

<http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=666>

Sala 208, Ala 2; Segundas, 21 – 23 h; Quartas, 19 – 21 h.

Prof. Marcos Nogueira Martins

Ed. Basílio Jafet, sala 108

tel. 3091 7045 (secretária) e 3091 6933

e-mail: martins@if.usp.br

Monitor: Rafael Marcelino

Sala 317, Ala Central

e-mail: rafaelmarcelinocs@gmail.com

Livro texto: - *Física Quântica*, R. Eisberg e R. Resnick, 4ª edição, Ed. Campus Ltda., RJ, Brasil, 1986. - *Física Moderna, origens clássicas e fundamentos quânticos*, F. Caruso e V. Oguri, Ed. Campus, RJ, 2006.

- *Física Moderna*, P. A. Tipler e R. A. Llewellyn, 3ª edição, LTC editora, RJ, Brasil, 2001.

- *Introduction to the structure of matter, a course in modern physics*, J.J. Brehm e W.J. Mullin, John Wiley and Sons, USA, 1989.

Textos adicionais: - *The picture book of quantum mechanics*, S. Brandt and H.D. Dahmen, Wiley, New York, USA, 1985.

Podem também ser consultados, como leitura preliminar, os capítulos sobre física moderna de vários textos de física básica (por exemplo, *Física*, de P. A. Tipler (3ª edição) ou *Física*, D. Halliday, R. Resnick e K. S. Krane (4ª edição). Tenha em mente que a apresentação dos tópicos de física moderna nesses textos é feita em nível bastante introdutório.

Leituras recomendadas:

- *A matéria, uma aventura do espírito*, Luís Carlos de Menezes, Editora Livraria da Física, SP, Brasil, 2005;
- *A parte e o todo*, W. Heisenberg, Contraponto Editora Ltda, RJ, Brasil, 1996;
- *Física Moderna, para iniciados, interessados e aficionados, Vol. 1*, Ivan S. Oliveira, Editora Livraria da Física, 2005;
- *Thirty years that shook physics*, G. Gamow, Dover Publications, NY, USA, 1985;
- *Great experiments in physics: firsthand accounts from Galileo to Einstein*, M.H. Shamos, Dover Publ., NY, USA, 1987;
- *The Great Design: Particles, fields and creation*, R. K. Adair, Oxford University Press, NY, USA, 1987;
- *The force of symmetry*, Vincent Icke, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995.

Programa

- **O átomo de hidrogênio + Eq. de Schrödinger 3-D (recordação)**
- **Momentos de dipolo magnético; spin; a experiência de Stern-Gerlach**
- **Átomos multieletrônicos**
 - Indistinguibilidade e o princípio de Pauli.
 - A teoria de Hartree.
 - Estados fundamentais e a tabela periódica.
- **Estatística quântica**
 - Indistinguibilidade e estatística quântica
 - Funções de distribuição quânticas
 - Exemplos: laser, gás de elétrons livres
- **Moléculas**
 - Ligações iônicas e covalentes
 - Espectros moleculares (rotação, vibração e eletrônicos)
- **Sólidos**
 - Tipos de sólidos
 - Propriedades elétricas
 - Semicondutores; a junção p-n
- **O núcleo atômico**
 - Características e propriedades gerais
 - Reações nucleares
- **Um pouco de astrofísica e cosmologia**

Avaliação

Critério: Média aritmética das notas em 3 provas (60 %) e uma prova final com toda matéria (40 %).

$$M = 0,6\langle P \rangle + 0,4PF \geq 5 \Rightarrow \text{aprovação}$$

Datas das provas:

P1: 10/09 - segunda feira (10 aulas)

P2: 15/10 - segunda feira (9 aulas)

P3: 26/11 - segunda feira (11 aulas)

PF: 03/12 - segunda feira

Presença: a presença será monitorada nas provas. Assim, a ausência em mais de uma prova implica em reprovação por faltas.

Sub: a PF substitui uma eventual ausência em uma das provas (P1–P3) anteriores. **Não há prova substitutiva para a PF.**

A eq. de Schrödinger em 3D:
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(\vec{r})\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$E_T = E_{Pot} + \frac{p^2}{2m}$$

Independente do tempo:
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\vec{r})\psi = E\psi$$

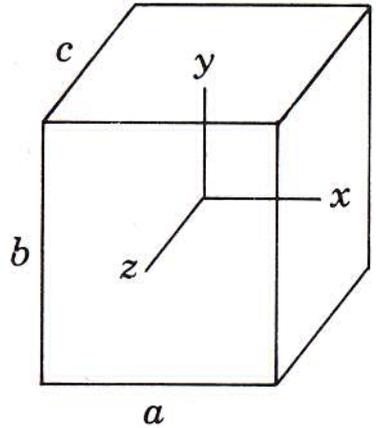
O poço quadrado em 3D

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0, \text{ se: } -a/2 < x < a/2; -b/2 < y < b/2; -c/2 < z < c/2 \\ \infty \text{ no resto do espaço} \end{cases} \quad \text{--- 222}$$

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = \psi_{n_1}(x)\psi_{n_2}(y)\psi_{n_3}(z) \quad \begin{array}{l} \text{--- 212} \\ \text{--- 122} \\ \text{--- 221} \end{array}$$

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \begin{Bmatrix} \cos \\ \text{sen} \end{Bmatrix} \left(\frac{n_1 \pi x}{a} \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{b}} \begin{Bmatrix} \cos \\ \text{sen} \end{Bmatrix} \left(\frac{n_2 \pi y}{b} \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{c}} \begin{Bmatrix} \cos \\ \text{sen} \end{Bmatrix} \left(\frac{n_3 \pi z}{c} \right) \quad \begin{array}{l} \text{--- 112} \\ \text{--- 211} \\ \text{--- 121} \end{array}$$

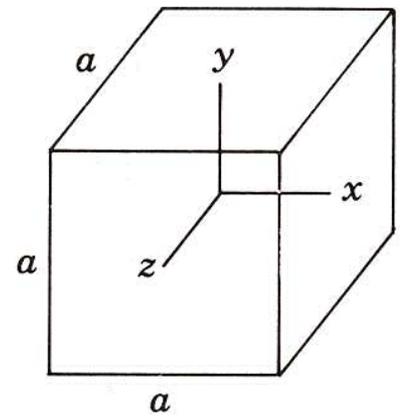
$$E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left[\left(\frac{n_1}{a} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{b} \right)^2 + \left(\frac{n_3}{c} \right)^2 \right] \quad \text{--- 111}$$



