Eletromagnetismo I

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 1° Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 2

Na aula passada recordamos as equações de Maxwell e as condições de contorno que os campos $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{H}$ devem satisfazer na interface entre dois meios materiais distintos.

Nesta aula vamos concluir a revisão sobre o fundamento do Eletromagnetismo, recordando como os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ podem ser obtidos a partir dos potenciais escalar, $\phi(\vec{r}, t)$, e vetor, $\vec{A}(\vec{r})$. Depois vamos derivar i teorema de conservação de energia do campo eletromagnético.

O primeiro tópico é discutido na seção 10.1 do livro texto. Já o segundo tópico é visto antes, na seçã0 8.1.

Potenciais Vetores e Escalar

Recordando como o campo eletromagnético pode ser obtido de funções potenciais, vamos primeiro considerar o potencial vetor $\vec{A}$. Como o divergente de qualquer rotacional é identicamente nulo, temos que a equação para a divergência de $\vec{B}$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

fica satisfeita expressando o campo $\vec{B}$ como

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

onde $\vec{A}(\vec{r}, t)$ é o potencial vetor. Substituindo esta expressão na lei de Faraday, temos

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \therefore \nabla \times \left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0$$

Portanto, o vetor dado por $\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t$ pode ser escrito como o gradiente de uma função escalar $\phi(\vec{r}, t)$ denominada potencial escalar,

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi \qquad \therefore \boxed{\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

Estas expressões são essenciais para calcular o campo eletromagnético produzido por cargas não estacionárias pois, como veremos na sequência, é bem mais simples calcular os potenciais $\vec{A}$ e ϕ devido a fontes não estacionárias e depois obter deles os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, do que tentar calcular diretamente estes campos.

Equações para os Potenciais

Naturalmente não basta escrever $\vec{E}$ e $\vec{B}$ em termos de ρ e $\vec{A}$, é necessário determinar as equações que permitem calcular estes potenciais diretamente. Isto é feito através das equações de Maxwell. Começando pela lei de Coulomb, temos

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad -\nabla\cdot\left(\nabla\phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \therefore \qquad \boxed{\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Por outro lado, da lei de Ampère obtemos

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \mu_0\vec{j} - \mu_0\epsilon_0\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

Utilizando a identidade vetorial $\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$, esta equação pode ser escrita como

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} + \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}$$

Estas equações para ϕ e $\vec{A}$ parecem bastante complicadas; além de incluir as fontes ρ e $\vec{j}$, são acopladas, ou seja, $\vec{A}$ e ϕ aparecem nas duas equações! No entanto, elas podem ser bastante simplificadas se notarmos que, na definição de $\vec{B}$ em termos de $\vec{A}$, o $\nabla\cdot\vec{A}$ é arbitrário, ou seja, $\vec{B}$ é a fonte de circulação do campo vetorial $\vec{A}$, mas sua fonte de fluxo não foi definida. Vamos agora ver como $\nabla\cdot\vec{A}$ pode ser definido consistentemente de forma a simplificar as equações para $\vec{A}$ e ϕ.

Transformações de Calibre

Naturalmente não temos total independência para especificar $\nabla \cdot \vec{A}$; é necessário sempre garantir que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, que são as grandezas físicas medidas, e não $\vec{A}$ e ϕ, sejam univocamente determinados.

Suponhamos, por exemplo, que modifiquemos o potencial vetor, somando a ele uma outra função vetorial $\vec{\alpha}$;

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha}$$

O campo magnético associado a esse potencial será então

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{\alpha} = \vec{B} + \nabla \times \vec{\alpha}$$

Impondo que essa modificação não altere o campo magnético, ou seja, $\vec{B}' = \vec{B}$, temos que só podemos somar a $\vec{A}$ uma função vetorial tal que

$$\nabla \times \vec{\alpha} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\alpha} = \nabla \lambda$$

onde $\lambda(\vec{r}, t)$ é uma função escalar qualquer. Por outro lado, o novo campo elétrico será dado por

$$\vec{E}' = -\nabla \phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

onde ϕ' é o novo potencial escalar associado à modificação de $\vec{A}$. Substituindo a expressão para $\vec{A}'$, temos

$$\vec{E}' = -\nabla \phi' - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} = -\nabla \phi' - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\nabla \left(\phi' + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Impondo que

$$\vec{E}' = \vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

temos que

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

Concluindo, temos que o campo eletromagnético, $\vec{E}$ e $\vec{B}$, não é alterado se modificarmos os potenciais $\vec{A}$ e ϕ através de uma função escalar $\lambda(\vec{r}, t)$, tal que

