido, o sentido de cada força também se inverte.

Assim, existe uma força de repulsão entre dois fios paralelos que conduzem correntes com sentidos contrários.



A atração e repulsão pode ser entendida em termos dos campos gerados. Em um caso os campos magnéticos gerados possuem sentidos opostos (similar a polos opostos) gerando atração. No outro caso temos campos no mesmo sentido (similar a polos iguais) gerando repulsão.

Força entre Condutores Paralelos



Força entre Condutores Paralelos

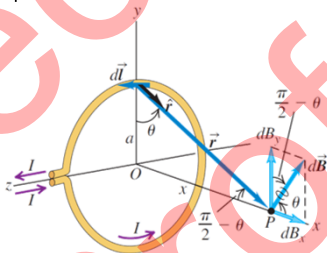
Forces on a Current-Carrying Wire

MIT Physics Lecture
Demonstration Group

Campo gerado por uma Espira Circular

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Temos uma espira circular com raio a conduzindo uma corrente I , que entra e sai da espira por dois fios retilíneos.



O centro da espira é colocada na origem do sistema de eixos e o vetor perpendicular ao plano da espira é colocado ao longo do eixo x . Vamos calcular o campo magnético ao longo do eixo x .

Pela simetria da espira, vemos que o campo gerado, $d\vec{B}$, terá uma simetria rotacional (na forma de um cone). Assim, as componentes perpendiculares ao eixo x se cancelarão e somente a componente $d\vec{B}_x$ será diferente de zero.

Usando a Lei de Biot-Savart para o elemento dl :

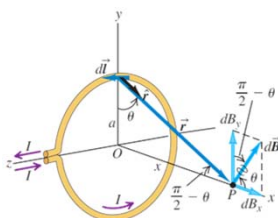
$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$dB_x = dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \frac{a}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$dB_y = dB \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

Campo gerado por uma Espira Circular

Para obter o campo total, integramos utilizando todos os elementos $d\vec{l}$ em torno da espira.



$$B_x = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a \, dl}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

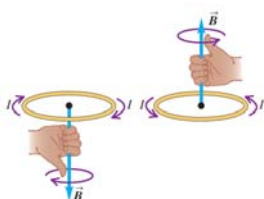
Nesta integral todos os termos são constantes, exceto dl . Assim,

$$B_x = \frac{\mu_0 I a}{4\pi(x^2 + a^2)^{3/2}} \int dl$$

A integral de dl será nada mais que o comprimento da circunferência, $\int dl = 2\pi a$.

Logo,

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad \text{Sobre o eixo da espira circular}$$



A regra da mão direita permite determinar facilmente a direção do campo magnético gerado por uma espira circular.

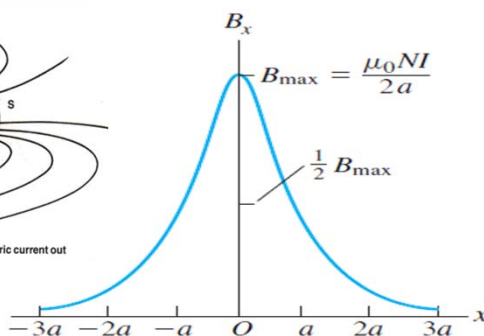
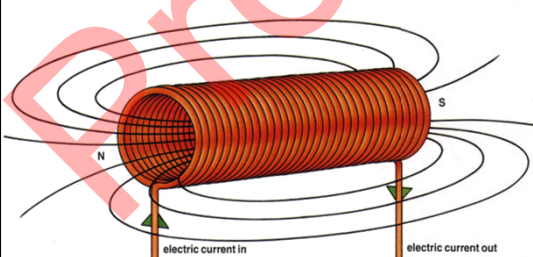
Campo gerado por uma Espira Circular

Se tivermos uma bobina com N espiras, cada espira fornece a mesma contribuição para o campo magnético e assim o campo total será N vezes o campo de uma única espira:

$$B_x = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

O valor máximo do campo gerado ocorre no centro da espira ou da bobina e é dado por:

$$B_x = \frac{\mu_0 N I}{2a} \quad \text{Sobre o centro de } N \text{ espiras circulares}$$



