Teoria dos Jogos

Jogos simultâneos

Roberto Guena de Oliveira

USP

31 de outubro de 2013

Sumário

1 Representação de jogos com movimentos simultâneos

Sumário

1. Representação de jogos com movimentos simultâneos
2. Estratégias dominantes

Sumário

1. Representação de jogos com movimentos simultâneos
2. Estratégias dominantes
3. Equilíbrio de Nash

Sumário

1. Representação de jogos com movimentos simultâneos
2. Estratégias dominantes
3. Equilíbrio de Nash
4. O modelo de Cournot

Sumário

1. Representação de jogos com movimentos simultâneos
2. Estratégias dominantes
3. Equilíbrio de Nash
4. O modelo de Cournot
5. O Modelo de Bertrand

Sumário

1. Representação de jogos com movimentos simultâneos
2. Estratégias dominantes
3. Equilíbrio de Nash
4. O modelo de Cournot
5. O Modelo de Bertrand
6. Jogos com repetição

Sumário

1. **Representação de jogos com movimentos simultâneos**
   - O conjunto de informação
   - Estratégia
   - Representação de um jogo na forma estratégica
2. Estratégias dominantes
3. Equilíbrio de Nash
4. O modelo de Cournot
5. O Modelo de Bertrand
6. Jogos com repetição

O conjunto de informação

Definição

Um **conjunto de informação** é um conjunto de nós decisórios nos quais um jogador sabe que pode estar quando escolhe uma ação.

O conjunto de informação

Definição

Um **conjunto de informação** é um conjunto de nós decisórios nos quais um jogador sabe que pode estar quando escolhe uma ação.

Comentários:

- Em jogos com informação perfeita, o conjunto de informação será sempre igual a um único nó.

O conjunto de informação

Definição

Um **conjunto de informação** é um conjunto de nós decisórios nos quais um jogador sabe que pode estar quando escolhe uma ação.

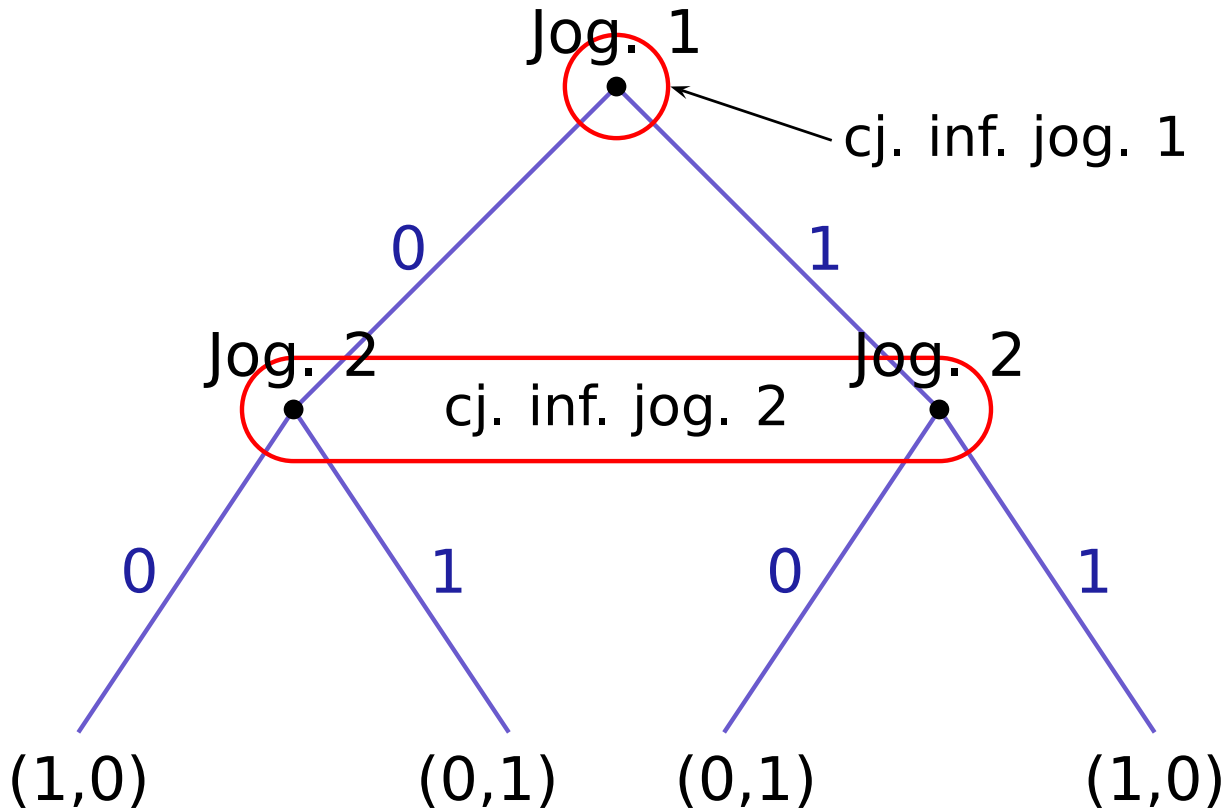
Comentários:

- Em jogos com informação perfeita, o conjunto de informação será sempre igual a um único nó.
- Em jogos com informação incompleta ou jogadas simultâneas, esse conjunto pode ser composto por dois ou mais nós que admitam as escolhas das mesmas ações.

Exemplo: par ou ímpar.

- Dois jogadores devem escrever, cada um, em um papel o númerzo zero ou o número um.
- O segundo jogador escolhe seu número sem saber o número que o primeiro escolheu.
- Caso a soma dos números seja par, o jogador 1 ganha R$ 1,00. Caso contrário o mesmo prêmio é pago ao jogador 2.

Par ou ímpar: representação na forma extensiva.



Sumário

1. **Representação de jogos com movimentos simultâneos**
   - O conjunto de informação
   - Estratégia
   - Representação de um jogo na forma estratégica
2. Estratégias dominantes
3. Equilíbrio de Nash
4. O modelo de Cournot
5. O Modelo de Bertrand
6. Jogos com repetição

