Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" - ESALQ
Disciplina: LCE0120 Cálculo I
Prof. Idemauro Antonio Rodrigues de Lara

4^a lista de exercícios - Derivada e Diferencial

1. Usando a definição formal, encontre as derivadas das funções a seguir.

   a. $y = -2x + 7$ b. $x^2 - 5x + 7$ c. $y = \dfrac{2}{x}$ d. $\sqrt{3x + 1}$ e. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

2. (Flemming e Gonçalves, pág.127) Dadas as funções $f(x) = 5 - 2x$ e $g(x) = 3x^2 - 1$, determinar:

   a. $f'(1) + g'(1)$ b. $2f'(0) - g'(-2)$

   c. $f(2) - f'(-2)$ d. $[g'(0)]^2 + \frac{1}{2}g'(0) + g(0)$

   e. $f(\frac{5}{2}) - \frac{f'(5/2)}{g'(5/2)}$

   Resp.: a. 4 b.8 c. 3 d.-1 e. 2/15

3. Sabendo-se que as funções f e g são diferenciáveis no ponto $x = 1$ e que $f(1) = 1$, $g(1) = 1/2$, $f'(1) = 2$, $g'(1) = -3$. Calcule:

   a. $(f + g)'(1)$ b. $(f.g)'(1)$ c. $(f/g)'(1)$ d. $(f^2g)'(1)$

   Resp.: a. -1 b.-2 c. 16 d.-1

4. Encontre as equações das retas tangente e normal ao gráfico de cada uma das funções a seguir nos pontos indicados.

   a. $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto $P(-2, 9)$.

   b. $y = x^3 - 4x^2 - 1$ no ponto $P(4, -1)$.

   c. $y = \dfrac{3}{4x - 2}$ no ponto $P(4, 3/14)$.

   d. $y = \text{sen}^2 3x$ no ponto $P(\frac{\pi}{12}, \frac{1}{2})$.

   e. $y = (x^2 - 1)^4$ no ponto $P(2, 81)$.

5. (Gomes e Nogueira, pág.91) Dada a função $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x$, achar a equação da reta tangente à curva dessa função no ponto $x = 0$. Determinar, a seguir, o ângulo de inclinação. (Resp: $y = 2x$, $\alpha = 63^o 26' 5''$)

6. Um objeto está se movendo de tal maneira que ao final de t segundos, sua distância, em cm, do seu ponto de partida é dada pela função: $d(t) = 2t^2 + 3t + 5$, $t \geq 0$. Determine:

   a. A velocidade média do objeto entre $t = 1$ e $t = 5$;

   b. A velocidade instantânea no tempo $t = 1$.

   Resp.: a. 15 cm/seg b. 7 cm/seg

7. A função $S(t) = S_0 + V_0 t + \dfrac{at^2}{2}$ é bem conhecida na Física e está associada ao movimento uniformemente acelerado de um corpo. Usando o conceito de derivada encontre a função horária da velocidade e a aceleração correspondente.

8. A reta tangente ao gráfico da função $y = ax^2+bx+9$ no ponto P(2,-1) é perpendicular à reta $y = \frac{1}{11}x - 5$. Encontre os valores de a e b. ($a = -3$; $b = 1$)

9. A produção y, em ton/ha de uma cultura, em função da quantidade de nutriente x adicionada ao solo é dada pela função:

$$y = -\frac{1}{25000}x^2 + \frac{3}{250}x + 1, \qquad 0 \leq x \leq 100.$$

Determine:

a. a taxa de variação média entre $x = 20$ e $x = 80$;

b. a taxa de variação instantânea em $x = 20$.

10. Mostre que os gráficos da funções $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = 2x^3 + 1$ são tangentes no mesmo ponto $P(1, 3)$. Esboce os gráficos.