No caso em que todas as arestas são iguais:

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

Degenerescência: diferentes estados apresentam a mesma energia

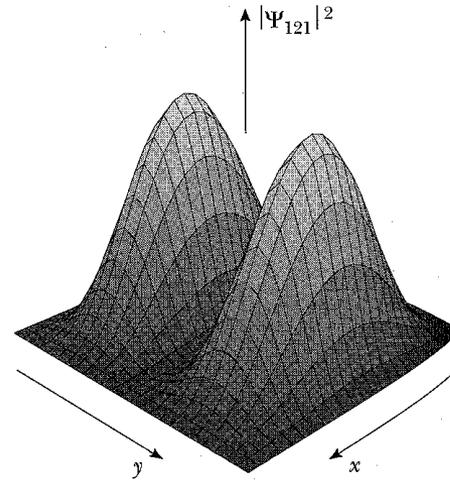
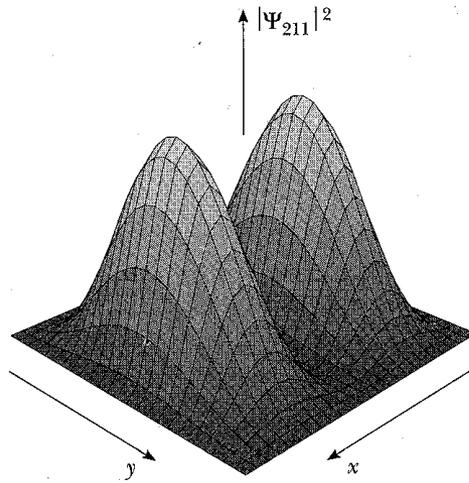
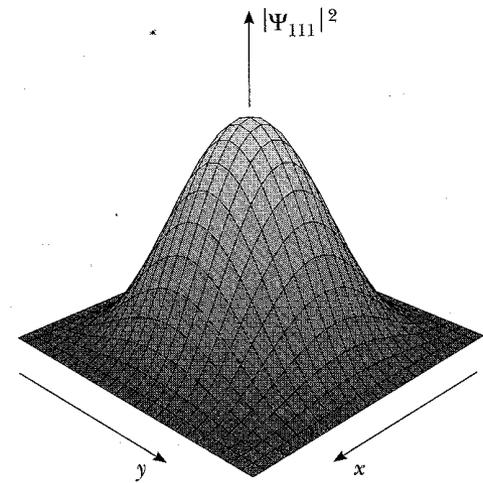


———— 222

———— 221, 212, 122

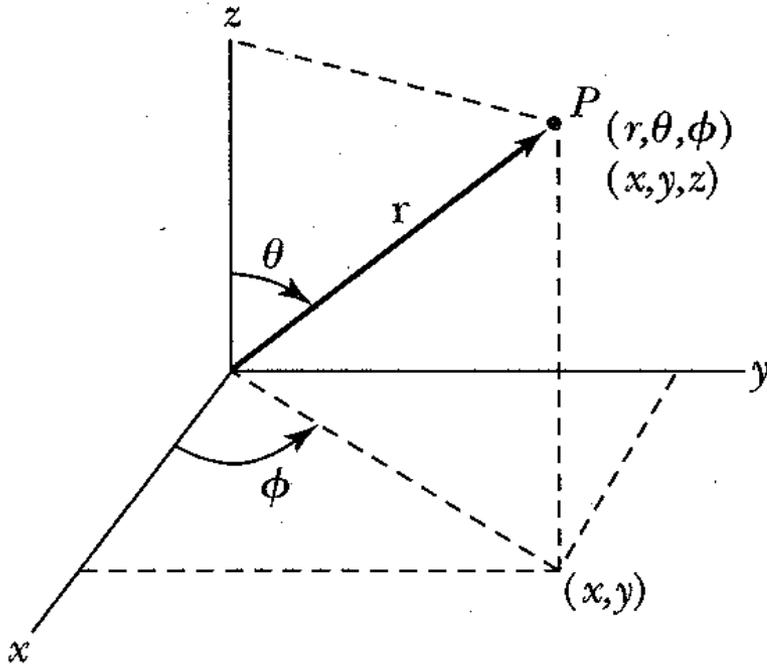
———— 211, 121, 112

———— 111



Coordenadas esféricas: $\psi \equiv \psi(r, \theta, \phi)$ e

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$



$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{r} \quad (\text{Ângulo polar})$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (\text{Ângulo azimutal})$$

Separação de variáveis

Solução do tipo: $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$

$$\frac{1}{R} \left[\frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} (E - V(r)) R \right] = -\frac{\Lambda^2 Y}{Y}$$

O lado esquerdo só depende de r , enquanto que o direito só depende de θ e ϕ .

Essa igualdade entre funções de variáveis diferentes só pode valer se ambas forem iguais a uma constante. Então:

$$-\Lambda^2 Y = \lambda Y \quad \text{e} \quad \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} (E - V(r)) R = \lambda R$$

Depois de algumas manipulações (Apêndice), chegamos em:

$$\Phi(\phi) = e^{im\phi}, \quad \text{com } m \text{ positivo ou negativo}$$

As soluções aceitáveis para θ são identificadas como $\Theta_{\ell m}(\theta)$ para enfatizar o fato de que as funções variam com ℓ e m . Combinando as soluções para θ e ϕ , temos: $Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \Theta_{\ell m}(\theta) e^{im\phi}$

Essas funções são chamadas de harmônicos esféricos e têm suas propriedades caracterizadas pelas seguintes equações de autovalor:

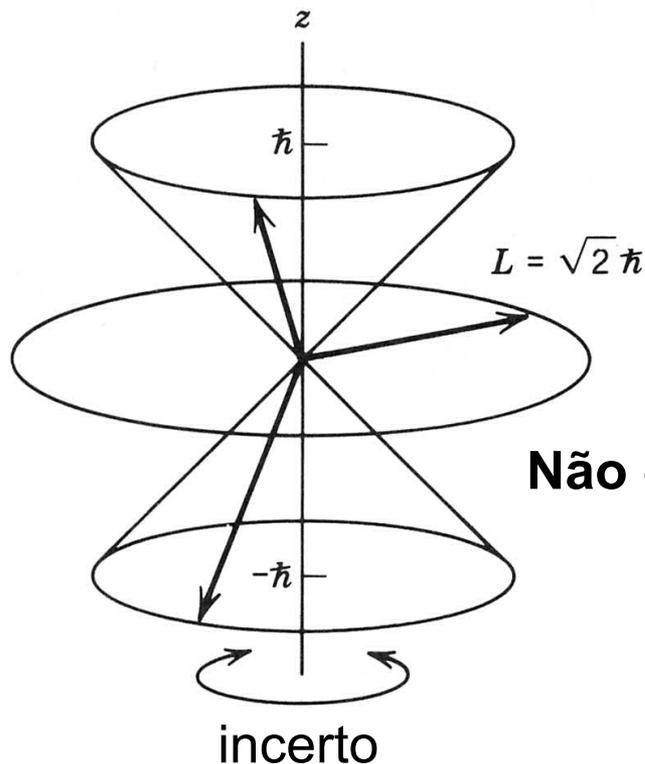
$$-\Lambda^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell + 1) Y_{\ell m} \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{\ell m} = m Y_{\ell m}$$

Os harmônicos esféricos são simultaneamente autofunções dos operadores L^2 e L_z . Assim os estados estacionários, associados a um potencial central, apresentam autofunções de L^2 e L_z tais que:

1. os autovalores de L^2 são iguais a $\hbar^2 \ell(\ell + 1)$, sendo ℓ um inteiro não negativo
2. os autovalores de L_z são iguais a $\hbar m$, sendo m um inteiro tal que: $-\ell \leq m \leq \ell$

Isso mostra que os valores possíveis de L^2 e de L_z são discretos, evidenciando a quantização do momento angular. Mostra também que essas grandezas podem ser determinadas com incerteza 0.



Apenas uma das observáveis L_x , L_y ou L_z pode ser determinada com incerteza nula e a escolhida foi L_z . A figura abaixo mostra os valores do momento angular para o caso $\ell = 1$.

Não confundir com precessão!

Paridade

Operação de inversão de coordenadas. No caso de coordenadas esféricas:

$$r \rightarrow r; \theta \rightarrow \pi - \theta; \text{ e } \phi \rightarrow \pi + \phi.$$

A paridade dos harmônicos esféricos é dada por:

$$\begin{aligned} Y_{\ell m}(\pi - \theta, \pi + \phi) &= \Theta_{\ell m}(\pi - \theta) e^{im(\pi + \phi)} \\ &= (-1)^{\ell+m} \Theta_{\ell m}(\theta) (-1)^m e^{im\phi} = (-1)^\ell Y_{\ell m}(\theta, \phi) \end{aligned}$$

Dessa forma, vemos que os estados estacionários, além das propriedades associadas ao momento angular, têm paridade bem definida, que é determinada apenas por ℓ : estados com ℓ par, têm paridade par e com ℓ ímpar, paridade ímpar.

Quantização da energia

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2}(rR) + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \ell(\ell + 1) \right] (rR) = E(rR).$$

análoga à eq. de Schrödinger em 1D. Definimos um potencial efetivo:

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \ell(\ell + 1)$$

A dependência explícita de V_{eff} com ℓ é importante, pois mostra que a forma da eq. diferencial muda com a escolha de ℓ .

Assim, as soluções estacionárias devem apresentar a seguinte estrutura:

$$\Psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi, t) = R_{n\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi)e^{-iE_{n\ell}t/\hbar}.$$

O problema 3D requer, como esperado, o aparecimento de 3 números quânticos. Como vimos, ℓ e m estão associados à parte angular da função de onda e para cada valor de $E_{n\ell}$ existem $2\ell + 1$ funções de onda diferentes, uma para cada possível valor de m . Dessa forma, a degenerescência do nível n , será: $d_n = n^2$.

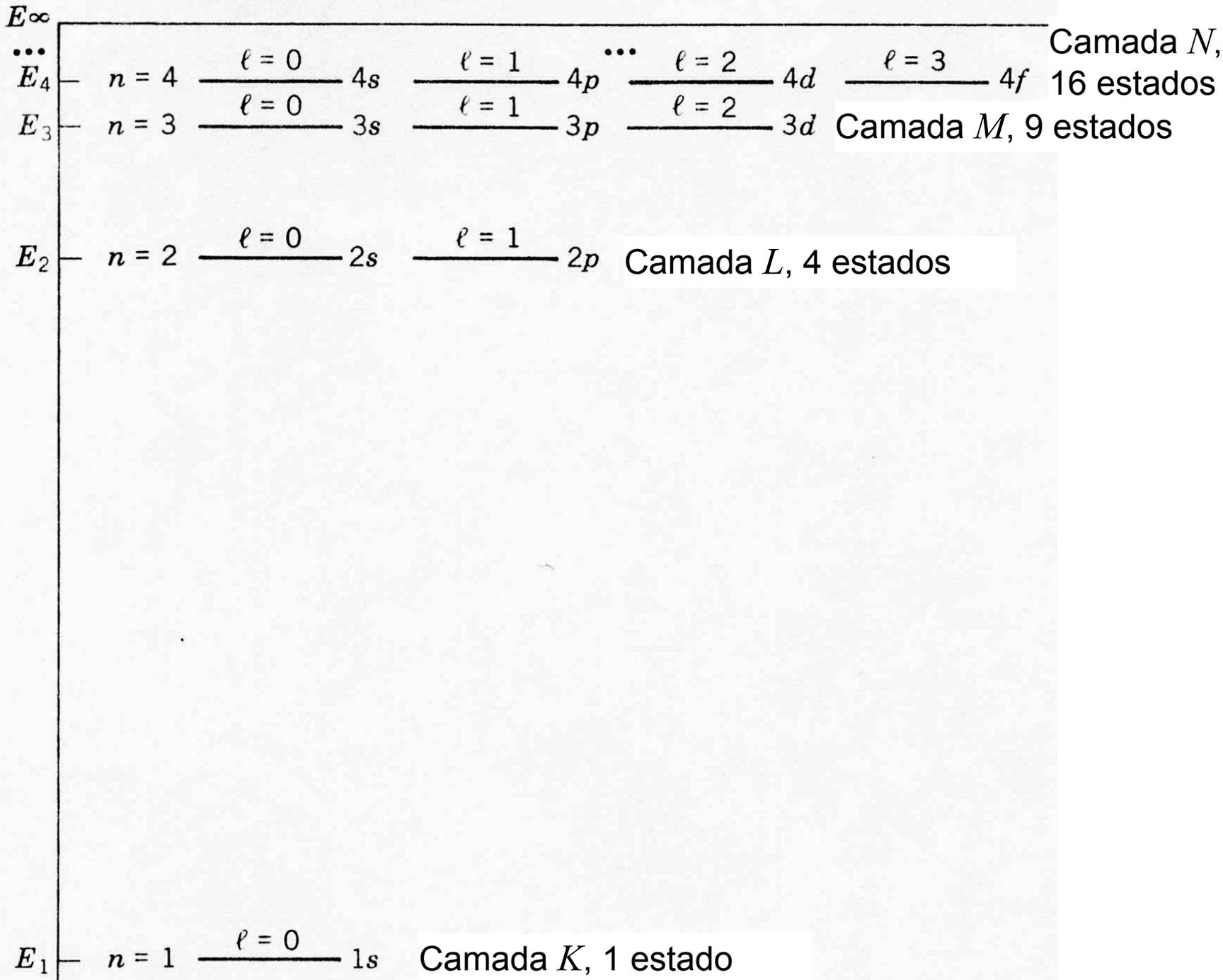
Resultados para alguns valores esperados:

$$\langle r \rangle = an^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\ell(\ell + 1)}{n^2} \right] \right\},$$

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{an^2},$$

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{2}{a^2 n^3 (2\ell + 1)},$$

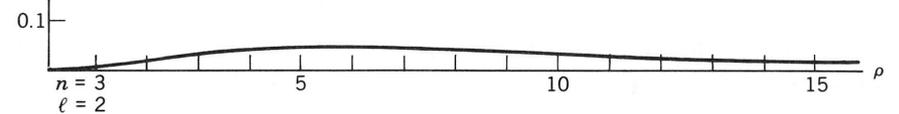
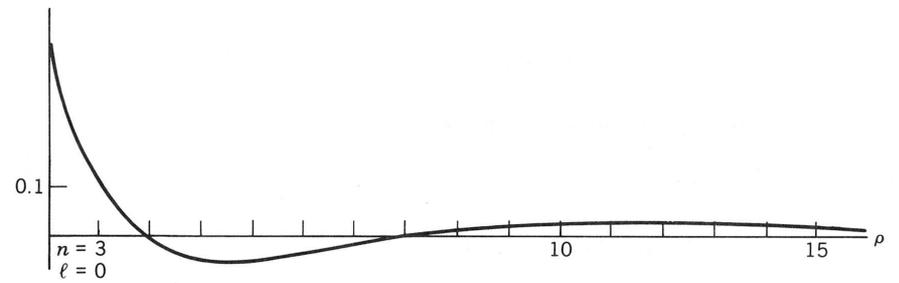
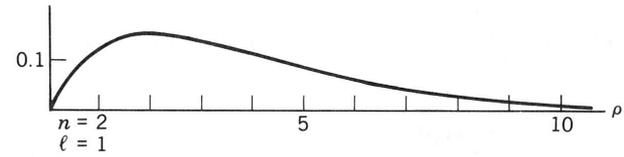
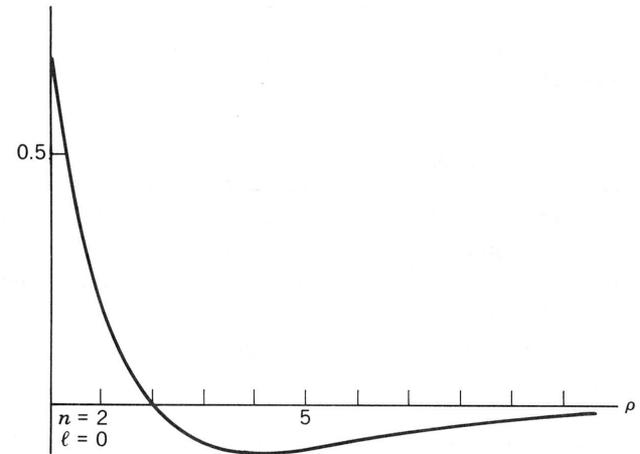
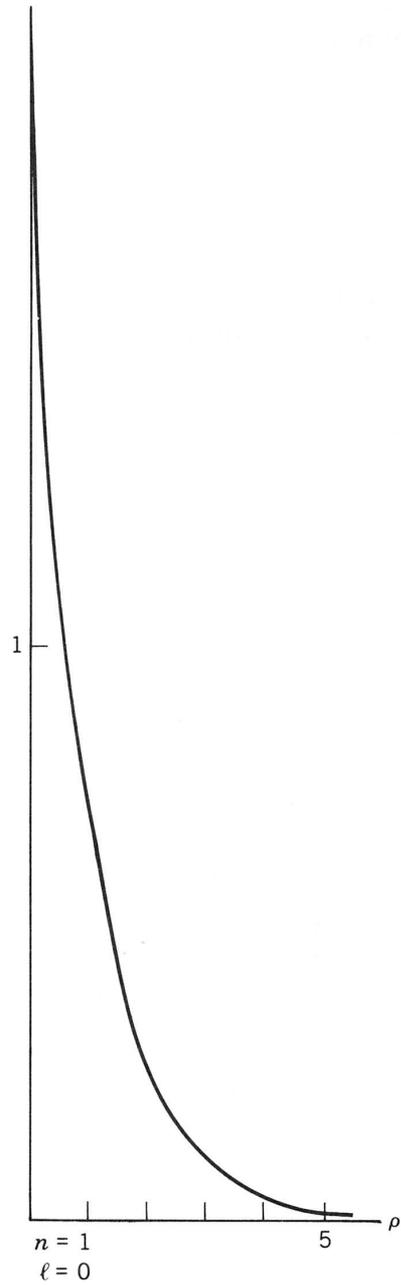
$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{2}{a^3 n^3 \ell(\ell + 1)(2\ell + 1)}.$$