Estratégia

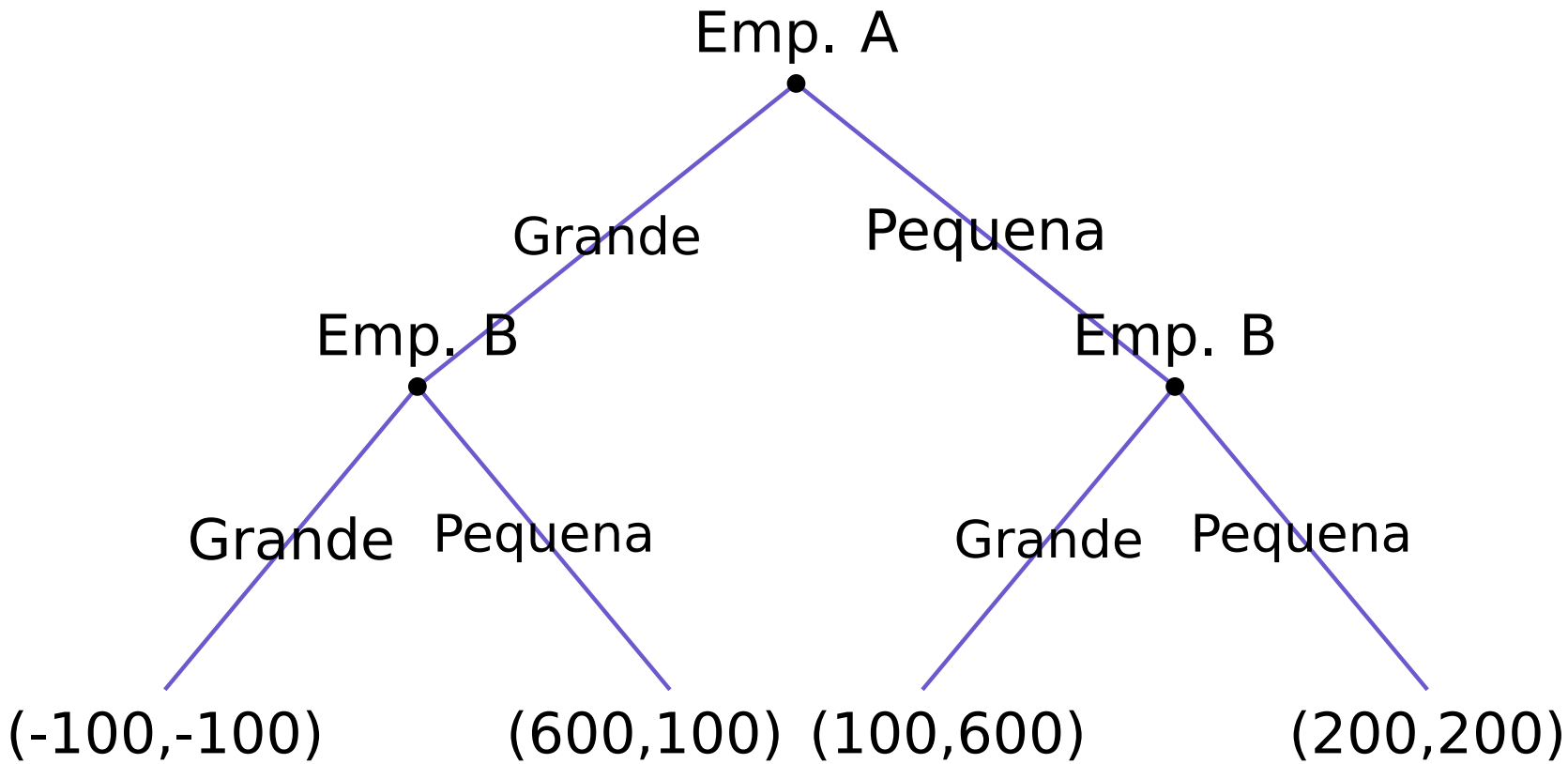
Definição

Uma **estratégia** é um conjunto de regras que dizem o que um jogador deve fazer em cada possível momento de decisão de um jogo, ou seja, uma estratégia associa uma ação a cada conjunto de informação de um jogador.

Exemplo: par ou ímpar

Cada jogador possui apenas duas estratégias: escolher 0 ou escolher 1.

Exemplo: a escolha da capacidade produtiva



Exemplo (cont.):

Estratégias da empresa A

Exemplo (cont.):

Estratégias da empresa A

G: Escolher grande.

Exemplo (cont.):

Estratégias da empresa A

G: Escolher grande. **P**: Escolher pequena.

Exemplo (cont.):

Estratégias da empresa A

G: Escolher grande.

P: Escolher pequena.

Estratégias da empresa B

GG: Escolher grande caso a empresa A escolha G e grande caso a empresa A escolha P.

Exemplo (cont.):

Estratégias da empresa A

G: Escolher grande.

P: Escolher pequena.

Estratégias da empresa B

GG: Escolher grande caso a empresa A escolha G e grande caso a empresa A escolha P.

GP: Escolher grande caso a empresa A escolha G e pequena caso a empresa A escolha P.

Exemplo (cont.):

Estratégias da empresa A

G: Escolher grande.

P: Escolher pequena.

Estratégias da empresa B

GG: Escolher grande caso a empresa A escolha G e grande caso a empresa A escolha P.

PG: Escolher pequena caso a empresa A escolha G e pequena caso a empresa A escolha P.

GP: Escolher grande caso a empresa A escolha G e pequena caso a empresa A escolha P.

Exemplo (cont.):

Estratégias da empresa A

G: Escolher grande.

P: Escolher pequena.

Estratégias da empresa B

GG: Escolher grande caso a empresa A escolha G e grande caso a empresa A escolha P.

GP: Escolher grande caso a empresa A escolha G e pequena caso a empresa A escolha P.

PG: Escolher pequena caso a empresa A escolha G e pequena caso a empresa A escolha P.

PP: Escolher pequena caso a empresa A escolha G e grande caso a empresa A escolha P.

Sumário

1. **Representação de jogos com movimentos simultâneos**
   - O conjunto de informação
   - Estratégia
   - Representação de um jogo na forma estratégica
2. Estratégias dominantes
3. Equilíbrio de Nash
4. O modelo de Cournot
5. O Modelo de Bertrand
6. Jogos com repetição

Definição

A representação de um jogo na forma estratégica ou forma normal consiste em uma função (usualmente, no caso de jogos com apenas dois jogadores e número finito de estratégias, representada por meio de uma matriz) que associa a cada possível combinação de estratégias do jogo, os payoffs que cada um dos jogadores obtém.

Exemplo: par ou ímpar

		Jogador 2	
		0	**1**
Jogador 1	**0**	1, 0	0, 1
	1	0, 1	1, 0

Exemplo: escolha da capacidade

		B			
		GG	**GP**	**PP**	**PG**
A	**G**	$-100, -100$	$-100, -100$	$600, 100$	$600, 100$
	P	$100, \quad 600$	$200, \quad 200$	$200, 200$	$100, 600$

Sumário

1 Representação de jogos com movimentos simultâneos

2 Estratégias dominantes

3 Equilíbrio de Nash

4 O modelo de Cournot

5 O Modelo de Bertrand

6 Jogos com repetição

Estratégias dominantes: Definição

Estratégias Dominantes

Diz-se que um jogador possui uma **estratégia dominante** em um jogo quando essa estratégia gera o melhor resultado para esse jogador, independentemente de qual é a estratégia adotada pelo outro jogados.

Estratégias dominantes: Definição

Estratégias Dominantes

Diz-se que um jogador possui uma **estratégia dominante** em um jogo quando essa estratégia gera o melhor resultado para esse jogador, independentemente de qual é a estratégia adotada pelo outro jogados.

Equilíbrio com estratégias dominantes

Caso em um jogo os dois jogadores possuam estratégias dominantes, então a combinação dessas estratégias é chamada de um **equilíbrio com estratégias dominantes**.

Exemplo

		Emp. 2	
		P. baixo	**P. elevado**
Emp. 1	**P. baixo**	$10, \ 10$	$100, -50$
	P. elevado	$-50, 100$	$50, \ 50$

1. **Estratégia da empresa 1 é melhor resposta.**
2. **Estratégia da empresa 2 é melhor resposta.**

Exemplo

Emp. 1 \ Emp. 2	**P. baixo**	**P. elevado**
P. baixo	$10, \ 10$[1]	$100, -50$
P. elevado	$-50, 100$	$50, \ 50$

[1] **Estratégia da empresa 1 é melhor resposta.**

[2] **Estratégia da empresa 2 é melhor resposta.**

Exemplo

		Emp. 2	
		P. baixo	**P. elevado**
Emp. 1	**P. baixo**	$10, \ \ 10$ [1]	$100, -50$ [1]
	P. elevado	$-50, 100$	$50, \ \ 50$

[1] **Estratégia da empresa 1 é melhor resposta.**

[2] **Estratégia da empresa 2 é melhor resposta.**

- Preço baixo é estratégia dominante para a empresa 1.

Exemplo

		Emp. 2	
		P. baixo	**P. elevado**
Emp. 1	**P. baixo**	$10, \quad 10$ [1,2]	$100, -50$ [1]
	P. elevado	$-50, 100$	$50, \quad 50$

[1] **Estratégia da empresa 1 é melhor resposta.**

[2] **Estratégia da empresa 2 é melhor resposta.**

- Preço baixo é estratégia dominante para a empresa 1.

Exemplo

		Emp. 2	
		P. baixo	**P. elevado**
Emp. 1	**P. baixo**	$10, \quad 10$ [1,2]	$100, -50$ [1]
	P. elevado	$-50, 100$ [2]	$50, \quad 50$

[1] **Estratégia da empresa 1 é melhor resposta.**

[2] **Estratégia da empresa 2 é melhor resposta.**

- Preço baixo é estratégia dominante para a empresa 1.
- Preço baixo é estratégia dominante para a empresa 2.

Exemplo

		Emp. 2	
		P. baixo	**P. elevado**
Emp. 1	**P. baixo**	$10, \quad 10$ [1,2]	$100, -50$ [1]
	P. elevado	$-50, 100$ [2]	$50, \quad 50$

[1] **Estratégia da empresa 1 é melhor resposta.**

[2] **Estratégia da empresa 2 é melhor resposta.**

- Preço baixo é estratégia dominante para a empresa 1.
- Preço baixo é estratégia dominante para a empresa 2.
- Preço baixo, preço baixo é um equilíbrio com estratégias dominantes.

O Dilema dos Prisioneiros

Dois parceiros de um crime são interrogados simultaneamente por agentes policiais. A cada um dos criminosos é contada a seguinte história: as provas que temos contra vocês nos permitem impor uma pena de 3 anos de prisão para cada um. Todavia, nós sabemos (mas não temos provas) que vocês participaram de um sequestro. Se você confessar a participação nesse crime, nós podemos atenuar sua pena da seguinte maneira. Se você confessar o sequestro e seu companheiro não confessar, sua pena será de apenas um ano e seu companheiro terá pena de 10 anos. A recíproca é verdadeira. Se ambos confessarem, todavia, não será possível atenuar tanto a pena e cada um de vocês será condenado a 6 anos de cadeia.