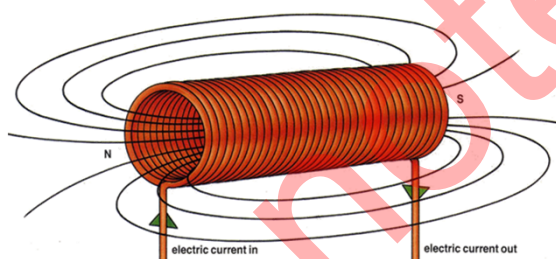
Campo gerado por uma Espira Circular

Anteriormente havíamos definido o **momento de dipolo magnético** μ de uma espira de corrente como $\mu = IA$.

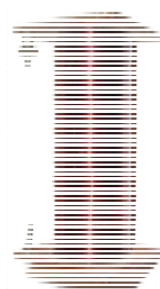
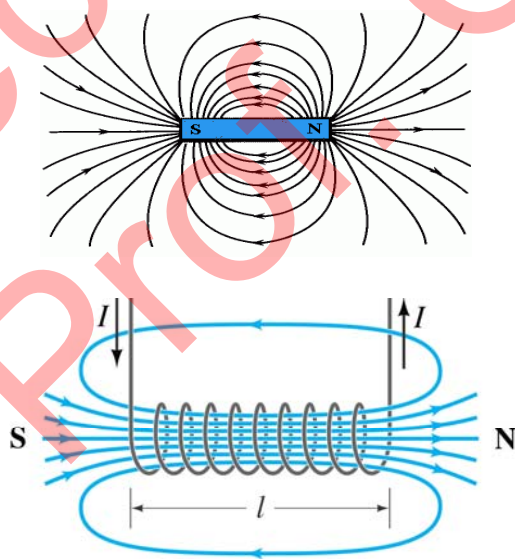
Quando temos um solenoide, os momentos magnéticos se somam e assim teremos $\mu = NIA$. Para uma espira circular, $A = \pi r^2$ e assim, $\mu = NI\pi r^2$

Assim, podemos escrever o campo magnético em termos do momento de dipolo magnético da espira ou do solenoide como

$$B_x = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad \text{No eixo de N espiras circulares}$$



Solenóide === Imã



Um solenóide de corrente fornece campos semelhantes ao de um ímã permanente.

Lei de Ampère

Quando calculamos o campo elétrico de um arranjo de cargas vimos que era possível utilizar a *Lei de Coulomb*, fazer as integrações envolvidas, e obter o campo total.

Para sistemas de alta simetria era possível utilizar a *Lei de Gauss*, o que tornava mais fácil o cálculo do campo elétrico.

No caso magnético, temos a *Lei de Biot-Savart* para o cálculo do campo magnético de um arranjo de correntes, envolvendo integrações complexas.

Será possível utilizar a simetria do sistema para facilitar os cálculos? Bem, a *Lei de Gauss* no caso magnético não é útil pois como vimos,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

O uso da simetria no cálculo será feita através de uma nova Lei, a chamada **Lei de Ampère**.

A Lei de Ampère não é formulada em termos de um fluxo magnético, mas definida com base em uma *integral de linha* de **B** em torno de uma trajetória fechada:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Esta formulação tem dois aspectos: é definida em termos do produto escalar entre o campo magnético em um dado ponto e o elemento infinitesimal naquele ponto; é uma integral em um caminho fechado, o que é indicado na circunferência no centro da integral.