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \nabla\lambda \\ \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial\lambda}{\partial t} \end{aligned}}$$

Estas transformações são denominadas Transformações de Calibre.

As transformações de calibre nos permitem escolher diferentes fontes de fluxos para $\vec{A}$ $(\nabla \cdot \vec{A})$ de forma a simplificar as equações com as quais devemos trabalhar. Vamos, por exemplo, começar com a escolha que já fizemos em magnetostática, denominada calibre de Coulomb,

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

Neste caso, as equações para os potenciais ϕ e $\vec{A}$ ficam

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

e

$$\nabla^2\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

Este sistema de equações parece ser simples de solucionar, mas nem sempre isto ocorre. De fato, conhecida a distribuição de cargas num dado instante, o potencial escalar $\phi(\vec{r}, t)$ pode ser imediatamente calculado. Isto pode parecer bastante surpreendente. Suponhamos que a distribuição de cargas $\rho(\vec{r}, t)$, por exemplo, seja devida a cargas de uma supernova que explodiu a milhões de anos luz da Terra. A primeira equação nos permite calcular o potencial escalar dessas cargas instantaneamente, isto é, no mesmo instante em que elas aparecem, como se a informação sobre elas viajasse com uma velocidade infinita! Mas esta interpretação não é correta, pois a informação sobre a supernova é transportada pelo vetor de Poynting, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, e, para calcular esses campos, é preciso solucionar também a equação para $\vec{A}$, que obviamente é uma equação se onda (generalizada) com a velocidade de propagação $c^2 = 1/(\mu_0\epsilon_0)$ aparecendo claramente no primeiro termos da equação.

Portanto, no calibre de Coulomb, o potencial escalar ϕ é obtido como se fosse um problema de eletrostática e o potencial vetor $\vec{A}$ é obtido como a solução de uma equação de ondas onde, além da densidade de corrente $\vec{j}$, a derivada temporal de $\nabla\phi$ também aparece como fonte.

Uma escolha mais apropriada da $\nabla \cdot \vec{A}$ para o estudo de onda eletromagnéticas é fazer

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \cdot \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

De forma que a equção para $\vec{A}$ fica na forma padrão de uma equação de onda

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

Por outro lado, substituindo $\nabla \cdot \vec{A}$ na equação para o potencial escalar $\phi(\vec{r}, t)$, temos

$$\nabla^2 \phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

que também tem a forma padrão de uma equação de onda. Portanto, a escolha

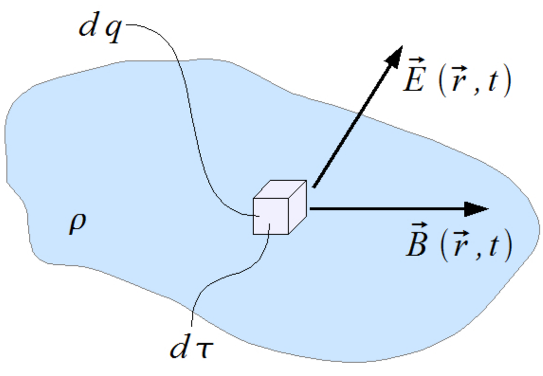
$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

denominada Calibre de Lorentz, faz com que $\vec{A}$ e ϕ satisfaçam ambos uma equação de onda padrão.

Agora vamos rever o teorema da conservação de energia para o campo eletromagnético, ou seja, como a energia dentro de um volume é armazenada nos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, calcúlado de forma consistente com as equações de Maxwell.