O Dilema dos Prisioneiros: Representação estratégica

		Pris. 2	
		Confessa	**Não conf.**
Pris. 1	**Confessa**	$-6,-6$	$-1,-10$
	N. Confessa	$-10,-1$	$-3,-3$

1. **estratégia do prisioneiro 1 é melhor resposta**
2. **estratégia do prisioneiro 2 é melhor resposta**

O Dilema dos Prisioneiros: Representação estratégica

		Pris. 2	
		Confessa	**Não conf.**
Pris. 1	**Confessa**	$-6,-6$ [1]	$-1,-10$
	N. Confessa	$-10,-1$	$-3,-3$

[1] **estratégia do prisioneiro 1 é melhor resposta**

[2] **estratégia do prisioneiro 2 é melhor resposta**

O Dilema dos Prisioneiros: Representação estratégica

Pris. 1 \ Pris. 2	**Confessa**	**Não conf.**
Confessa	$-6,-6$ [1]	$-1,-10$ [1]
N. Confessa	$-10,-1$	$-3,-3$

[1] **estratégia do prisioneiro 1 é melhor resposta**

[2] **estratégia do prisioneiro 2 é melhor resposta**

O Dilema dos Prisioneiros: Representação estratégica

		Pris. 2	
		Confessa	**Não conf.**
Pris. 1	**Confessa**	$-6,-6$ [1,2]	$-1,-10$ [1]
	N. Confessa	$-10,-1$	$-3,-3$

[1] **estratégia do prisioneiro 1 é melhor resposta**

[2] **estratégia do prisioneiro 2 é melhor resposta**

O Dilema dos Prisioneiros: Representação estratégica

		Pris. 2	
		Confessa	**Não conf.**
Pris. 1	**Confessa**	$-6,-6$ [1,2]	$-1,-10$ [1]
	N. Confessa	$-10,-1$ [2]	$-3,-3$

[1] **estratégia do prisioneiro 1 é melhor resposta**

[2] **estratégia do prisioneiro 2 é melhor resposta**

Exemplo: disputas trabalhistas

Porcentagem de casos ganhos em disputas trabalhistas nos EUA

		Sindicato	
		C/ Advogado	**S/ Advogado**
Emp.	**C/ Advogado**	$54,46$	$73,27$
	S/ Advogado	$23,77$	$56,44$

^{E} **Estratégia da empresa é melhor resposta**

^{S} **Estratégia do sindicato é melhor resposta**

Exemplo: disputas trabalhistas

Porcentagem de casos ganhos em disputas trabalhistas nos EUA

		Sindicato	
		C/ Advogado	**S/ Advogado**
Emp.	**C/ Advogado**	$54,46^{E}$	$73,27^{E}$
	S/ Advogado	$23,77$	$56,44$

^{E} **Estratégia da empresa é melhor resposta**

^{S} **Estratégia do sindicato é melhor resposta**

Exemplo: disputas trabalhistas

Porcentagem de casos ganhos em disputas trabalhistas nos EUA

		Sindicato	
		C/ Advogado	**S/ Advogado**
Emp.	**C/ Advogado**	$54,46^{E,S}$	$73,27^{E}$
	S/ Advogado	$23,77^{S}$	$56,44$

^{E} **Estratégia da empresa é melhor resposta**

^{S} **Estratégia do sindicato é melhor resposta**

A batalha do Mar de Bismark: quando apenas um jogador possui estratégia dominante

Força Aer. Americana

Marinha Japonesa

	Norte	**Sul**
Norte	2	2
Sul	1	3

^{A} **Melhor resposta americana**

^{J} **Melhor resposta japonesa**

A batalha do Mar de Bismark: quando apenas um jogador possui estratégia dominante

Força Aer. Americana

Marinha Japonesa

	Norte	**Sul**
Norte	2^{A}	2
Sul	1	3^{A}

^{A} **Melhor resposta americana**

^{J} **Melhor resposta japonesa**

A batalha do Mar de Bismark: quando apenas um jogador possui estratégia dominante

Força Aer. Americana

Marinha Japonesa

	Norte	**Sul**
Norte	2^{A}	2
Sul	1	3^{A}

^{A} **Melhor resposta americana**

^{J} **Melhor resposta japonesa**

A batalha do Mar de Bismark: quando apenas um jogador possui estratégia dominante

Força Aer. Americana

Marinha Japonesa

	Norte	**Sul**
Norte	$2^{A,J}$	2^{J}
Sul	1	3^{A}

^{A} **Melhor resposta americana**

^{J} **Melhor resposta japonesa**

A batalha do Mar de Bismark: quando apenas um jogador possui estratégia dominante

Força Aer. Americana

Marinha Japonesa

	Norte	**Sul**
Norte	$2^{A,J}$	2^{J}
Sul	1^{J}	3^{A}

^{A} **Melhor resposta americana**

^{J} **Melhor resposta japonesa**

A batalha do Mar de Bismark: quando apenas um jogador possui estratégia dominante

		Marinha Japonesa	
		Norte	**Sul**
Força Aer. Americana	**Norte**	$2^{A,J}$	2^{J}
	Sul	1^{J}	3^{A}

^{A} **Melhor resposta americana**

^{J} **Melhor resposta japonesa**

Solução

- A marinha japonesa deve escolher norte.

A batalha do Mar de Bismark: quando apenas um jogador possui estratégia dominante

		Marinha Japonesa	
		Norte	**Sul**
Força Aer. Americana	**Norte**	$2^{A,J}$	2^{J}
	Sul	1^{J}	3^{A}

^{A} **Melhor resposta americana**

^{J} **Melhor resposta japonesa**

Solução

- A marinha japonesa deve escolher norte.
- Sabendo disso, a força aérea americana escolherá norte.

Sumário

1 Representação de jogos com movimentos simultâneos

2 Estratégias dominantes

3 **Equilíbrio de Nash**

4 O modelo de Cournot

5 O Modelo de Bertrand

6 Jogos com repetição

Equilíbrio de Nash

Definição

Dizemos que ocorre um **equilíbrio de Nash** quando cada jogador dá a melhor resposta à estratégia adotada pelo outro jogador.

Exemplo: guerra de preços entre as pizzarias de um bairro

Lucros segundo política de preços

		Dom Pepe		
		Alto	**Médio**	**Baixo**
Zia Peppa	**Alto**	$60, 60$	$36, 70$	$36, 35$
	Médio	$70, 36$	$50, 50$	$30, 35$
	Baixo	$35, 36$	$35, 30$	$25, 25$

^{z} **estratégia de Zia Peppa é melhor resposta**

^{d} **estratégia de Dom Pepe é melhor resposta**

Exemplo: guerra de preços entre as pizzarias de um bairro

Lucros segundo política de preços

		Dom Pepe		
		Alto	**Médio**	**Baixo**
Zia Peppa	**Alto**	$60, 60$	$36, 70$	$36, 35$
	Médio	$70, 36^z$	$50, 50$	$30, 35$
	Baixo	$35, 36$	$35, 30$	$25, 25$

^{z} **estratégia de Zia Peppa é melhor resposta**

^{d} **estratégia de Dom Pepe é melhor resposta**

Exemplo: guerra de preços entre as pizzarias de um bairro

Lucros segundo política de preços

		Dom Pepe: Alto	Dom Pepe: Médio	Dom Pepe: Baixo
Zia Peppa	**Alto**	$60, 60$	$36, 70$	$36, 35$
	Médio	$70, 36^z$	$50, 50^z$	$30, 35$
	Baixo	$35, 36$	$35, 30$	$25, 25$

^{z} **estratégia de Zia Peppa é melhor resposta**

^{d} **estratégia de Dom Pepe é melhor resposta**

Exemplo: guerra de preços entre as pizzarias de um bairro

Lucros segundo política de preços

		Dom Pepe		
		Alto	**Médio**	**Baixo**
Zia Peppa	**Alto**	$60, 60$	$36, 70$	$36, 35^z$
	Médio	$70, 36^z$	$50, 50^z$	$30, 35$
	Baixo	$35, 36$	$35, 30$	$25, 25$

^{z} estratégia de Zia Peppa é melhor resposta

^{d} estratégia de Dom Pepe é melhor resposta

Exemplo: guerra de preços entre as pizzarias de um bairro

Lucros segundo política de preços

		Dom Pepe		
		Alto	**Médio**	**Baixo**
Zia Peppa	**Alto**	$60, 60$	$36, 70^{d}$	$36, 35^{z}$
	Médio	$70, 36^{z}$	$50, 50^{z}$	$30, 35$
	Baixo	$35, 36$	$35, 30$	$25, 25$