Funções de onda radiais

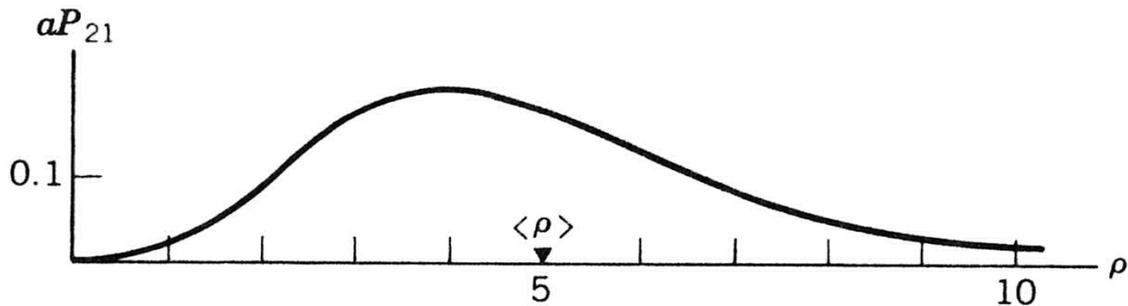
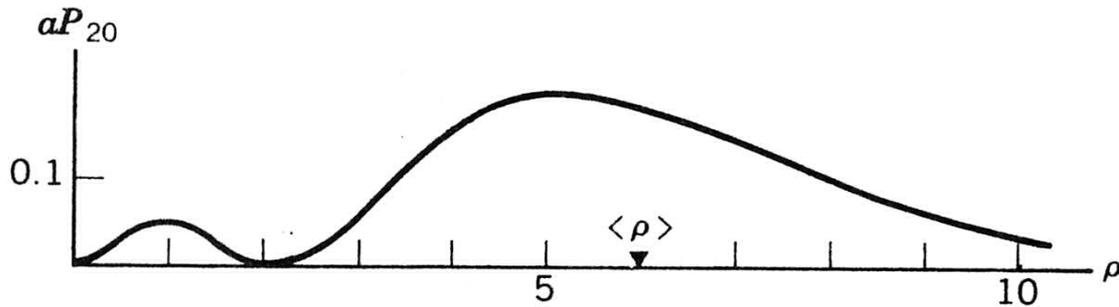
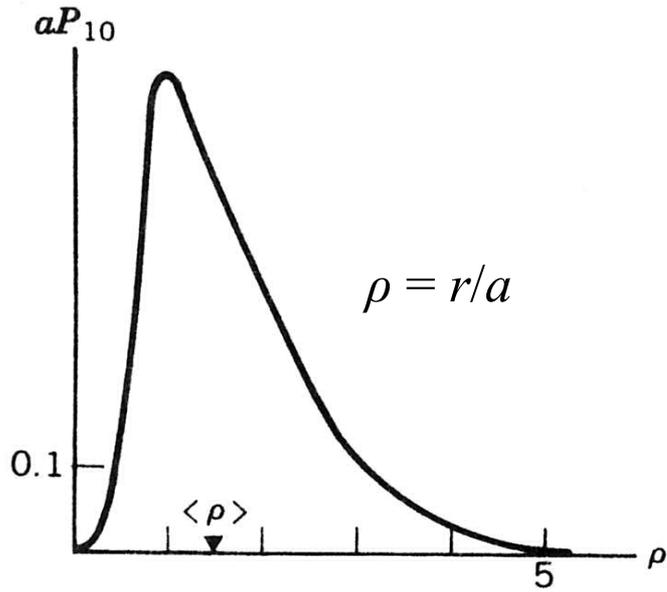
$n = 1$	$\ell = 0$	$R_{10} = \frac{2}{\sqrt{a^3}} e^{-\rho}$
$n = 2$	$\ell = 0$	$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2a^3}} \left(1 - \frac{\rho}{2} \right) e^{-\rho/2}$
	$\ell = 1$	$R_{21} = \frac{1}{2\sqrt{6a^3}} \rho e^{-\rho/2}$
$n = 3$	$\ell = 0$	$R_{30} = \frac{2}{3\sqrt{3a^3}} \left(1 - \frac{2}{3}\rho + \frac{2}{27}\rho^2 \right) e^{-\rho/3}$
	$\ell = 1$	$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6a^3}} \rho \left(1 - \frac{\rho}{6} \right) e^{-\rho/3}$
	$\ell = 2$	$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30a^3}} \rho^2 e^{-\rho/3}$

$$\sqrt{a^3} R_{n\ell}$$



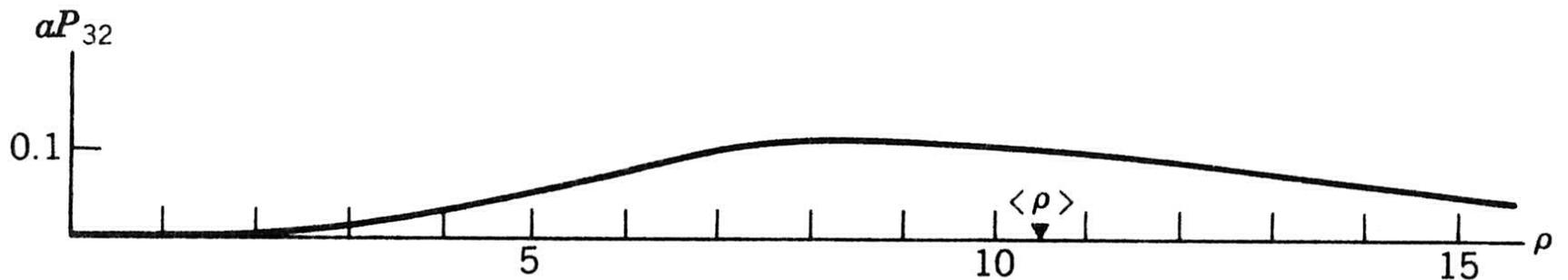
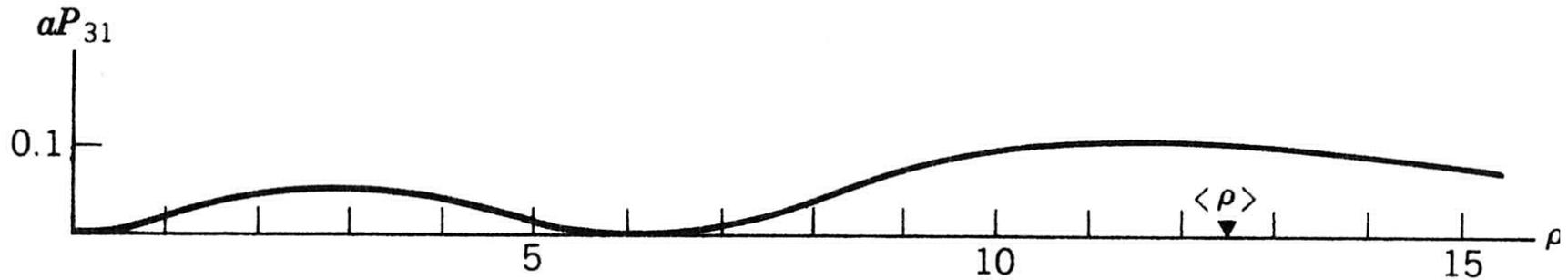
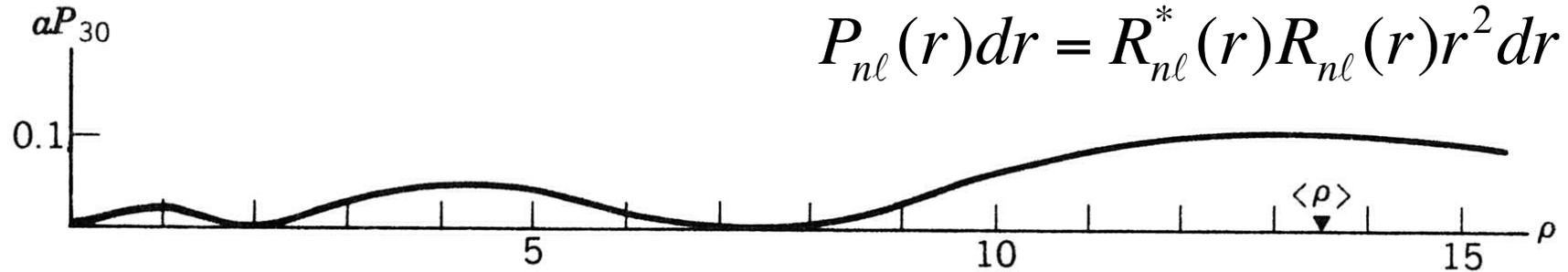
Densidade de probabilidade