Lei de Ampère

Vamos considerar o campo magnético produzido por um condutor retilíneo com corrente **I**. O campo gerado por ele é:

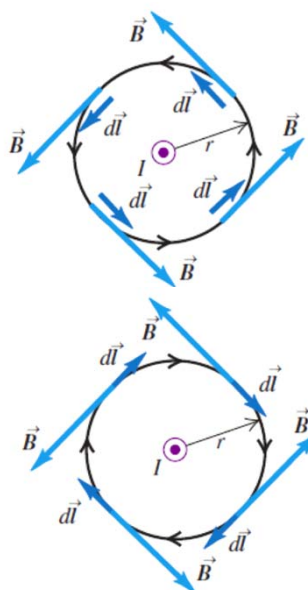
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Alem disso, as linhas de campo são circunferências centradas sobre o condutor. Vamos calcular a integral de linha de **B** em torno de uma dessas circunferências com raio **r**, como mostrado ao lado.

Em uma dada circunferência, **B** e **dl** são paralelos, logo, **B · dl** = B dl. Como **r** é constante em torno da circunferência, B também é constante. Assim, B pode sair da integral e teremos que $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ nada mais é que o comprimento da circunferência, assim:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (2\pi r) = \mu_0 I$$

Se **B** e **dl** são antiparalelos, **B · dl** = -Bdl e a integral daria - $\mu_0 I$. O sinal da corrente depende do sentido da integração com relação à corrente. A regra da mão direita indica se, na direção de integral de linha adotada, a corrente é positiva ou negativa.



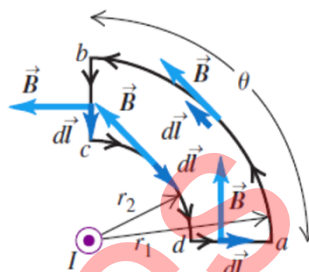
Lei de Ampère

Um percurso de integração que *não* circunda um condutor é indicado ao lado. Podemos repartir a integral de linha fechada em varias partes nos pontos a, b, c e d.

Ao longo de ab de raio r_1 , $\vec{B}$ e $d\vec{l}$ são paralelos, $\vec{B}$ ao longo de r_1 é constante e vale $B = \mu_0 I / (2\pi r_1)$. Ao longo do arco cd de raio r_2 , $\vec{B}$ e $d\vec{l}$ são antiparalelos e $\vec{B}$ ao longo de r_2 é $B = -\mu_0 I / (2\pi r_2)$. O campo B é perpendicular ao longo dos segmentos bc e da e não contribuem para a integral. Assim:

$$\begin{aligned}\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= B_1 \int_a^b dl + (0) \int_b^c dl + (-B_2) \int_c^d dl + (0) \int_d^a dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} (r_1 \theta) + 0 - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} (r_2 \theta) + 0 = 0\end{aligned}$$

O maior módulo de $\vec{B}$ ao longo do arco cd é compensada pelo menor comprimento do arco. Assim, $\int \vec{B} \cdot d\vec{l}$ nos dois arcos tem mesmo valor, mas sinais opostos, e se cancelam. Assim, mesmo que tenhamos campo magnético presente na região de integração, esta integral fechada é nula se não englobar correntes.



Lei de Ampère

Pode-se mostrar este resultado para um percurso arbitrário de integração.

Na posição do elemento de linha $d\vec{l}$ o ângulo entre $d\vec{l}$ e $\vec{B}$ é ϕ e

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl \cos \phi$$

Pela figura, $dl \cos \phi = r d\theta$, onde θ é o ângulo subtendido por $d\vec{l}$ em relação ao fio e r é a distância entre $d\vec{l}$ e o fio. Logo,

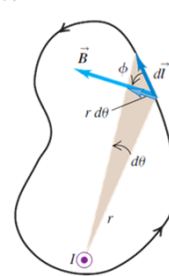
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (r d\theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\theta$$

Mas, $\oint d\theta = 2\pi$ e assim,

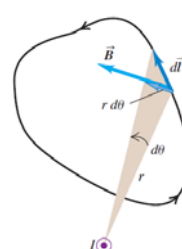
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Quando o percurso não engloba o fio, a variação total do ângulo θ durante uma volta completa através do percurso de integração é zero, $\oint d\theta = 0$ ao invés de 2π e a integral é zero.