^{z} **estratégia de Zia Peppa é melhor resposta**

^{d} **estratégia de Dom Pepe é melhor resposta**

Exemplo: guerra de preços entre as pizzarias de um bairro

Lucros segundo política de preços

		Dom Pepe: **Alto**	Dom Pepe: **Médio**	Dom Pepe: **Baixo**
Zia Peppa	**Alto**	$60, 60$	$36, 70^{d}$	$36, 35^{z}$
	Médio	$70, 36^{z}$	$50, 50^{z,d}$	$30, 35$
	Baixo	$35, 36$	$35, 30$	$25, 25$

^{z} **estratégia de Zia Peppa é melhor resposta**

^{d} **estratégia de Dom Pepe é melhor resposta**

Exemplo: guerra de preços entre as pizzarias de um bairro

Lucros segundo política de preços

		Dom Pepe: **Alto**	Dom Pepe: **Médio**	Dom Pepe: **Baixo**
Zia Peppa	**Alto**	$60, 60$	$36, 70^{d}$	$36, 35^{z}$
	Médio	$70, 36^{z}$	$50, 50^{z,d}$	$30, 35$
	Baixo	$35, 36^{d}$	$35, 30$	$25, 25$

^{z} **estratégia de Zia Peppa é melhor resposta**

^{d} **estratégia de Dom Pepe é melhor resposta**

Exemplo: guerra de preços entre as pizzarias de um bairro

Lucros segundo política de preços

		Dom Pepe		
		Alto	**Médio**	**Baixo**
Zia Peppa	**Alto**	$60, 60$	$36, 70^{d}$	$36, 35^{z}$
	Médio	$70, 36^{z}$	$50, 50^{z,d}$	$30, 35$
	Baixo	$35, 36^{d}$	$35, 30$	$25, 25$

^{z} **estratégia de Zia Peppa é melhor resposta**

^{d} **estratégia de Dom Pepe é melhor resposta**

Múltiplos equilíbrio e coordenação

Exemplo: Batalha dos Sexos

		Ele: **Ballet**	Ele: **Futebol**
Ela	**Ballet**	2, 1	0, 0
Ela	**Futebol**	0, 0	1, 2

♀ **Escolha dela é melhor resposta.**

♂ **Escolha dele é melhor resposta.**

Múltiplos equilíbrio e coordenação

Exemplo: Batalha dos Sexos

		Ele: **Ballet**	Ele: **Futebol**
Ela	**Ballet**	$2, 1^{\♀}$	$0, 0$
	Futebol	$0, 0$	$1, 2$

♀ **Escolha dela é melhor resposta.**

♂ **Escolha dele é melhor resposta.**

Múltiplos equilíbrio e coordenação

Exemplo: Batalha dos Sexos

		Ele: **Ballet**	Ele: **Futebol**
Ela	**Ballet**	$2, 1$ ♀	$0, 0$
	Futebol	$0, 0$	$1, 2$ ♀

♀ **Escolha dela é melhor resposta.**

♂ **Escolha dele é melhor resposta.**

Múltiplos equilíbrio e coordenação

Exemplo: Batalha dos Sexos

		Ele: **Ballet**	Ele: **Futebol**
Ela	**Ballet**	$2, 1^{♀,♂}$	$0, 0$
	Futebol	$0, 0$	$1, 2^{♀}$

♀ **Escolha dela é melhor resposta.**

♂ **Escolha dele é melhor resposta.**

Múltiplos equilíbrio e coordenação

Exemplo: Batalha dos Sexos

		Ele: **Ballet**	Ele: **Futebol**
Ela	**Ballet**	$2, 1^{♀,♂}$	$0, 0$
	Futebol	$0, 0$	$1, 2^{♀,♂}$

♀ **Escolha dela é melhor resposta.**

♂ **Escolha dele é melhor resposta.**

Múltiplos equilíbrios: ponto focal.

Exemplo: Corrida armamentista – controlar ou construir armas nucleares

		U.R.S.S.	
		Controla	**Constrói**
U.S.A.	**Controla**	$4, 4$	$1, 3$
	Constrói	$3, 1$	$2, 2$

- A **U.S.A. escolheram a melhor resposta**
- R **U.R.S.S. escolheram a melhor resposta**

Múltiplos equilíbrios: ponto focal.

Exemplo: Corrida armamentista – controlar ou construir armas nucleares

		U.R.S.S.	
		Controla	**Constrói**
U.S.A.	**Controla**	$4, 4^A$	$1, 3$
	Constrói	$3, 1$	$2, 2$

^{A} **U.S.A. escolheram a melhor resposta**

^{R} **U.R.S.S. escolheram a melhor resposta**

Múltiplos equilíbrios: ponto focal.

Exemplo: Corrida armamentista – controlar ou construir armas nucleares

		U.R.S.S.	
		Controla	**Constrói**
U.S.A.	**Controla**	$4, 4^A$	$1, 3$
	Constrói	$3, 1$	$2, 2^A$

^{A} **U.S.A. escolheram a melhor resposta**

^{R} **U.R.S.S. escolheram a melhor resposta**

Múltiplos equilíbrios: ponto focal.

Exemplo: Corrida armamentista – controlar ou construir armas nucleares

		U.R.S.S.	
		Controla	**Constrói**
U.S.A.	**Controla**	$4, 4^{A,R}$	$1, 3$
	Constrói	$3, 1$	$2, 2^{A}$

^{A} **U.S.A. escolheram a melhor resposta**

^{R} **U.R.S.S. escolheram a melhor resposta**

Múltiplos equilíbrios: ponto focal.

Exemplo: Corrida armamentista – controlar ou construir armas nucleares

		U.R.S.S.	
		Controla	**Constrói**
U.S.A.	**Controla**	$4, 4^{A,R}$	$1, 3$
	Constrói	$3, 1$	$2, 2^{A,R}$

^{A} **U.S.A. escolheram a melhor resposta**

^{R} **U.R.S.S. escolheram a melhor resposta**

Infinitas escolhas

Exemplo: o jogo da metade da média

Dois jogadores devem escolher simultaneamente um número real maior ou igual a zero e menor ou igual a 100. Se o número escolhido por um jogador for igual à metade da média entre os dois números escolhidos, esse jogador ganhará um prêmio de R$5.000,00.

Solução

Sejam x_1 o número escolhido pelo jogador 1 e x_2 o número escolhido pelo jogador 2. Para que x_1 seja a melhor escolha do jogador 1 dado x_2 é preciso que

Solução

Sejam x_1 o número escolhido pelo jogador 1 e x_2 o número escolhido pelo jogador 2. Para que x_1 seja a melhor escolha do jogador 1 dado x_2 é preciso que

$$x_1 = \frac{(x_1 + x_2)/2}{2}$$

Solução

Sejam x_1 o número escolhido pelo jogador 1 e x_2 o número escolhido pelo jogador 2. Para que x_1 seja a melhor escolha do jogador 1 dado x_2 é preciso que

$$x_1 = \frac{(x_1 + x_2)/2}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{x_2}{3}. \quad (1)$$

Solução

Sejam x_1 o número escolhido pelo jogador 1 e x_2 o número escolhido pelo jogador 2. Para que x_1 seja a melhor escolha do jogador 1 dado x_2 é preciso que

$$x_1 = \frac{(x_1 + x_2)/2}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{x_2}{3}. \quad (1)$$

Para que x_2 seja a melhor escolha do jogador 2 dado x_1 é preciso que

$$x_2 = \frac{(x_1 + x_2)/2}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{x_1}{3}. \quad (2)$$

Solução

Sejam x_1 o número escolhido pelo jogador 1 e x_2 o número escolhido pelo jogador 2. Para que x_1 seja a melhor escolha do jogador 1 dado x_2 é preciso que

$$x_1 = \frac{(x_1 + x_2)/2}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{x_2}{3}. \quad (1)$$

