

Mecânica Quântica — 7600022

Sexta Lista — praticar para a prova do dia 16/5/2017

1. Calcule $\langle \ell, m | L_+ L_- | \ell, m \rangle$ e $\langle \ell, m | L_- L_+ | \ell, m \rangle$. Aqui e no restante desta lista, ℓ é um inteiro não negativo qualquer e m é outro inteiro que satisfaz à desigualdade $m \leq |\ell|$.
 - (a) A partir das expressões para $L_+ | \ell, m \rangle$ e $L_- | \ell, m \rangle$
 - (b) A partir das igualdades que relacionam L^2 , L_z^2 e L_z com $L_+ L_-$ e com $L_- L_+$.
2. Calcule
 - (a) $\langle \ell, m | L_z^2 | \ell, m \rangle$
 - (b) $\langle \ell, m | L_x^2 | \ell, m \rangle$ (expresse L_x como combinação linear de L_+ e L_-).
 - (c) $\langle \ell, m | L_y^2 | \ell, m \rangle$ (expresse L_y como combinação linear de L_+ e L_-).
3. Calcule
 - (a) $\langle 1, 0 | L_- | 1, 1 \rangle$
 - (b) $\langle 1, -1 | L_- | 1, 1 \rangle$
 - (c) $\langle 2, 0 | L_- | 1, 1 \rangle$
 - (d) $\langle 2, 0 | L_- | 2, 1 \rangle$
 - (e) $\langle 2, 0 | L_x | 2, 1 \rangle$
4. Calcule
 - (a) $\langle \ell, \ell | L_x^2 | \ell, \ell \rangle$
 - (b) $\langle \ell, \ell | L_y^2 | \ell, \ell \rangle$
 - (c) $\langle \ell, \ell | L_z^2 | \ell, \ell \rangle$
 - (d) $\langle \ell, \ell | L^2 | \ell, \ell \rangle$
5. Calcule
 - (a) $\langle 3, 1 | L_- L_- | 3, 3 \rangle$
 - (b) $\langle 3, 3 | L_+ L_+ | 3, 1 \rangle$
6. Calcule $\langle \ell, m | L_+ | \ell', m' \rangle$ e $\langle \ell', m' | L_- | \ell, m \rangle$ para verificar se L_+^\dagger é o conjugado Hermitiano de L_- .
7. Encontre o operador L_+ em coordenadas esféricas e em seguida escreva L_- em coordenadas esféricas.
8. Calcule $[L_+, L_z]$ em coordenadas esféricas {calcule $[L_+, L_z] \psi(r, \theta, \varphi)$ }.
9. Mostre que a função $\psi(r, \theta, \varphi) = A e^{-(r/a)^2}$, onde A e a são duas constantes, é autofunção de L_z e encontre o autovalor correspondente.
10. Encontre as constantes de normalização para as três funções abaixo:
 - (a) $Y_{00}(\theta, \varphi) = A$
 - (b) $Y_{11}(\theta, \varphi) = B \sin(\theta) e^{i\varphi}$
 - (c) $Y_{10}(\theta, \varphi) = C \cos(\theta)$
 - (d) $Y_{1-1}(\theta, \varphi) = C \sin(\theta) e^{-i\varphi}$
11. Calcule $L_- Y_{11}(\theta, \varphi)$ em coordenadas esféricas e verifique se o resultado é o que você espera do cálculo de $L_- | 1, 1 \rangle$.

12. Calcule $\langle 1, 1|1, 0\rangle$ em coordenadas esféricas. Você esperava que o resultado fosse zero? Explique por quê.
13. Os operadores L^2 e L_z comutam. Podemos afirmar que todo autovetor de L_z é auto-estado de L^2 ? Podemos afirmar que todo autovetor de L^2 é auto-estado de L_z ? Explique por quê.
14. Verifique se $|1, 0\rangle$ é auto-estado de L_x . Em caso afirmativo, encontre o auto-valor correspondente.
15. Considere uma base constituída pelos estados $|1, m\rangle$ ($m = -1, 0, 1$).
 - (a) Escreva a matriz que representa LL^2 nessa base (calcule cada um dos elementos de matriz $\langle 1, m|L^2|1, m'\rangle$ ($m, m' = -1, 0, 1$)).
 - (b) Escreva a matriz que representa L_z nessa base.
 - (c) Escreva a matriz que representa L_- nessa base.
 - (d) Calcule o comutador entre as matrizes que representam L_z e L_- nessa base. Que matriz é essa?