(a)



(b)



Lei de Ampère – Formulação Geral

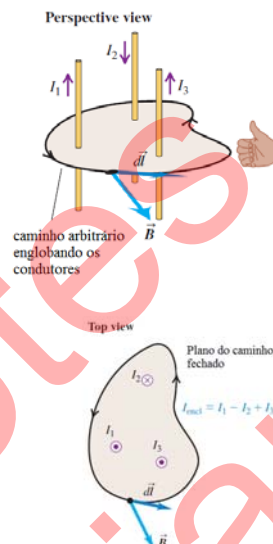
Para generalizar a lei de Ampère, deve-se considerar diversos fios retilíneos longos que passam na área

O campo magnético total B em qualquer ponto do caminho é a soma vetorial dos campos produzidos pelos condutores individuais. Assim a integral de linha do campo total B é igual a μ_0 vezes a soma algébrica das correntes.

Portanto, na Lei de Ampère inserimos a corrente no interior ou englobada pelo percurso de integração. O enunciado da Lei de Ampère é :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encl}} \quad \text{Lei de Ampère}$$

Apesar de termos focado no caso especial de fios retilíneos, longos e paralelos, essa equação vale para todos os percursos e condutores **qualquer** que seja a forma do condutor e do percurso escolhido.



Lei de Ampère – Forma integral e diferencial

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Podemos escrever a corrente I em um condutor em termos da integral da densidade de corrente J integrada em uma superfície S ,

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

Assim,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

De cálculo diferencial avançado, temos a Lei de Stokes:

"A integral de linha de um vetor em torno de uma curva fechada é igual a integral da normal da componente normal de seu rotacional sobre qualquer superfície limitada pela curva"

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

Aplicando a Lei de Stokes na lei de Ampère em termos de J ,

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

A integral é tomada na mesma superfície S . Assim, somente teremos a igualdade se os integrandos forem idênticos, logo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Sendo essa a *Lei de Ampère* na forma diferencial. Essa expressão está quase completa, mas ela não contempla possíveis variações no fluxo elétrico, ou seja, o fato do campo elétrico poder variar com o tempo. Logo mais, completaremos essa expressão.

Lei de Ampère – Aplicações

Campo de um fio retilíneo conduzindo uma corrente

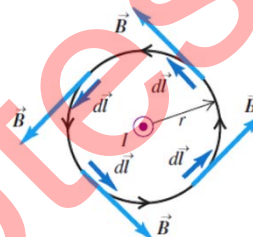
Podemos utilizar a Lei de Ampère para determinar o módulo, direção e sentido de $\vec{B}$ em um fio de corrente.

Pra isso podemos explorar a simetria cilíndrica dessa situação, escolhendo como percurso de integração uma circunferência de raio r centralizada no fio e situada no plano

Neste caso, $\vec{B}$ é tangente à circunferência em cada um dos seus pontos. A lei de Ampère fornece,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_{\parallel} dl = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



Lei de Ampère – Aplicações

Campo no interior de um cilindro condutor longo

Um condutor cilíndrico longo de raio R conduz uma corrente I . A corrente está uniformemente distribuída na área da seção reta do cilindro. Calcule o campo magnético em função da distância r entre o ponto do campo e o eixo do cilindro para todos os pontos dentro ($r < R$) e fora do condutor ($r > R$).

Dentro do condutor:

A regra da mão direita indica que o campo $\vec{B}$ será tangente à circunferência que circunda o eixo de sentido de corrente. Escolhemos como percurso de integração uma circunferência de raio r centralizada no fio e situada no plano. Assim, o módulo da integral da lei de ampere será, $B2\pi r$.

Agora precisamos obter a corrente englobada pela circunferência.