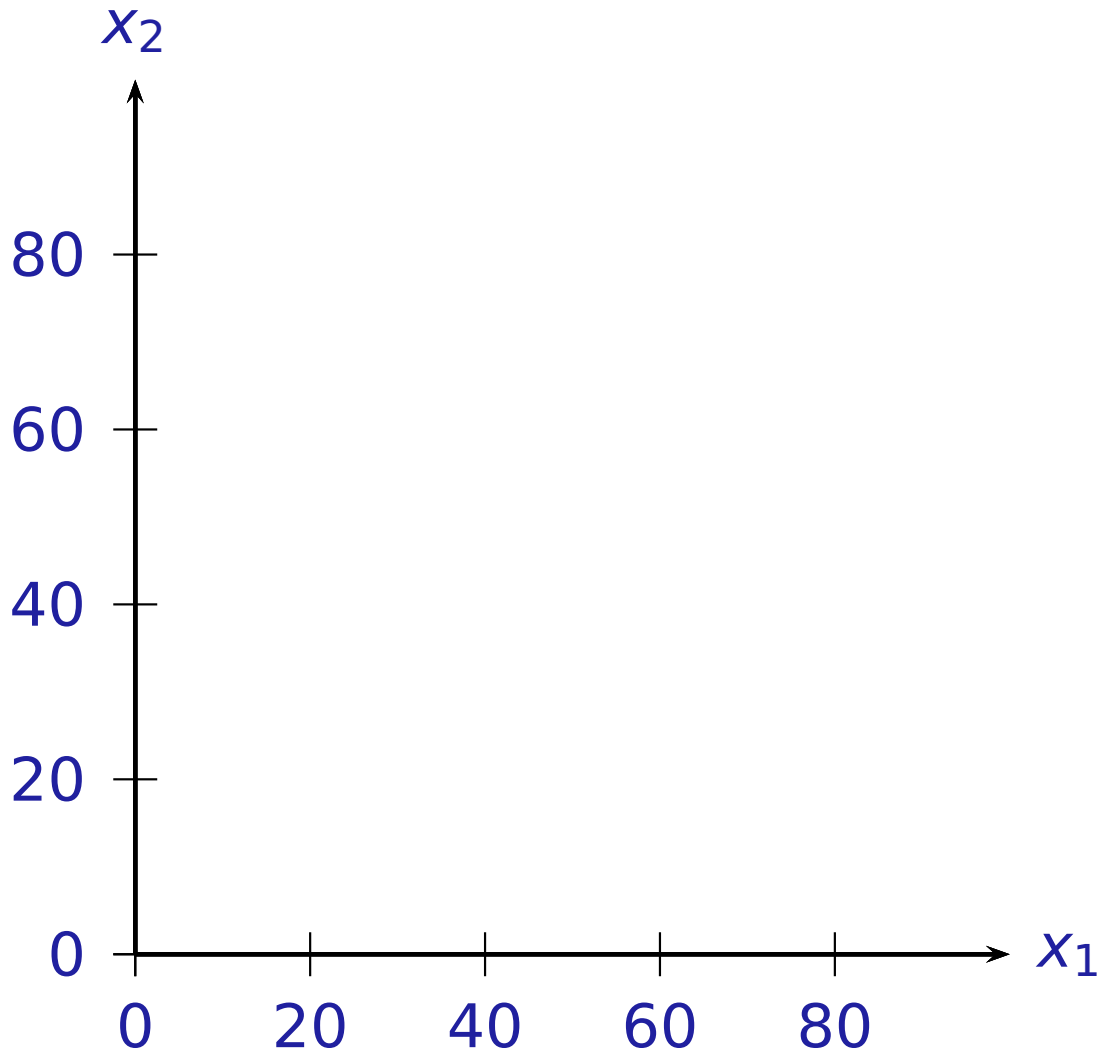
Para que x_2 seja a melhor escolha do jogador 2 dado x_1 é preciso que

$$x_2 = \frac{(x_1 + x_2)/2}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{x_1}{3}. \quad (2)$$

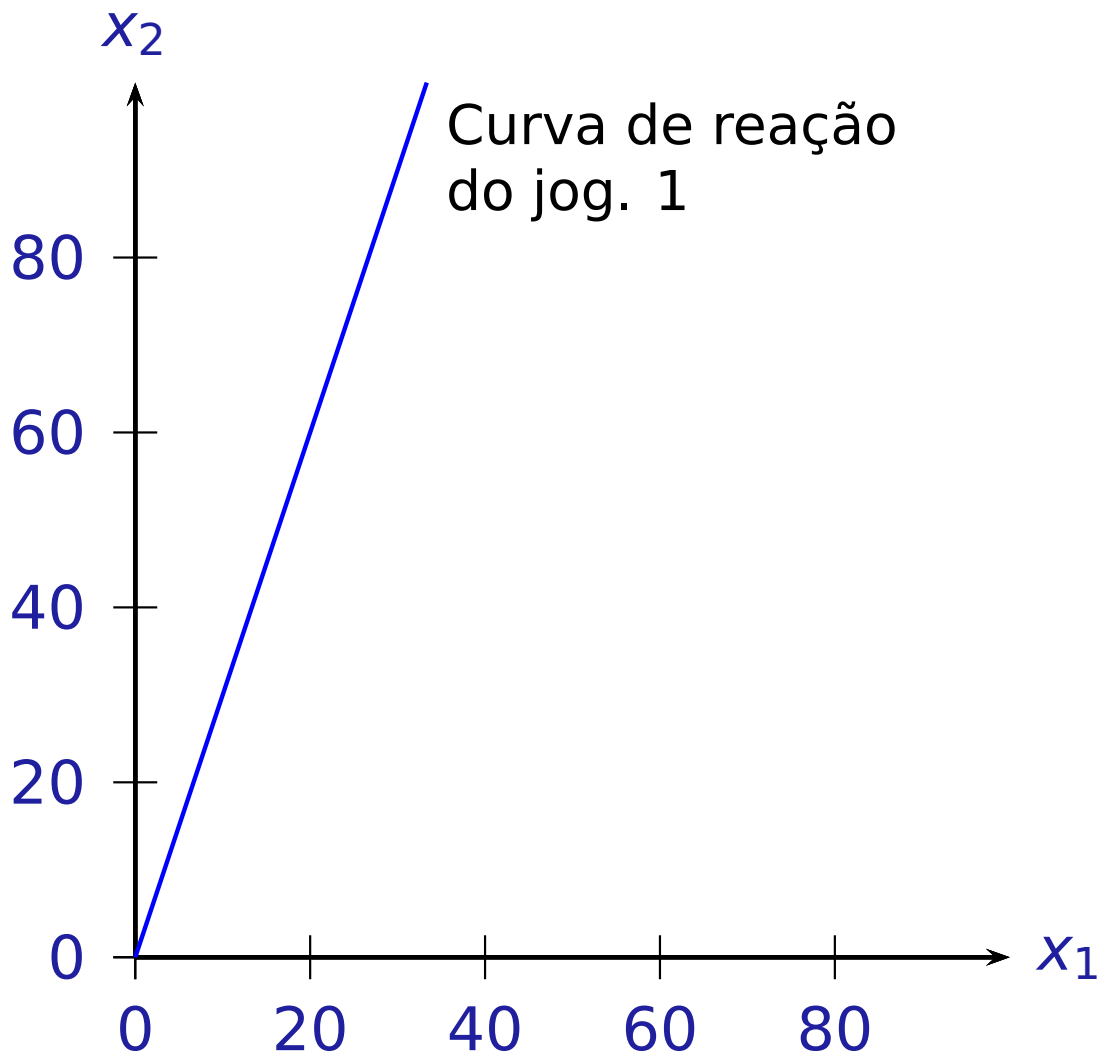
O equilíbrio de Nash ocorre quando (1) e (2) ocorrem simultaneamente, ou seja quando

