Lista 3 – Mecânica Quântica

1. a) Mostre que $\left[\mathbb{R}, \frac{\mathbb{P}^2}{\mathbf{2}m}\right] = \frac{i\hbar}{m}\mathbb{P}$

   b) Calcule comutador $[\mathbb{P}, \mathbb{H}]$

2. Considere uma partícula em um potencial constante $V(X) = -fX$, onde f é uma constante positiva.
   a) Escreva as equações de Ehrenfest para os valores médios de X e P.
   b) Mostre que ΔP não depende do tempo.
   c) Escreva equação de Schrödinger na representação $\{|p\rangle\}$

3. Refaça os itens a) e b) do exercício anterior para o potencial $V(X) = -kX^2$.

4. Considere um sistema físico arbitrário. Descrito pelo Hamiltoniano $H_0(t)$ e pelo operador evolução correspondente $U_0(t, t')$:

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}U_0(t,t_0) = H_0(t)U_0(t) \\ U_0(t_0,t_0) = 1 \end{cases}$$

Agora assuma que o sistema é perturbado de forma que o seu Hamiltoniano é descrito por:

$$H(t) = H_0(t) + W(t)$$

O vetor de estado do sistema de interação $|\psi_I(t)\rangle$ é definido a partir do vetor $|\psi_S(t)\rangle$ de Schrödinger por:

$$|\psi_I(t)\rangle = U_0^\dagger(t,t_0)\,|\psi_S(t)\rangle$$

a) Mostre que a evolução de $|\psi_I(t)\rangle$ é dada por:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_I(t)\rangle = W_I(t)|\psi_I(t)\rangle$$

Onde $W_I(t) = U_0^\dagger(t,t_0)W(t)U_0(t,t_0)$.

b) A equação diferencial acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$|\psi_I(t)\rangle = |\psi_I(t_0)\rangle + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' W_I(t)|\psi_I(t')\rangle$$

Onde $|\psi_I(t_0)\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle$

Resolvendo essa equação integral por interação, mostre que o ket $|\psi_I(t)\rangle$ pode ser expandido em séries de potência de W na forma:

$$|\psi_I(t)\rangle = \left\{1 + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'^{W_I}(t') + \frac{1}{(i\hbar)^2}\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} dt''^{W_I}(t'') + \cdots\right\}|\psi_I(t_0)\rangle$$

5. Considere uma partícula livre:

   a) Mostre, utilizando o teorema de Ehrenfest, que $\langle X \rangle$ é uma função linear do tempo, o valor médio $\langle P \rangle$ permanecendo constante.

   b) Escreva as equações do movimento para os valores médios $\langle X^2 \rangle$ e $\langle XP + PX \rangle$. Integre estas equações.

   c) Mostre que, com uma escolha apropriada para a origem temporal, o desvio médio quadrático ΔX é dado por:

$$(\Delta X)^2 = \frac{1}{m^2}(\Delta P)_0^2 + (\Delta X)_0^2$$

   Onde $(\Delta X)_0^2$ e $(\Delta P)_0^2$ são os desvios médios quadráticos no tempo inicial.