Para isso, usamos a definição de densidade de corrente:

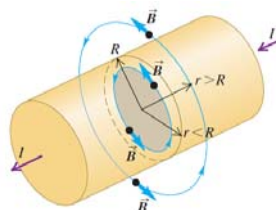
$$I_{\text{int}} = JA_{\text{int}} = J\pi r^2$$

No fio de raio R temos uma corrente I . Assim o módulo de densidade de corrente será,

$$JA = J\pi R^2 = I \Rightarrow J = \frac{I}{\pi R^2}$$

Assim, $B 2\pi r = \mu_0 I_{\text{int}} = \mu_0 J\pi r^2 = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = \mu_0 \frac{I r^2}{R^2}$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \quad (\text{dentro do condutor, } r < R)$$



Lei de Ampère – Aplicações

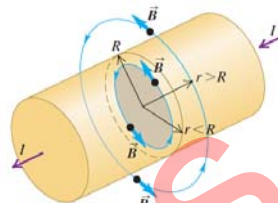
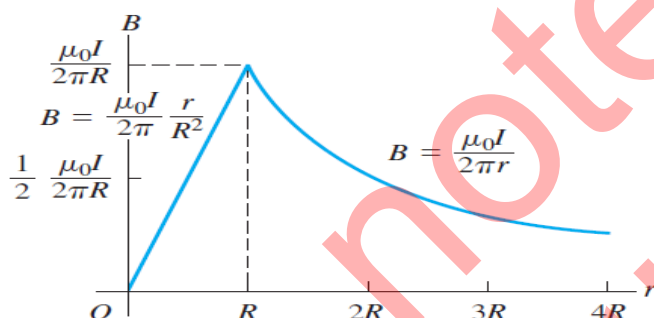
Campo no interior de um cilindro condutor longo

Fora do condutor:

Neste caso, usando regra da mão direita, novamente o campo $\mathbf{B}$ será tangente à circunferência que circunda o eixo de sentido de corrente. Escolhemos como percurso de integração uma circunferência de raio r centralizada no fio e situada no plano. Assim, o módulo da integral da lei de ampere será, $B2\pi r$.

Neste caso, a circunferência engloba toda a corrente e assim, $I_{\text{int}} = I$

Assim, $B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (fora do condutor, $r > R$)



Lei de Ampère – Aplicações

Campo de um solenóide

Um solenóide é constituído por um enrolamento helicoidal de fio sobre um núcleo, em geral com seção reta circular. Use a lei de Ampère para determinar o campo magnético no centro ou nas proximidades do centro desse solenóide longo. O solenóide conduz uma corrente I e possui n espiras por unidade de comprimento.

Escolhemos como percurso de integração o retângulo $abcd$ indicado ao lado.

O lado ab , de comprimento L é paralelo ao eixo do solenóide. Supomos que o lado dc esteja bastante afastado do solenóide, de modo que o campo nele seja desprezável.

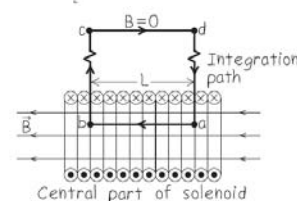
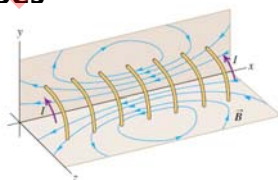
Por simetria, o campo $\mathbf{B}$ ao longo do lado ab é constante e paralelo a esse lado. Usando a lei de Ampère, fazemos o percurso ao longo do lado ab no mesmo sentido de $\mathbf{B}$. Assim, $\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL$

Ao longo dos lados bc e da , $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ é zero pois $\mathbf{B}$ é perpendicular a $d\vec{l}$. Ao longo de cd $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ também é zero pois $\mathbf{B}$ é zero. Assim, a integral será $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL$

Precisamos saber a corrente englobada pelo circuito fechado. O número de espiras para um dado comprimento L é igual a nL , sendo n o número de espiras por unidade de comprimento.

Cada espira conduz uma corrente I , logo a corrente englobada será: $I_{\text{int}} = nLI$

Pela lei de Ampère, como $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ é positiva, I_{int} também é positiva.