$$x_1 = x_2 = 0$$

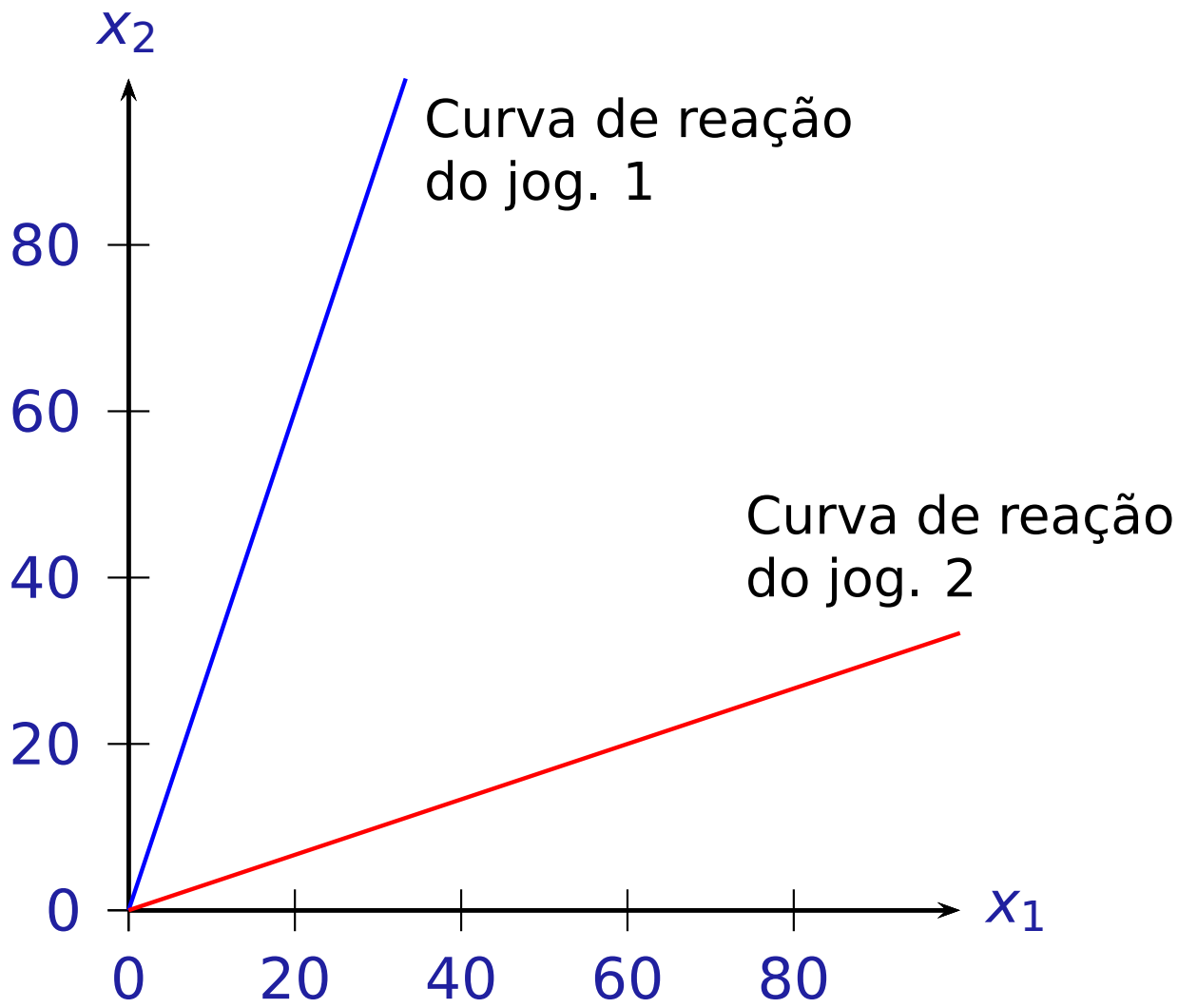
Solução gráfica



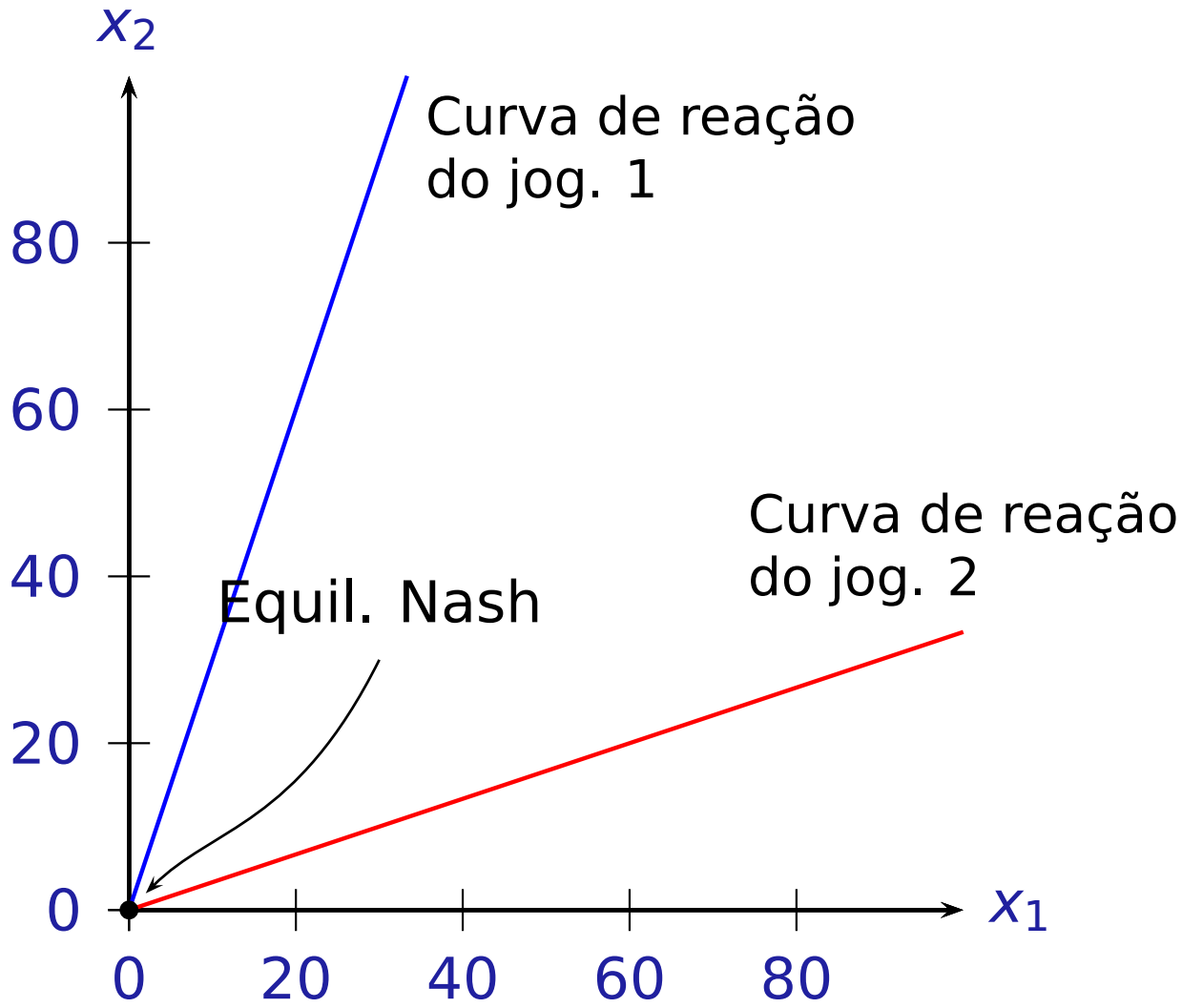
Solução gráfica