$$P_{nl}(r)dr = R_{nl}^*(r)R_{nl}(r)r^2 dr$$



Densidade de probabilidade

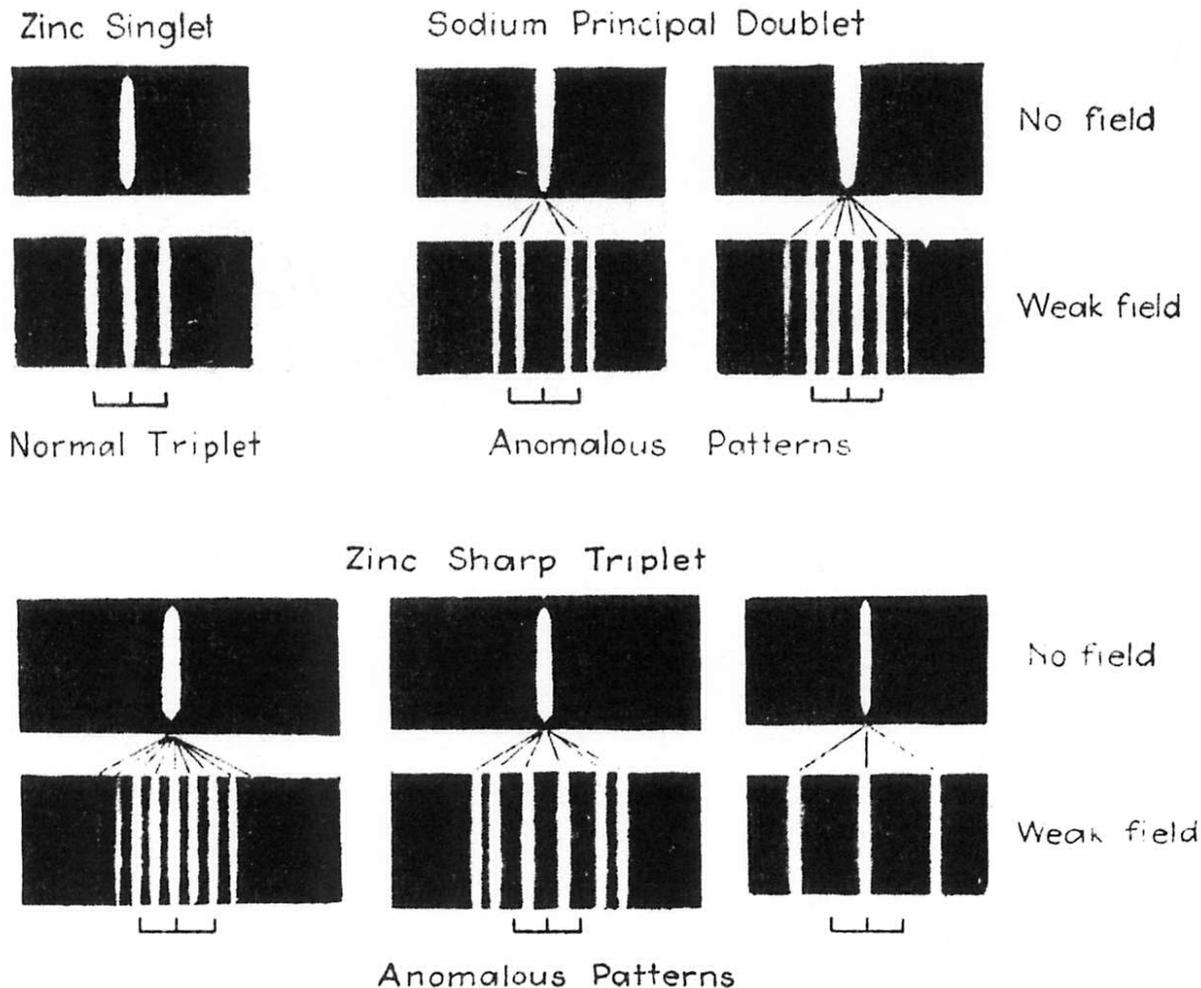
$$P_{nl}(r)dr = R_{nl}^*(r)R_{nl}(r)r^2 dr$$



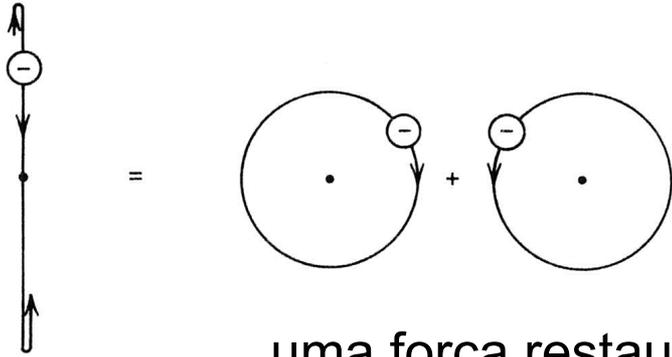
Problemas anteriores: Efeito Zeeman

1896 → Pieter Zeeman:

emissão de fótons sob $B \Rightarrow$ alargamento das linhas



Lorentz: explicação clássica → oscilação das cargas modificada pelo campo \mathbf{B} (que define uma direção privilegiada no espaço).