Lei de Ampère – Aplicações

Campo de um solenóide

Usando a lei de Ampère, temos

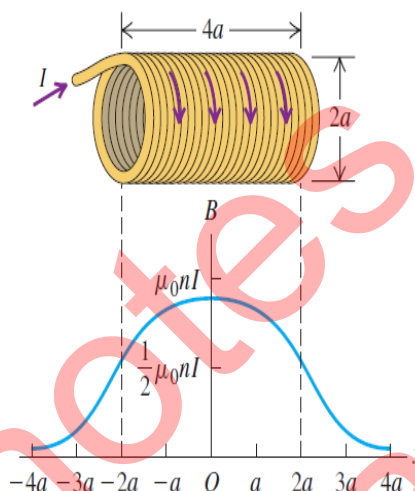
$$BL = \mu_0 nLI$$

$$B = \mu_0 nI$$

Note que o lado ab não precisa cair no eixo do solenóide, assim este resultado demonstra que o campo é uniforme ao longo da seção reta inteira nas proximidades do centro do solenóide.

O sentido de $\vec{B}$ é o mesmo do momento magnético μ .

Para os pontos ao longo do eixo o campo é mais forte nas vizinhanças do centro do solenóide e diminui à medida que o ponto se aproxima das extremidades. Para um solenóide muito longo em comparação com seu diâmetro, o campo em cada extremidade é exatamente a metade do campo magnético no seu centro.



Lei de Ampère – Aplicações

Campo de um solenóide toroidal

Um solenóide toroidal, ou toróide é um solenóide que conduz uma corrente I através de um enrolamento com N espiras em torno de um núcleo em forma de rosca, como indicado abaixo.

Quando as espiras são bastante próximas podemos considerar que o campo magnético $\vec{B}$ que estaria na periferia do toróide é desprezável e assim o campo se concentra no interior do toróide.

Temos de considerar percursos magnéticos concêntricos ao eixo do toróide.

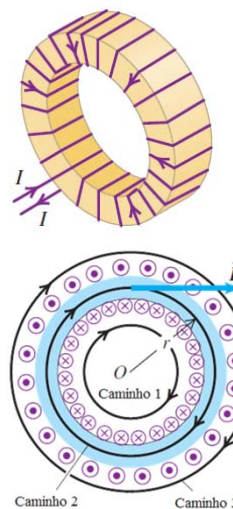
Caminho 1: A corrente no interior deste caminho é nula. Logo, pela Lei de Ampère, $\vec{B}$ é necessariamente nulo

Caminho 3: Cada espira passa duas vezes através da área delimitada, com correntes em sentidos contrários. Assim, a corrente **total** I_{inte} que passa dentro desse caminho é nula e, pela Lei de Ampère, $\vec{B}$ é necessariamente nulo também.

Caminho 2: neste caso considere uma circunferência de raio r . por simetria, vemos que $\vec{B}$ é tangente a circunferência. Logo, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ será igual a $2\pi rB$. Cada espira passa uma vez pelo percurso 2.

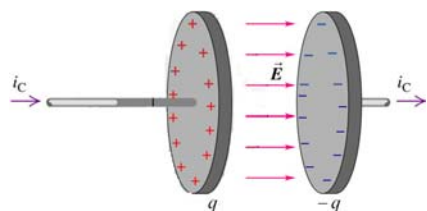
A corrente total será $I_{\text{inte}} = NI$, onde N é o número total de espiras no enrolamento e a corrente é positiva para o percurso de integração indicado. Assim, pela Lei de Ampère, $2\pi r B = \mu_0 NI$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$



Corrente de Deslocamento

A lei de Ampère na forma que vimos é incompleta e precisa de uma modificação.



Vamos considerar um capacitor de placas paralelas. Uma corrente i_c chega no capacitor.

Assuma um caminho fechado que compreenda a borda de duas superfícies. Aplicando a Lei Ampère considerando a superfície plana:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

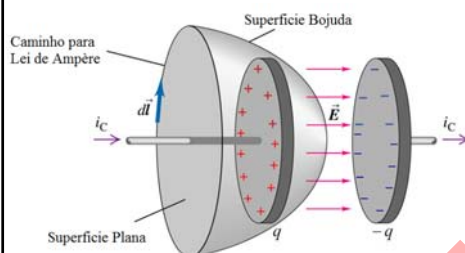
Pois nessa superfície temos uma corrente i_c transitando.