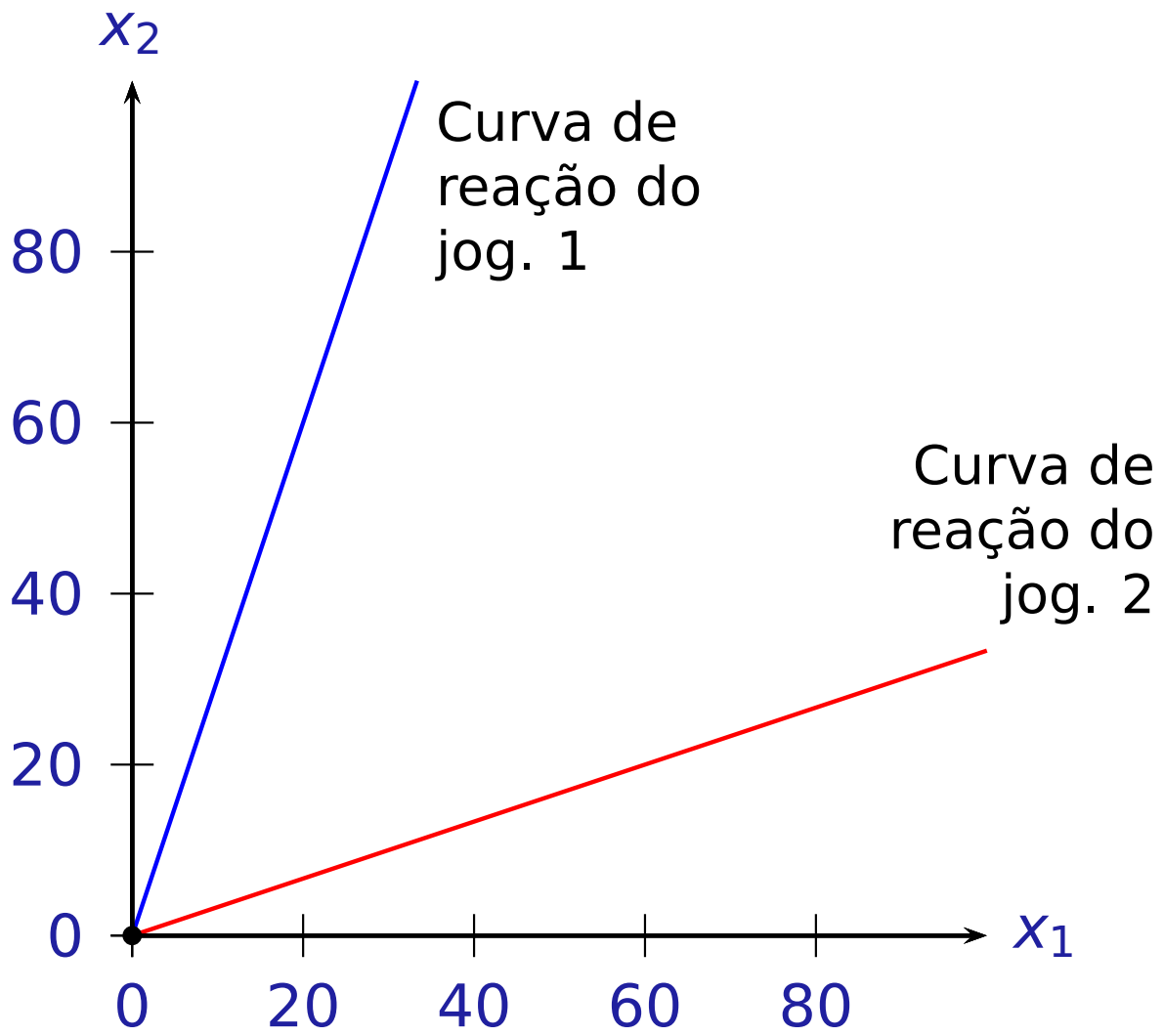
Solução gráfica



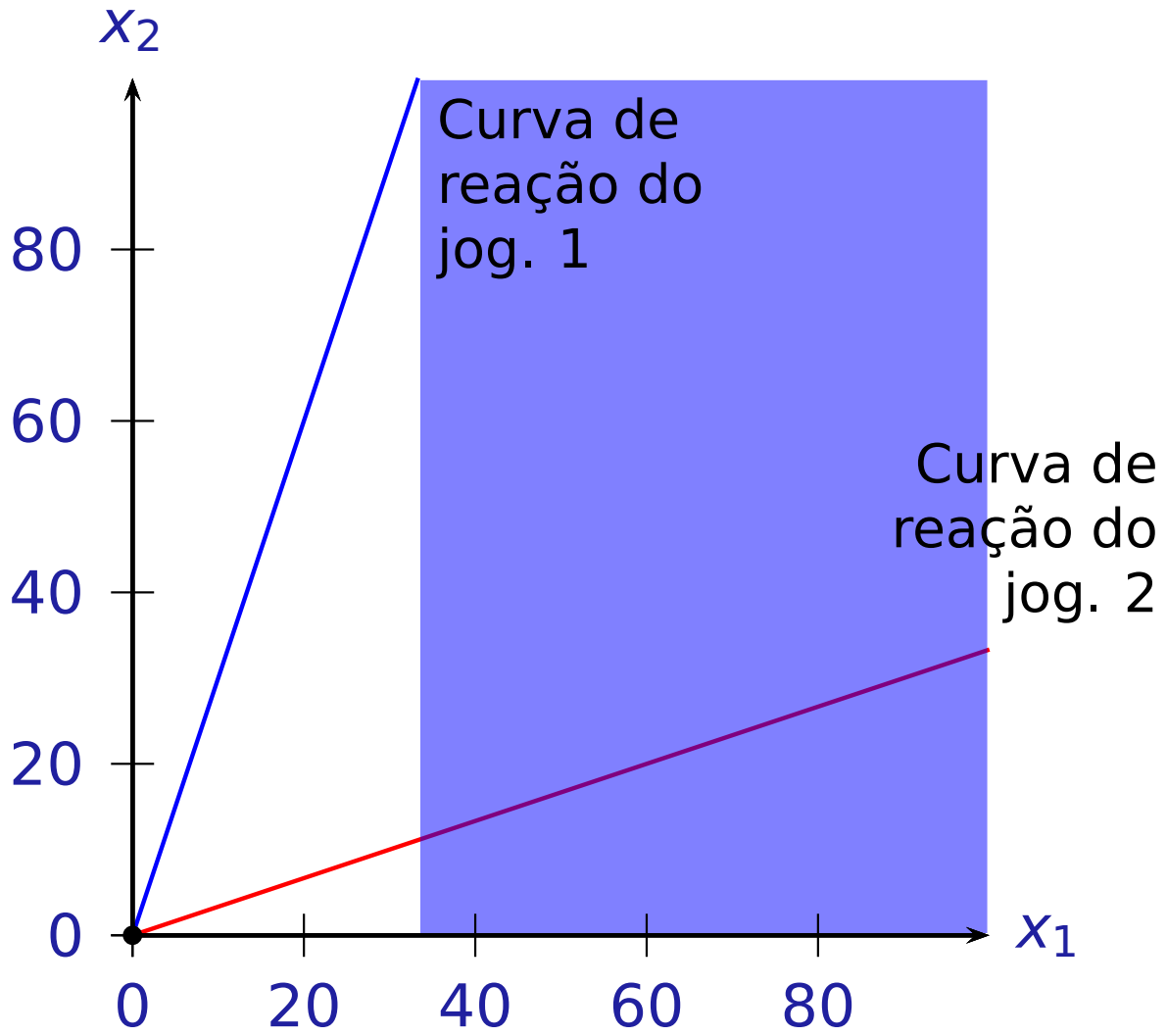
Solução gráfica



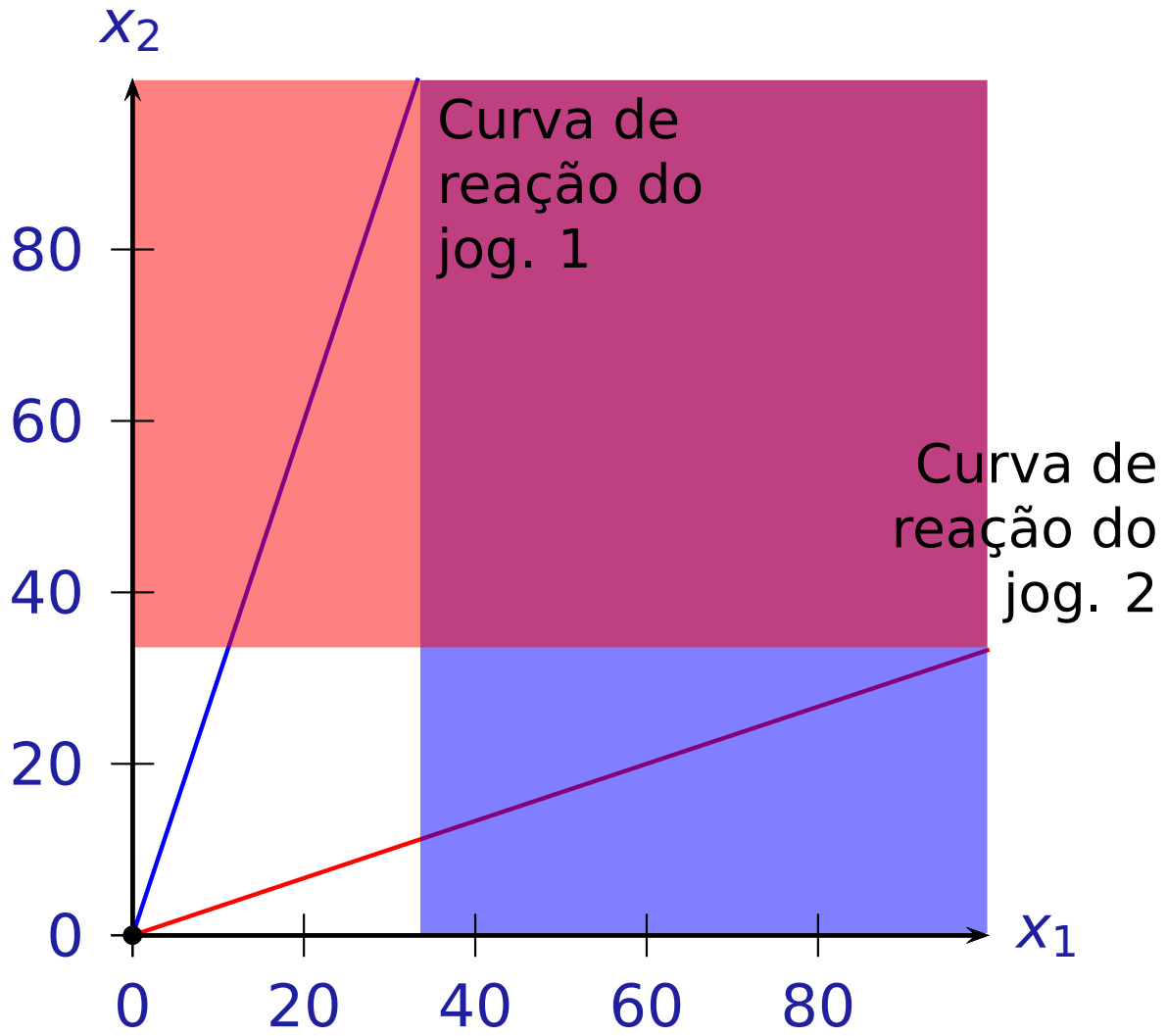
Racionalização do equilíbrio



