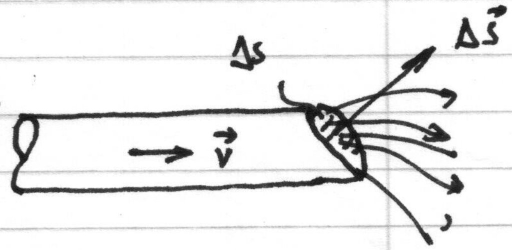
1. Recordação de Alguns Conceitos de Cálculo Vetorial

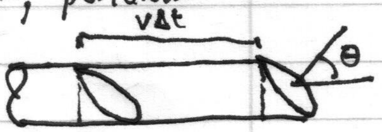
Fluxo de um Vetor

Suponhamos um fluído de densidade ρ (massa/volume) escoando em um tubo, com velocidade $\vec{v}$. Definimos como fluxo do fluído a quantidade de massa que sai por sua abertura ΔS, por unidade de tempo:



$$\left.\begin{array}{l}\text{fluxo através}\\ \text{de } \Delta\vec{S}\end{array}\right| = \frac{\text{massa que atravessa } \Delta S}{\text{tempo necessário}} = \frac{\Delta M}{\Delta t}$$

Fixando um ~~instante~~ intervalo de tempo Δt, todo o fluído que estiver a uma distância $v\Delta t$ da abertura conseguirá alcançá-la; portanto



$$\Delta M = \rho \times \text{volume} = \rho \times [v \Delta t \; \Delta S \cos\theta]$$

$$\therefore \; \phi = \frac{\rho v \cancel{\Delta t} \Delta S \cos\theta}{\cancel{\Delta t}} = \rho \Delta S \, v \cos\theta \quad \therefore \; \boxed{\phi = \rho \vec{v} \cdot \Delta\vec{S}}$$

Se $\vec{v}$ não fôr constante dentro do tubo, dividimos $\Delta\vec{S}$ em pequenas superfícies $d\vec{S}$ e integramos o produto $\rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$:

$$\phi = \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Como $\rho\vec{v}$ é um vetor, podemos extender este conceito para qualquer campo vetorial $\vec{F}$, definindo o fluxo de $\vec{F}$ através de uma superfície como

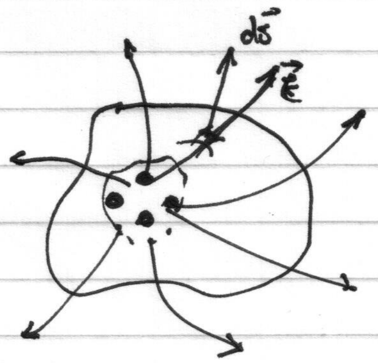
$$\boxed{\phi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}}$$

Se a superfície fôr fechada, por convenção se adota o sentido positivo de $d\vec{S}$ apontando para fora da superfície. Assim $\phi > 0$ significa fluxo saindo da superfície.

Por exemplo, na Lei de Gauss

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

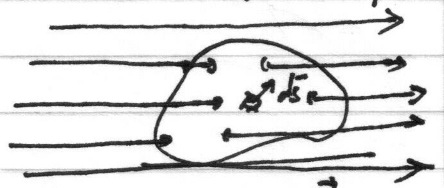
$$\rightarrow \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = q/\epsilon_0$$

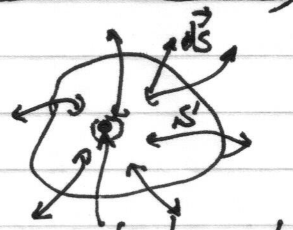


Se a superfície S fôr aberta, o sentido positivo de $d\vec{s}$ é arbitrário.

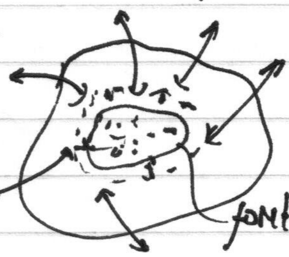
Divergência

Suponhamos que queiramos calcular o fluxo d'água de um riacho (em regime permanente), p.ex., através de uma superfície fechada S. Naturalmente este fluxo será nulo, porque toda água que entra em S por um lado acaba saindo por outro. Este fluxo só não será nulo se houvesse uma fonte de água dentro de S' (por exemplo, água sendo gerada quimicamente). Portanto, toda vez que o fluxo de uma função vetorial $\vec{F}$ através de uma superfície fechada S' é não nulo, dizemos que dentro desta superfície existe uma fonte ou sumidouro do campo vetorial $\vec{F}$. Consideremos agora uma fonte de água distribuída dentro de S. Se nós começarmos a tomar S cada vez menor, teremos cada vez menos fonte dentro de S' e, portanto pode ser que o fluxo diminua cada vez mais. Será interessante saber se no limite $S' \to 0$ ainda existe algum fluxo saindo de S', ou seja, se existe alguma fonte naquele ponto. No entanto, não podemos fazer simplesmente $S \to 0$ porque a integral seria nula, devido à super-