11. (Flemming e Gonçalves, pág.163) Dada a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ definida para $x \in [3, +\infty)$, desenvolver os seguintes itens:

a. Determinar a função inversa $g(x) = f^{-1}(x)$ e identificar seu dominío;

b. Encontrar a equação da reta tangente à curva de $f(x)$ no ponto com $x = 5$;

c. Encontrar a equação da reta tangente à curva de $g(x)$ no ponto com $x = 0$;

d. Representar graficamente e identificar a relação estabelecida com o Teorema da derivada da função inversa.

12. Estude a diferenciabilidade das funções a seguir nos pontos indicados. Justifique sua resposta.

a.

$$f(x) = \mid x - 2 \mid + 1; \qquad x = 2$$

b.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x < 3; \\ 10 - x, & \text{se } x \geq 3. \end{cases} \qquad x = 3$$

c.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x < 2; \\ 9 - x^2, & \text{se } x \geq 2. \end{cases} \qquad x = 2.$$

d.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \leq -4; \\ -(x + 6), & \text{se } x > -4. \end{cases} \qquad x = -4$$

13. Considere $f(x)$ uma função diferenciável em x. Nessas condições mostre que se $f(x)$ é par então $f'(x)$ é ímpar.

14. Encontre a derivada das funções a seguir.

1. $y = -\dfrac{5}{3}x + 7$ Resp.: $y' = -\frac{5}{3}$
2. $y = x^5 + 2x^3 - x + 4$ Resp.: $y' = 5x^4 + 6x^2 - 1$
3. $y = (x+4)^3$ Resp.: $y' = 3(x+4)^2$
4. $y = x^2\sqrt[3]{x^2}$ Resp.: $y' = \frac{8}{3}\sqrt[3]{x^5}$
5. $y = (x^2 + 3x)(x^3 - 9x)$ Resp.: $y' = 5x^4 + 12x^3 - 27x^2 - 54x$
6. $y = \dfrac{2x+3}{x^2 - 5x + 5}$ Resp.: $y' = -\dfrac{2x^2 + 6x - 25}{(x^2 - 5x + 5)^2}$
7. $y = \log_2(x+2)$ Resp.: $y' = \dfrac{1}{(x+2)\ln 2}$
8. $y = e^{(x^2+5)}$ Resp.: $y' = 2xe^{x^2+5}$
9. $y = \sqrt{x^{14} + x^2 + \sqrt{3}}$ Resp.: $y' = \dfrac{14x^3 + 2x}{2\sqrt{x^{14} + x^2 + \sqrt{3}}}$
10. $y = \sqrt{\cos(2x)}$ Resp.: $y' = -\dfrac{\text{sen}(2x)}{\sqrt{\cos(2x)}}$
11. $y = \ln(x^4)$ Resp.: $y' = \frac{4}{x}$
12. $y = x\cos x$ Resp.: $y' = \cos x - x\text{sen}x$
13. $f(t) = \sqrt{\dfrac{2t+1}{t-1}}$ Resp.: $f'(t) = -\dfrac{3}{2(t-1)^{3/2}(2t+1)^{1/2}}$
14. $y = \text{arc sen}(1/x)$ Resp.: $y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$
15. $f(s) = 2^{3s^2+6s}$ Resp.: $f'(s) = 6\ln 2(s+1)2^{3s^2+6s}$
16. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ Resp.: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
17. $y = \text{sen}(\text{sen}(x))$ Resp.: $y' = \cos x\cos(\text{sen}x)$
18. $f(x) = (2x-5)^4 + \dfrac{1}{x+1} - \sqrt{x}$ Resp.: $f'(x) = 8(2x-5)^3 - \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

19. $y = \arctan(x/a)$ Resp.: $y' = \dfrac{a}{a^2 + x^2}$

20. $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ Resp.: $y' = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

21. $y = \arccos\sqrt{x}$ Resp.: $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$

22. $y = e^{-x}\cos 2x$ Resp.: $y' = -e^{-x}(2\text{sen}(2x) + \cos 2x)$

23. $y = \lg_{10}(x^4 + 3x^2 + 1)$ Resp.: $y' = \dfrac{4x^3 + 6x}{(x^4 + 3x^2 + 1)\ln 10}$