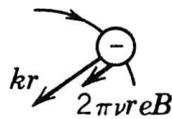
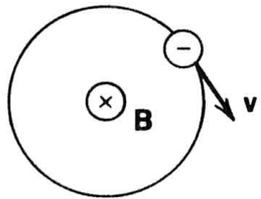


Uma oscilação linear de frequência ν_0 pode ser decomposta em 2 movimentos circulares, em fase, com velocidade angular $2\pi\nu_0$.

A oscilação do elétron pode ser associada a

uma força restauradora $-kr$, sendo k dado por: $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_e}}$

O campo \mathbf{B} sujeita o elétron a uma força adicional (Lorentz), dada por: $-e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ que age em direções opostas nos 2 movimentos circulares (horário e anti-h.), alterando suas velocidades angulares. A nova velocidade orbital é dada por:



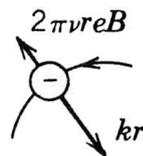
$$v = 2\pi r \nu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{força centrípeta dada por: } \frac{m_e v^2}{r} = 4\pi^2 \nu^2 r m_e$$

horário → $4\pi^2 \nu^2 r m_e = 2\pi \nu r e B + kr$

$$4\pi^2 \nu^2 r m_e = -2\pi \nu r e B + kr$$

Eliminando k , ficamos com:



anti-horário

$$\nu^2 - \frac{eB}{2\pi m_e} \nu - \nu_0^2 = 0 \quad (\text{horário})$$

$$\nu^2 + \frac{eB}{2\pi m_e} \nu - \nu_0^2 = 0 \quad (\text{anti-horário})$$

A variação na frequência é pequena em relação a ν_0 , pois a força de Lorentz corresponde a uma pequena perturbação na força centrípeta. Assim, podemos aproximar a solução por:

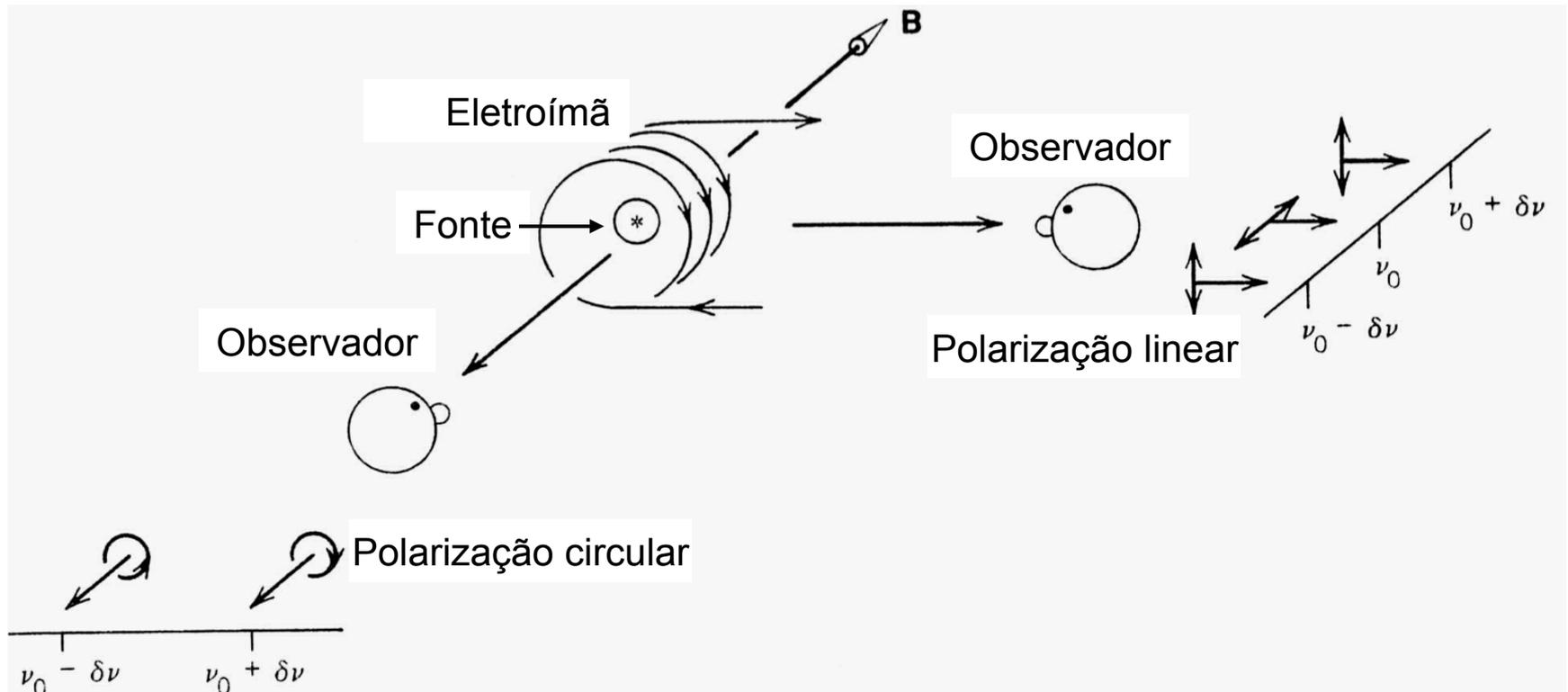
$$\left. \begin{array}{l} \nu = \nu_0 + \frac{eB}{4\pi m_e} \quad \text{para o caso horário} \\ \nu = \nu_0 - \frac{eB}{4\pi m_e} \quad \text{para o caso anti-horário} \end{array} \right\} \Rightarrow \nu = \nu_0 \pm \delta\nu, \text{ com } \delta\nu = \frac{eB}{4\pi m_e}$$

Os 2 movimentos do elétron devem, então, gerar radiação eletromagnética nessas 2 frequências alteradas. Se observamos a fonte na direção de \mathbf{B} , devemos ter radiação circularmente polarizada no sentido horário com frequência $\nu = \nu_0 + \delta\nu$ e no sentido anti-horário com frequência $\nu = \nu_0 - \delta\nu$.

Esse resultado concorda com as observações de Zeeman. Além disso, indica que a carga oscilante é negativa.