fonte puntual



fonte distribuída

fície ser nula, mesmo que ainda reste uma fonte no ponto para o qual a superfície converge, no limite. Para evitar este resultado trivial, nós tomamos o limite do fluxo dividido pelo volume ΔV dentro de S; como $\Delta V \to 0$ quando $S \to 0$, o resultado trivial devido à geometria é eliminado. Então definimos

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Por exemplo, no caso da Lei de Gauss:

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \therefore \quad \oint_{\Delta S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\bar{\rho}\, \Delta V}{\epsilon_0}$$

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0} \to \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \therefore \quad \boxed{\operatorname{div} . \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Usando esta definição, se obtém o resultado conhecido:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}}$$

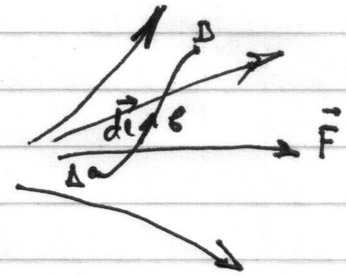
<u>Teorema da Divergência ou Teorema de Gauss</u>

$$\boxed{\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{F})\, dV}$$

Integral de Linha de uma Função Vetorial

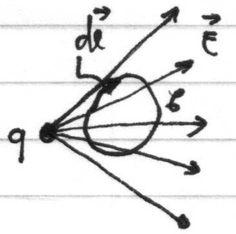
(trabalho de uma força)

$$I = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$



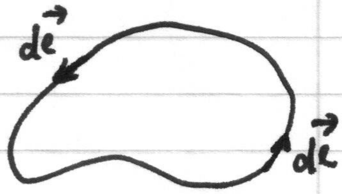
Um campo vetorial é conservativo quando

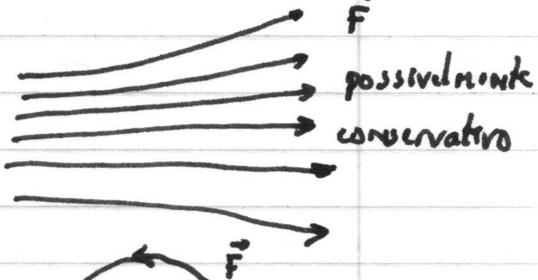
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$$

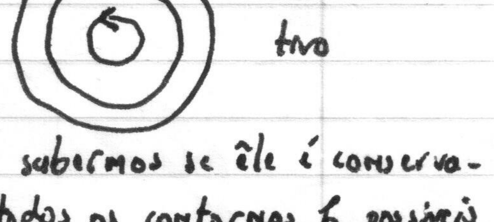


para qualquer percurso fechado $\mathcal{C}$.
O significado físico por trás deste conceito é simples: no caso de $\vec{F}$ ser um campo de forças conservativo atuando sobre um corpo, em parte do percurso a ~~fonte~~ força (q) realiza trabalho sobre o corpo e em parte do percurso o corpo retorna este trabalho, acumulado na forma de energia potencial, atuando sobre a fonte de $\vec{F}$.

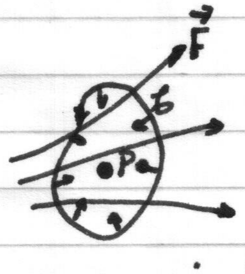
Naturalmente, ao percorrermos um circuito fechado, o vetor elemento de comprimento $d\vec{l}$ tem que mudar de sentido em parte do circuito. Portanto, só podem ser conservativos campos vetoriais cujas linhas de força não se fecham sobre si mesmas, em torno de um ponto, pois, para que $\oint \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$, é necessário que $\vec{F}$ e $d\vec{l}$ tenham sentidos opostos em alguma parte do circuito. Os campos conservativos começam então em fontes e terminam em sumidouros. Os não-conservativos não possuem fontes e sumidouros no espaço finito.