Teorema de Conservação de Energia Eletromagnética ou Teorema de Poynting

(Também em Reitz, Milford and Christy, seção 16-3)



Suponhamos que tenhamos um conjunto de cargas e correntes no vácuo, representadas pela densidade volumétrica de carga ρ e densidade superficial de corrente $\vec{j}$. Estas cargas e correntes criam campos elétricos e magnéticos que vão atuar sobre as próprias fontes, de forma que, em geral, tanto ρ como $\vec{j}$ podem variar tanto espacialmente como temporalmente, isto é, $\rho(\vec{r}, t)$ e $\vec{j}(\vec{r}, t)$. A variação das cargas e correntes exige que trabalho seja feito, ou energia gasta; portanto é importante determinar como varia, de forma auto-consistente, a energia do sistema de cargas, correntes e o campo eletromagnético por elas produzido.

A força atuante sobre cada elemento de carga dq, dentro do volume considerado, é dada por

$$d\vec{F} = dq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Então, a potência instantânea gasta pelo campo eletromagnético para mover este elemento de carga, como velocidade $\vec{v}$, é

$$dP = dq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = dq\vec{E} \cdot \vec{v}$$

Mas $dq = \rho d\tau$, onde $d\tau$ é o elemento de volume (usamos τ para não confundir com velocidade), de forma que

$$dP = \vec{E} \cdot (\rho\vec{v})d\tau = \vec{E} \cdot \vec{j}d\tau$$

onde usamos a expressão para a densidade de corrente $\vec{j} = \rho\vec{v}$. Finalmente, a potência total sobre o volume considerado, ou variação temporal da energia total do sistema, é dada por

$$P = \frac{dW}{dt} = \int_V (\vec{E} \cdot \vec{j})d\tau$$

Pergunta: Porque neste cálculo não foi necessário calcular a força magnética sobre os elementos de corrente?

Até agora, consideramos os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ como dados; mas, pelas equações de Maxwell, sabemos que eles estão relacionados com os próprias fontes ρ e $\vec{j}$. Da quarta Equação de Maxwell, temos

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\therefore \vec{E}\cdot\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B}) - \epsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

ou

$$\vec{E}\cdot\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E} - \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})\right] - \epsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

onde utilizamos a identidade vetorial $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{B}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$ no primeiro termo do lado direito da equação. Pela terceira Equação de Maxell temos que $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, de forma que a relação acima fica

$$\vec{E}\cdot\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \epsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})$$

ou

$$\vec{E}\cdot\vec{j} = -\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} - \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})$$

Substituindo este resultado na expressão para P, obtemos

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{E}\cdot\vec{j}d\tau = -\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)d\tau - \frac{1}{\mu_0}\int_V \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})d\tau$$

O último termo da equação pode ser convertido numa integral de superfície através do Teorema de Gauss; então obtemos

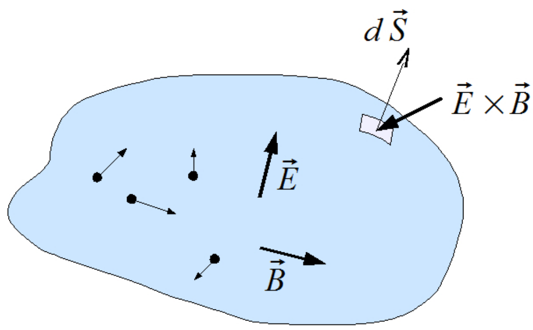
$$\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{E}\cdot\vec{j}d\tau = -\frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)d\tau - \frac{1}{\mu_0}\oint_S \left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{S}$$

ou

$$\boxed{\int_V \vec{E}\cdot\vec{j}d\tau + \frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)d\tau = -\frac{1}{\mu_0}\oint_S \left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{S}}$$

Vamos agora interpretar cada termo da equação. O primeiro representa a energia gasta para fazer as cargas se moverem dentro do volume, ou seja, a energia gasta por efeito Joule. Para ver isto, basta lembrar que a colisão entre as cargas pode ser representada por uma resistividade η, de forma que $\vec{E} = \eta\vec{j}$. Assim $\vec{E}\cdot\vec{j} = \eta j^2$, que corresponde a energia gasta por efeito Joule (RI^2) por unidade de volume. Lembrando que $\epsilon_0 E^2/2$ é a densidade de energia armazenada no campo elétrico e $B^2/2\mu_0$ é a densidade de energia armazenada no campo magnético, temos que o segundo termo da equação acima representa a variação temporal da energia armazenada nos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ dentro do volume. Se a derivada temporal for positiva a energia está aumentando e, se for negativa, a energia está diminuindo.