Se observamos a fonte em uma direção \perp a \mathbf{B} , a radiação com frequência alterada tem polarização linear no plano de oscilação.

As cargas podem também oscilar num plano $//$ a \mathbf{B} , mas, nesse caso, a frequência emitida é ν_0 , pois não há força de Lorentz.



A presença da razão e/m na variação de frequência: $\delta\nu = \frac{eB}{4\pi m_e}$

foi percebida na época dos experimentos de Thomson, pois era possível determinar a variação de frequência para um campo B conhecido e, com isso, determinar a razão e/m para a carga atômica responsável pela emissão de radiação. Os resultados obtidos concordavam com os de Thomson, dando apoio à idéia de que o elétron era um constituinte universal dos átomos.

(Parênteses dimensional)

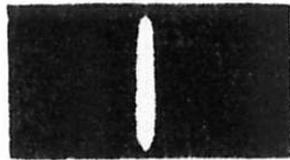
Supondo um campo magnético de 1 T:

$$\delta\nu = \frac{eB}{4\pi m_e} \Rightarrow \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ T})}{4\pi(9,1 \times 10^{-31} \text{ kg})} = 1,4 \times 10^{10} \text{ Hz ?}$$

$$\text{Faraday} \Rightarrow \varepsilon = \frac{d\phi_B}{dt} \Rightarrow V = \frac{\text{T} \times \text{m}^2}{\text{s}} \quad \therefore \frac{\text{C} \times \text{T}}{\text{kg}} = \frac{\text{C} \times \text{V} \times \text{s}}{\text{kg} \times \text{m}^2} = \frac{\text{J} \times \text{s}}{\text{kg} \times \text{m}^2} = \text{s}^{-1}$$

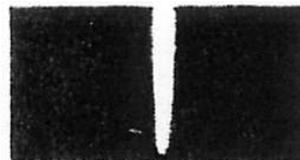
Efeito Zeeman

Zinc Singlet

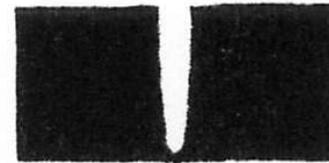


Normal Triplet

Sodium Principal Doublet



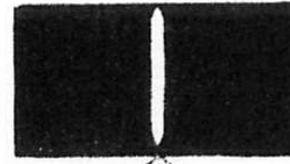
Anomalous Patterns



No field

Weak field

Zinc Sharp Triplet



No field

Weak field

Anomalous Patterns

Apêndice

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \psi + \Lambda^2 \psi \right) + V(r) \psi = E \psi.$$

$$\frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = E$$

Separação de variáveis

Vamos procurar uma solução do tipo: $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$

Pois assim podemos rearranjar a eq. como:

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \psi + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} (E - V(r)) \psi = -\Lambda^2 \psi$$

e, portanto, como o potencial só depende de r :

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} Y + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} (E - V(r)) R Y = -R \Lambda^2 Y$$

separando as dependências angulares e em r . Dividindo por \mathbf{RY} :

$$\frac{1}{R} \left[\frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} (E - V(r)) R \right] = -\frac{\Lambda^2 Y}{Y}$$

Vemos que o lado esquerdo só depende de r , enquanto que o direito só depende de θ e ϕ .

Essa igualdade entre funções de variáveis diferentes só pode valer se ambas forem iguais a uma constante. Então:

$$-\Lambda^2 Y = \lambda Y \quad \text{e} \quad \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} (E - V(r)) R = \lambda R$$

A nossa hipótese inicial será válida se conseguirmos encontrar soluções para as equações acima, que são ligadas pela constante λ .

Vamos tratar inicialmente da parte angular. Lembrando do operador Λ^2 :

$$\Lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

Podemos multiplicar por $\sin^2 \theta$ e reorganizar:

$$-\frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \lambda \sin^2 \theta Y.$$

E aí podemos fazer a segunda separação de variáveis, uma vez que o lado esquerdo só opera em ϕ e o direito só em θ . Propomos então uma forma:

$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$, que, substituída na eq. acima e dividida por $\Theta\Phi$, leva a:

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \frac{1}{\Theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \lambda \sin^2 \theta \Theta \right) = m^2.$$

Assim, $\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0$

E dividindo o termo em θ por $\sin^2\theta$: $\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) \Theta = 0$

A eq. em ϕ é bem conhecida e tem soluções oscilatórias da forma:

$\Phi(\phi) = e^{im\phi}$, com m positivo ou negativo

Aí aparece uma diferença fundamental com a partícula na caixa 3D: a variável ϕ é cíclica e se repete após o intervalo $[0, 2\pi]$. Então, para garantir a unicidade da função de onda, temos que impor uma condição de periodicidade à autofunção: $\psi(\phi + 2\pi) = \psi(\phi)$ o que implica em:

$Ae^{\pm im(\phi+2\pi)} = Ae^{\pm im\phi} \Rightarrow e^{\pm 2\pi im} = 1$. Portanto: $\cos 2\pi m \pm i \sin 2\pi m = 1$

Portanto os valores de m ficam restritos, uma vez que m tem ser inteiro.

A eq. para θ é mais complicada e não vou resolvê-la aqui, vocês devem olhar o apêndice H do Eisberg, por exemplo. A variável θ varre o intervalo $[0, \pi]$ e a equação apresenta descontinuidades infinitas nos extremos, por conta dos zeros do $\sin\theta$. As únicas soluções finitas e unívocas de $\Theta(\theta)$ são aquelas para as quais a constante de separação λ é tal que: $\lambda_\ell = \ell(\ell + 1)$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$.

De tal forma que ao inteiro m junta-se um outro inteiro, ℓ , na determinação das soluções aceitáveis. Esses inteiros são ligados por uma condição que envolve o intervalo de valores aceitáveis para $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell$.

Dessa forma as soluções aceitáveis são identificadas como $\Theta_{\ell m}(\theta)$ para enfatizar o fato de que as funções variam com ℓ e m . Combinando as soluções para θ e ϕ , temos: $Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \Theta_{\ell m}(\theta) e^{im\phi}$

Essas funções são chamadas de harmônicos esféricos e têm suas propriedades caracterizadas pelas seguintes equações de autovalor:

$$-\Lambda^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell + 1) Y_{\ell m} \text{ e}$$

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{\ell m} = m Y_{\ell m}$$

São normalizados de acordo com a relação: $1 = \int_{\text{all } \Omega} |Y_{\ell m}(\theta, \phi)|^2 d\Omega$

com $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$