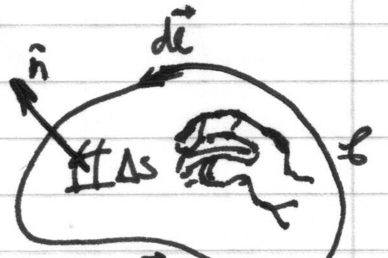
Dado um campo vetorial $\vec{F}(x,y,z)$, para sabermos se êle é conservativo ou não temos que calcular $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{l}$ para todos os contornos $\mathcal{C}$ possíveis e mostrar que a integral sempre se anula. Naturalmente este procedimento é inviável. Melhor seria se tivéssemos uma <u>condição local</u> tal que permitisse determinar se $\vec{F}$ é conservativo ou não no entorno de um dado ponto. Uma maneira de se obter esta condição local é ~~fazer~~ contrair o circuito $\mathcal{C}$, fazendo seu comprimento tender a zero em cima do ponto considerado.



Mas, como no caso da divergência, não podemos fazer simplesmente $\mathcal{C} \to 0$, porque a circulação de $\vec{F}$ dará sempre o resultado nulo trivial, devido ao seu comprimento tender a zero, independentemente do caráter conservativo ou não de $\vec{F}$. Para evitar esta trivialidade tomamos então o limite da integral dividida pela área de <u>qualquer</u> superfície aberta cujo contôrno seja $\mathcal{C}$, ou seja, definimos

$$\hat{n} \cdot (\mathrm{rot}\, \vec{F}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

onde $\hat{n}$ é tomado como o vetor unitário normal à superfície delimitada por $\mathcal{C}$, com sentido definido pela regra da mão direita.



Usando-se esta definição, pode-se mostrar que

$$\mathrm{rot}\, \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \vec{F}$$

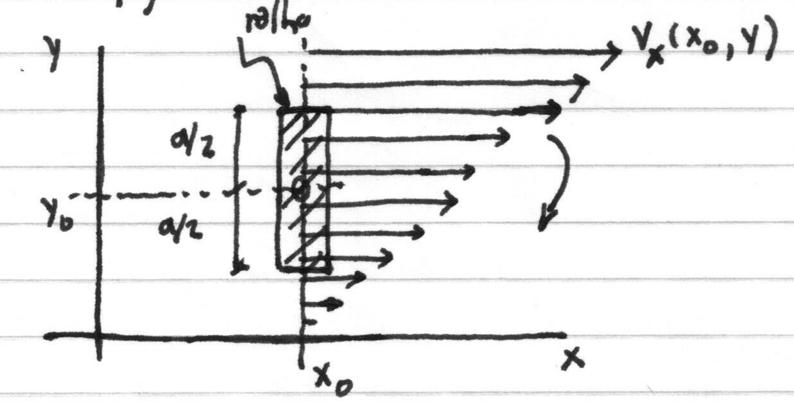
Este operador vetorial é denominado <u>rotacional</u>.

<u>Sentido Físico</u>

O significado físico do rotacional, e a razão desta nomenclatura, nem sempre é fácil de ser entendido. Para visualizar melhor o que representa o rotacional de uma função vetorial, vamos supor que $\vec{F}$ seja um campo vetorial bi-dimensional dado por

$$\vec{F}(x,y) = V_x(x,y)\,\hat{a}_x + V_y(x,y)\,\hat{a}_y$$

onde V_x e V_y são as componentes da velocidade de um fluido sobre o plano (x,y). Tomemos um ponto (x_0, y_0) qualquer e fixemos neste ponto uma rolha cilíndrica através de um alfinete vertical (paralelo ao eixo z) que passe pelo seu centro. Suponhamos que $V_x(x_0, y)$ varie conforme indicado pelas setas da figura.