Se aplicamos a Lei de Ampère considerando a superfície bojudá:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

Pois dentro de um capacitor não temos corrente transitando.

E agora???



Corrente de Deslocamento

James Clerk Maxwell utilizou sua genialidade para resolver esse problema!

Dentro do capacitor temos um campo E e um fluxo elétrico Φ_E variando com o tempo.

A taxa dessa variação depende da carga nas placas e assim, da corrente i_c

A carga instantânea é $q = C v$, sendo C a capacitância e v a tensão entre as placas

Para um capacitor de placas paralelas, $C = \epsilon_0 A / d$, sendo A a área das placas, d a separação entre elas e ϵ_0 a permissividade do vácuo. Quando temos um dielétrico de permissividade ϵ basta usarmos este valor.

Teremos:

$$q = C v = \frac{\epsilon A}{d} (Ed) = \epsilon EA = \epsilon \Phi_E$$

Quando o capacitor está sendo carregado, a taxa de variação da carga q é a corrente $i_c = dq/dt$

$$i_c = \frac{dq}{dt} = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

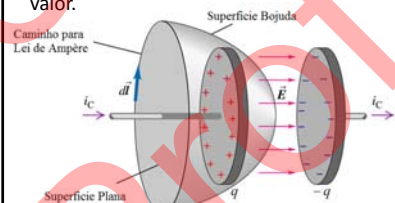
Maxwell propôs que dentro da região entre as placas, surge uma pseudocorrente i_d com a fórmula,

$$i_d = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

A esta corrente denominou **corrente de deslocamento**.

Temos também a correspondente densidade de corrente de deslocamento dada por

$$j_d = \frac{i_d}{A} = \epsilon \frac{dE}{dt}$$



James Clerk Maxwell



Conhecido(a) por

Equações de Maxwell, distribuição de Maxwell-Boltzmann, demônio de Maxwell

Nascimento

13 de junho de 1831

Edimburgo, Escócia

Morte

5 de novembro de 1879 (48 anos)

Cambridge, Inglaterra

Nacionalidade

Britânico

Alma mater

Universidade de Edimburgo, Universidade de Cambridge

Prêmios

Prêmio Smith (1854), Prêmio Adams (1857), Medalha Rumford (1860)

Assinatura

James Clerk Maxwell sig.svg

Orientador(es)

William Hopkins

Orientado(s)

Horace Lamb, George Chrystal

Instituições

Marischal College, King's College de Londres, Universidade de Cambridge

Campos(s)

Matemática, física

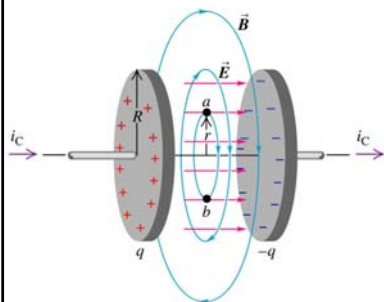
Tese

1854.

Corrente de Deslocamento

Mas... Essa pseudocorrente existe mesmo ou é somente um artifício?

Bem, se a corrente existe, devemos ter um campo magnético dentro do capacitor, gerado por ela.



A corrente dentro do capacitor é distribuída por toda a área e é igual a j_d vezes esta área: $(i_d/\pi R^2)\pi r^2$.

A integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ da Lei de Ampère é igual a B vezes o comprimento da circunferência, $2\pi r$, e como $i_d = i_c$ durante a carga do capacitor:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} i_c$$

Ou seja,

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} i_c$$

Experimentalmente se comprova que existe um campo magnético dentro de um capacitor!

Note que essa conclusão é válida mesmo quando tem-se espaço vazio dentro do capacitor. Essa é uma das provas da existência das ondas eletromagnéticas.

A lei de Ampère completa assume a forma:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i_c + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{\text{encl}}$$

$$\text{ou} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$