Como a energia tem que ser conservada, se houver dissipação de energia dentro do volume, por efeito Joule, e a energia armazenada nos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ estiver aumentando, necessariamente tem que haver um fluxo de energia para dentro do volume. Isto é representado pela integral



$$-\frac{1}{\mu_0}\oint_S(\vec{E}\times\vec{B})\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\oint_S(\vec{E}\times\vec{B})\cdot(-d\vec{S})$$

Portanto o vetor $\vec{E}\times(\vec{B}/\mu_0) = \vec{E}\times\vec{H}$ representa o fluxo de energia associada ao campo eletromagnético, ou seja, energia transportada pelo campo eletromagnético por unidade de área e por unidade de tempo. Esta grandeza é representada pela grandeza vetorial $\vec{S}$, definida como

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}}$$

que é denominada Vetor de Poynting.

O teorema de Poynting, portanto, equivale ao teorema da conservação de energia para o campo eletromagnético. Ele também pode ser expresso numa forma local. Para isso, retornaremos às integrais de volume, antes de termos aplicado o teorema de Gauss:

$$\int \vec{E}\cdot\vec{j}d\tau = -\int\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)d\tau - \int\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})d\tau$$

ou

$$\int_V\left[\vec{E}\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)d\tau+\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})\right]d\tau = 0$$

Como o volume V é arbitrário, o integrando tem que se anular, ou seja,

$$\vec{E}\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)+\nabla\cdot\vec{S} = 0$$

O produto $\vec{E}\cdot\vec{j}$ corresponde à variação temporal da densidade de energia mecânica do sistema, w_{mec}, e a soma das densidades de energia nos campos elétrico e magnético pode ser escrita como w_{em}, ou seja, a densidade de energia do campo eletromagnético. Assim, a expressão da conservação de energia, na forma pontual fica

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[w_{mec} + w_{em}\right] + \nabla \cdot \vec{S} = 0$$

que é a equação da continuidade para a energia do campo eletromagnético.

Nota Importante: Esta expressão que obtemos para a conservação de energia eletromagnética, tanto na forma integral como na forma local, só é válida no vácuo. A expressão da conservação de energia num meio material é mais complicada porque as constantes ϵ e μ na verdade não são constantes! Em geral, elas podem variar com a frequência do campo eletromagnético no meio e esta variação tem que ser considerada na conservação de energia. Após discutirmos a questão de absorção e ressonância de ondas eletromagnéticas em meios materiais retornaremos a esta questão.

Exercício:

Q2. Um capacitor de placas planas paralelas é formado por dois discos circulares de raio a, separados entre si de uma distância $d \ll a$, no vácuo. As placas estão ligadas a um gerador de corrente alternada de frequência ω, que produz uma carga uniforme na placa do capacitor, dada por $q(t) = q_0 \sin(\omega t)$. São desprezados efeitos de borda. Supondo baixas frequências, de forma que $\omega a/c \ll 1$ (onde $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ é a velocidade da luz), o campo elétrico $\vec{E}$ entre as placas pode ser considerado uniforme. Considere um sistema de coordenadas cilíndricas, (r,θ,z), com eixo z passando pelo centro das placas, conforme indicado na figura.

(a) Calcule a expressão para o campo elétrico $\vec{E}$ entre as placas.
(b) Calcule o campo magnético $\vec{B}$, em função do raio r, na região entre as placas do capacitor.
(c) Calcule o vetor de Poynting $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$.
(d) Usando a aproximação de baixas frequências, mostre que é satisfeita a conservação de energia, expressa pela condição $\nabla \cdot \vec{S} + \partial u/\partial t = 0$, onde $u = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \vec{B}^2/\mu_0)$ é a densidade de energia contida no campo eletromagnético.