Aparecerá um torque aplicado sobre a rolha devido ao fluxo de água ser mais intenso de um lado do que do outro; assim o torque na direção z será

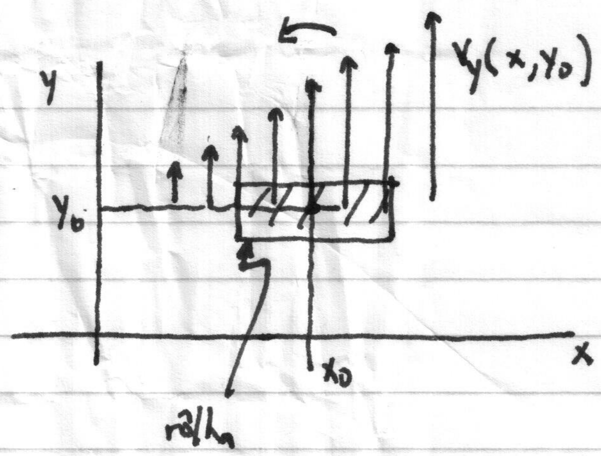
$$\tau_z\big|_x \propto \left[V_x\left(x_0, y_0 + \frac{a}{2}\right) - V_x\left(x_0, y_0 - \frac{a}{2}\right)\right]$$

ou

$$\tau_z\big|_x \propto \left.\frac{\partial V_x}{\partial y}\right|_{x_0, y_0}$$

Assim, devido à variação desta componente da velocidade, a rolha girará no sentido horário se $\frac{\partial V_x}{\partial y} > 0$ (caso mostrado na figura), ou no sentido oposto se $\frac{\partial V_x}{\partial y} < 0$.

Quando a rolha começar a girar, a componente y da velocidade do fluido também atuará sobre ela, provocando um torque, conforme ilustrado na figura abaixo.



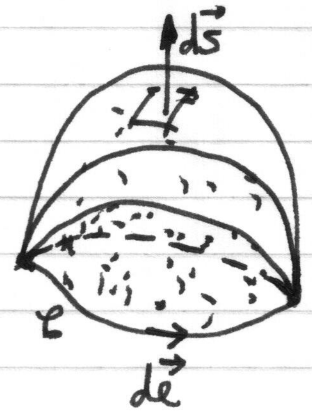
A varração desta componente da velocidade dará origem a um torque oposto (para $\partial V_y/\partial x > 0$). Assim, o torque resultante será proporcional à

$$\tau_z \propto \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)$$

Se os alunos recordam, o termo entre parênteses é exatamente a componente z do rotacional de $\vec{v}$. Este exemplo simples ilustra o significado do operador rotacional. Se ~~o~~ $\nabla \times \vec{F} \neq 0$ num determinado ponto, sua variação espacial induz "uma rotação" em torno daquele ponto.

Teorema de Stokes

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}}$$



Note que, neste teorema

1. S é qualquer superfície aberta cujo "embocadura" seja o circuito $\mathcal{C}$.

2. Os sentidos de $d\vec{l}$ e $d\vec{S}$ são ligados pela regra da mão direita

Gradiente e Laplaciano

Para campos vetoriais conservativos, por exemplo o campo eletrostático $\vec{E}$, temos

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 .$$

Usando o Teorema de Stokes, obtemos

$$\int_{S} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0 .$$

Como isto é válido para qualquer superfície S', o integrando tem que ser nulo

$$\nabla \times \vec{E} = 0 .$$

Portanto, os campos vetoriais conservativos têm rotacional nulo.

Há uma outra maneira de expressar este resultado, que é muito conveniente em Eletromagnetismo. Suponhamos que uma função vetorial $\vec{F}(x,y,z)$ tenha uma função escalar $\psi(x,y,z)$ associada a ela de modo que

$$F_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} , \quad F_y = \frac{\partial \psi}{\partial y} , \quad F_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Podemos provar que se os derivadas primeiras e segundas de ψ forem contínuas, então necessariamente $\nabla \times \vec{F} = 0$, ou seja, $\vec{F}$ é conservativo. Por exemplo

$$(\nabla \times \vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial y \partial z} = 0$$

Portanto, todo campo vetorial conservativo pode ser expresso como o gradiente de uma função escalar,

$$\vec{F} = \nabla\psi$$

Por outro lado, a divergência de $\vec{F}$ será dada por

$$\nabla\cdot\vec{F} = \nabla\cdot(\nabla\psi) = \nabla^2\psi,$$

onde $\nabla^2\psi$ é o Laplaciano de ψ.

Observação Importante

Pode-se mostrar rigorosamente (Panofsky and Phillips, Classical Electricity and Magnetism, 1.1) que todos os campos vetoriais em três dimensões são unicamente definidos se as suas densidade de circulação $\vec{c}$ e de fonte s forem especificadas em todos os pontos do espaço, através das relações

$$\nabla\times\vec{V} = \vec{c}$$

e

$$\nabla\cdot\vec{V} = s$$

e se a totalidade de todas as fontes forem nulas no infinito.