24. $y = \ln\tan(x/2)$ Resp.: $y' = \text{cossec}x$

25. $y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ Resp.: $y' = \dfrac{2}{1 - x^2}$

26. $f(x) = (x\tan x)^2$ Resp.: $y' = 2x^2\sec^2 x\tan x + 2x\tan^2 x$

27. $y = \ln(\cos^2 t)$ Resp.: $y' = -2\tan t$

28. $f(t) = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\sqrt{t}}$ Resp.: $f'(t) = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\sqrt{t}}\ln(a/b)\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

29. $y = \ln(\text{sen}x)$ Resp.: $y' = \cot x$

30. $y = \tan(x^2 + 1)$ Resp.: $y' = 2x\sec^2(x^2 + 1)$

31. $f(t) = \left(\dfrac{7t + 1}{2t^2 + 3}\right)^3$ Resp.: $f'(t) = \dfrac{3(7t+1)^2(-14t^2 - 4t + 21)}{(2t^2 + 3)^4}$

32. $y = \dfrac{3\sec^2 x}{x}$ Resp.:$y' = \dfrac{6x\sec^2 x\tan x - 3\sec^2 x}{x^2}$

33. $y = \cos(\pi/2 - x)$ Resp.: $y' = \text{sen}(\pi/2 - x)$

34. $y = \sqrt{5x^3} + \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{\sqrt{x^4}}$ Resp.$y' = \dfrac{3}{2}\sqrt{5x^2} - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{6}{x^3}$

35. $y = \cot^4(2x - 3)^2$ Resp.: $y' = -16(2x - 3)\cot^3(2x - 3)^2\text{cossec}^2(2x - 3)^2$

36. $f(s) = \dfrac{3}{2}\pi$ Resp.: $f'(s) = 0$

37. $y = \dfrac{\tan x}{x}$ Resp.: $y' = \dfrac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}$

38. $f(s) = \dfrac{1}{(s^2 - s + 4)^3}$ Resp.: $f'(s) = -\dfrac{3(2s-1)}{(s^2 - s + 4)^4}$

39. $f(t) = \dfrac{1}{\cos\theta} + 2t + \theta$ Resp.: $f'(t) = 2$

40. $y = \arctan[(2x-1)^{10} + 2]^{1/2}$ Resp.: $y' = \dfrac{10(2x-1)^9}{\sqrt{[(2x-1)^{10}+2]^3}}$

15. Encontre a derivada das funções implícitas a seguir.

a. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ b. $xy - \cos y = 0$

c. $3x^2 + 5xy^2 - xy + x - 7 = 0$ d. $2x^2y + e^{x+y} + \ln x = 0$

e. $\arctan(y) + x^2 - 12xy = 0$ f. $x^3y^2 + 3\text{sen}y + \dfrac{1}{y} = 0$

16. Encontre as equações das retas tangente e normal à curva $x^2 + \dfrac{y}{2} - 1 = 0$ no ponto $P(-1, 0)$.

17. Obter a derivada de ordem n das seguintes funções.

a. $y = 3x^4 + 6x^2 - 12x;\quad n = 3$ b. $y = e^{3x^2};\quad n = 2$

c. $y = x^2 + \ln 2x;\quad n = 2$ d. $y = \cos 3x;\quad n = 4$

e. $y = \text{sen}x;\quad n = 1000$ f. $y = e^x + \cos x;\quad n = 1000$

18. Dada a função $y = 2x^2 - 4x + 9$, obter e interpretar dy quando x varia de de 2 a $2,05$.

19. Usando o conceito de diferencial encontrar $\sqrt{35}$.

20. Encontrar a diferencial de segunda ordem das funções:

a. $y = -x(x^2 + 2)$ b. $y = e^{-x}$

c. $y = (x-4)(x+3)$ d. $y = \cos^2 x$