O Operador ∇ em Sistemas Não-Cartesianos

Alguns livros afirmam que o operador ∇ só é definido em coordenadas cartesianas; em outros sistemas de coordenadas teríamos que calcular $\nabla \cdot \vec{F}$ e $\nabla \times \vec{F}$ diretamente das definições originais. Mas isto <u>não é correto</u>. Podemos definir o operador ∇ num sistema qualquer de coordenadas generalizadas ortogonais e aplicá-lo como o fazemos em coordenadas cartesianas, tomando, no entanto, [redacted] as derivadas dos versores de forma apropriada.

i) Forma do operador ∇

Em coordenadas cartesianas, cada parcela do operador ∇ é da forma

$$\hat{a}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad ; \quad \nabla = \hat{a}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

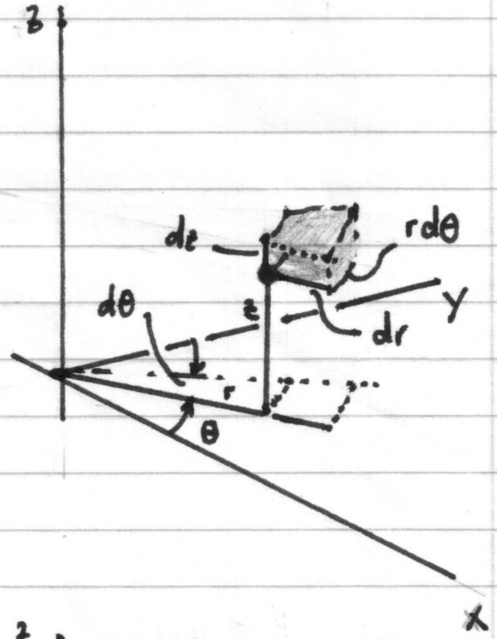
onde $\hat{a}_i$ são os versores, $\hat{a}_1 = \hat{a}_x$, $\hat{a}_2 = \hat{a}_y$ e $\hat{a}_3 = \hat{a}_z$, e x_i as coordenadas, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Portanto, cada parcela de ∇ é o produto do versor, na direção da coordenada considerada, pela derivada com relação ao [redacted] elemento de comprimento correspondente (as outras variáveis mantidas constantes).

Num sistema genérico de coordenadas generalizadas ortogonais u_i, $i = 1, 2, 3$, podemos, por analogia, escrever

$$\nabla = \hat{a}_1 \frac{\partial}{\partial l_i} + \hat{a}_2 \frac{\partial}{\partial l_2} + \hat{a}_3 \frac{\partial}{\partial l_3} ,$$

onde os $\hat{a}_i$ são os versores e os dl_i os elementos de comprimento. No sistema cartesiano, estes são os próprios diferenciais das coordenadas, $dl_1 = dx$, $dl_2 = dy$, $dl_3 = dz$. Mas nos sistemas de coordenadas ortogonais generalizadas em geral temos $dl_i \neq du_i$. Para encontrar as expressões para os elementos de comprimento, o método mais simples é construir um volume elementar no sistema considerado, em que cada aresta é obtida variando-se uma coordenada com as outras duas fixas. Vamos exemplificar para os dois sistemas mais utilizados.

<u>Coordenadas Cilíndricas</u> (r, θ, z)



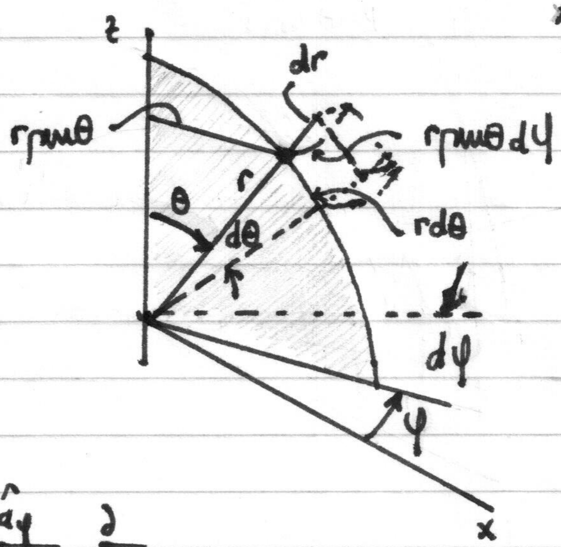
$$r \to r + dr \; ; \; dl_1 = dr$$

$$\theta \to \theta + d\theta \; ; \; dl_2 = r\,d\theta$$

$$z \to z + dz \; ; \; dl_3 = dz$$

$$\therefore \; \nabla = \hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{a}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

<u>Coordenadas Esféricas</u> (r, θ, φ)



$$r \to r + dr \; ; \; dl_1 = dr$$

$$\theta \to \theta + d\theta \; ; \; dl_2 = r\,d\theta$$

$$\varphi \to \varphi + d\varphi \; ; \; dl_3 = r \operatorname{sen}\theta \, d\varphi$$

$$\therefore \; \nabla = \hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{a}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{a}_\varphi}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Em geral, os elementos de comprimento são da forma $dl_i = h_i \, du_i$, onde os fatores h_i são chamadas <u>métricas</u> porque, quando multiplicadas pelo diferencial da variável correspondente, dão o deslocamento com a dimensão apropriada de comprimento.

ii) <u>Forma de aplicar o operador ∇</u>

A ordem na qual escrevemos os termos do operador ∇ tem que ser respeitada, ou seja, primeiro fazemos as derivadas correspondentes e depois o produto indicado com os versores. Por exemplo, em coordenadas cartesianas temos

$$\nabla\cdot\vec{F} = \left(\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(F_x \hat{a}_x + F_y \hat{a}_y + F_z \hat{a}_z\right)$$

$$= \hat{a}_x\cdot\left[\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\hat{a}_x + F_x \frac{\partial \hat{a}_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\hat{a}_y + F_y \frac{\partial \hat{a}_y}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F_z}{\partial x}\hat{a}_z + F_z \frac{\partial \hat{a}_z}{\partial x}\right)\right]$$

$$+ \hat{a}_y\cdot\left[\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\hat{a}_x + F_x \frac{\partial \hat{a}_x}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\hat{a}_y + F_y \frac{\partial \hat{a}_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F_z}{\partial y}\hat{a}_z + F_z \frac{\partial \hat{a}_z}{\partial y}\right)\right]$$

$$+ \hat{a}_z\cdot\left[\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}\hat{a}_y + F_x \frac{\partial \hat{a}_x}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial F_y}{\partial z}\hat{a}_y + F_y \frac{\partial \hat{a}_y}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial F_z}{\partial z}\hat{a}_z + F_z \frac{\partial \hat{a}_z}{\partial z}\right)\right]$$

Mas, em coordenadas cartesianas todos os versores são constantes, de forma que suas derivadas se anulam, e portanto obtemos

$$\nabla\cdot\vec{F} = \hat{a}_x\cdot\left[\frac{\partial F_x}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial F_y}{\partial x}\hat{a}_y + \frac{\partial F_z}{\partial x}\hat{a}_z\right] + \hat{a}_y\cdot\left[\frac{\partial F_x}{\partial y}\hat{a}_x + \frac{\partial F_y}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial F_z}{\partial y}\hat{a}_z\right] +$$

$$+ \hat{a}_z\cdot\left[\frac{\partial F_x}{\partial z}\hat{a}_x + \frac{\partial F_y}{\partial z}\hat{a}_y + \frac{\partial F_z}{\partial z}\hat{a}_z\right]$$

$$\therefore\quad \nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

No entanto, <u>em outros sistemas de coordenadas ortogonais, os versores não são necessariamente constantes porque suas direções podem depender das coordenadas</u>. Neste caso, é necessário considerar as derivadas dos versores. Na série de exercícios, os alunos deverão mostrar que as derivadas dos versores, nos sistemas cilíndrico e esférico, são

<u>sistema cilíndrico</u> : $\frac{\partial \hat{a}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{a}_r$; $\frac{\partial \hat{a}_r}{\partial \theta} = \hat{a}_\theta$; todas as outras nulas

<u>sistema esférico</u>: $\frac{\partial \hat{a}_r}{\partial \theta} = \hat{a}_\theta$, $\frac{\partial \hat{a}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{a}_r$, $\frac{\partial \hat{a}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta\, \hat{a}_\varphi$; $\frac{\partial \hat{a}_r}{\partial \varphi} = \operatorname{sen}\theta\, \hat{a}_\varphi$

$\frac{\partial \hat{a}_\varphi}{\partial \varphi} = -\operatorname{sen}\theta\, \hat{a}_r - \cos\theta\, \hat{a}_\theta$; todas as outras nulas.