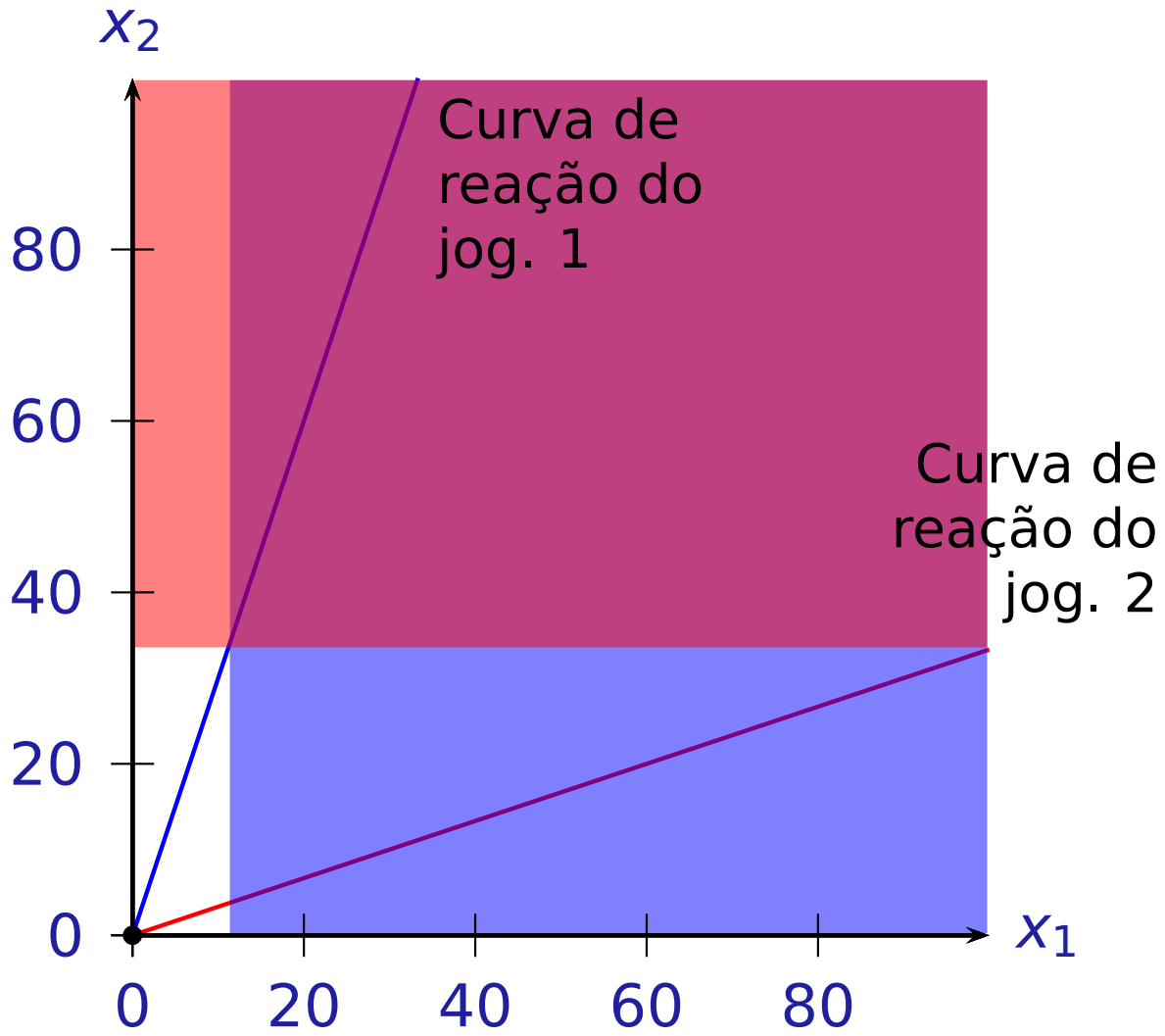
Racionalização do equilíbrio



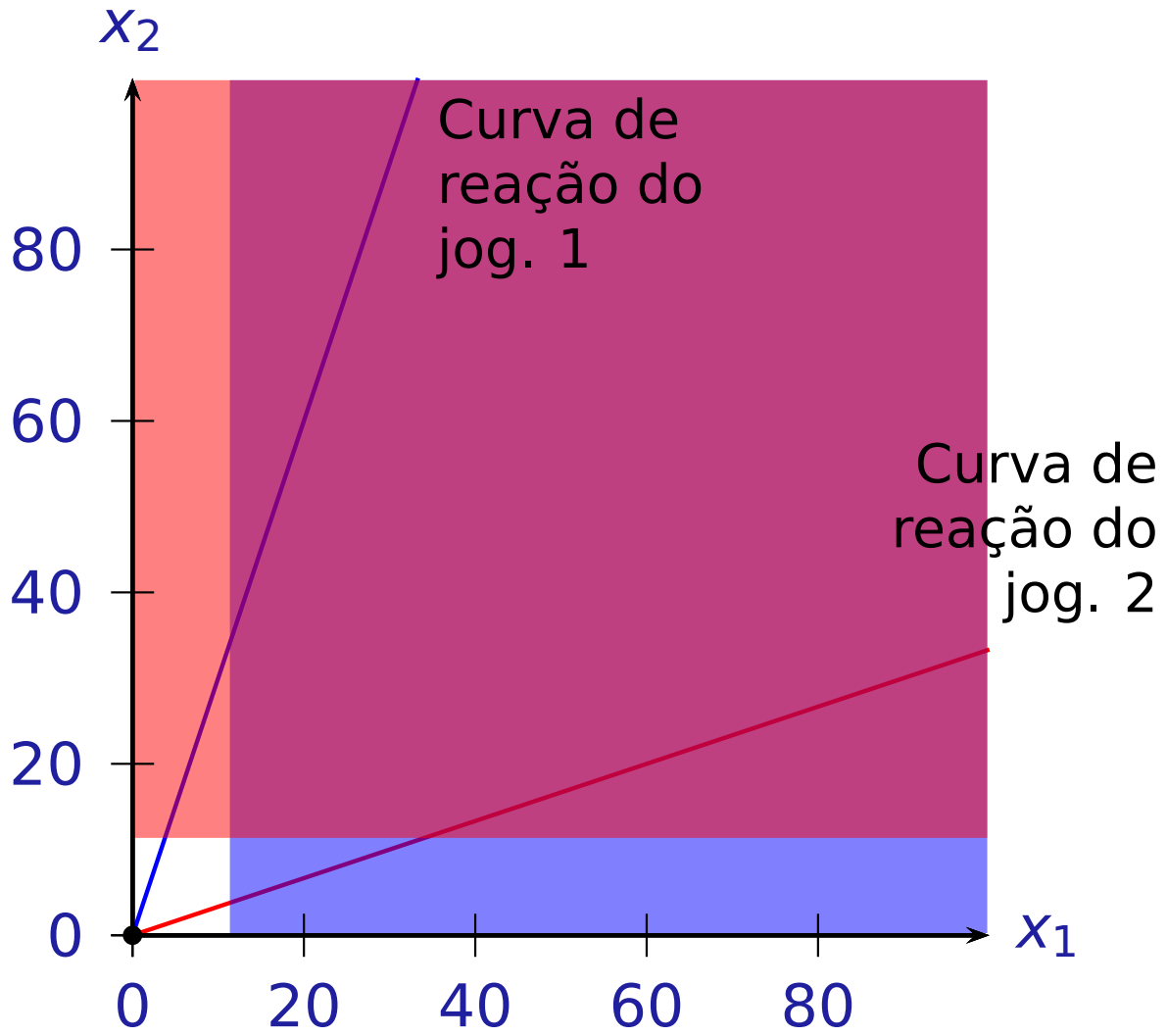
Racionalização do equilíbrio



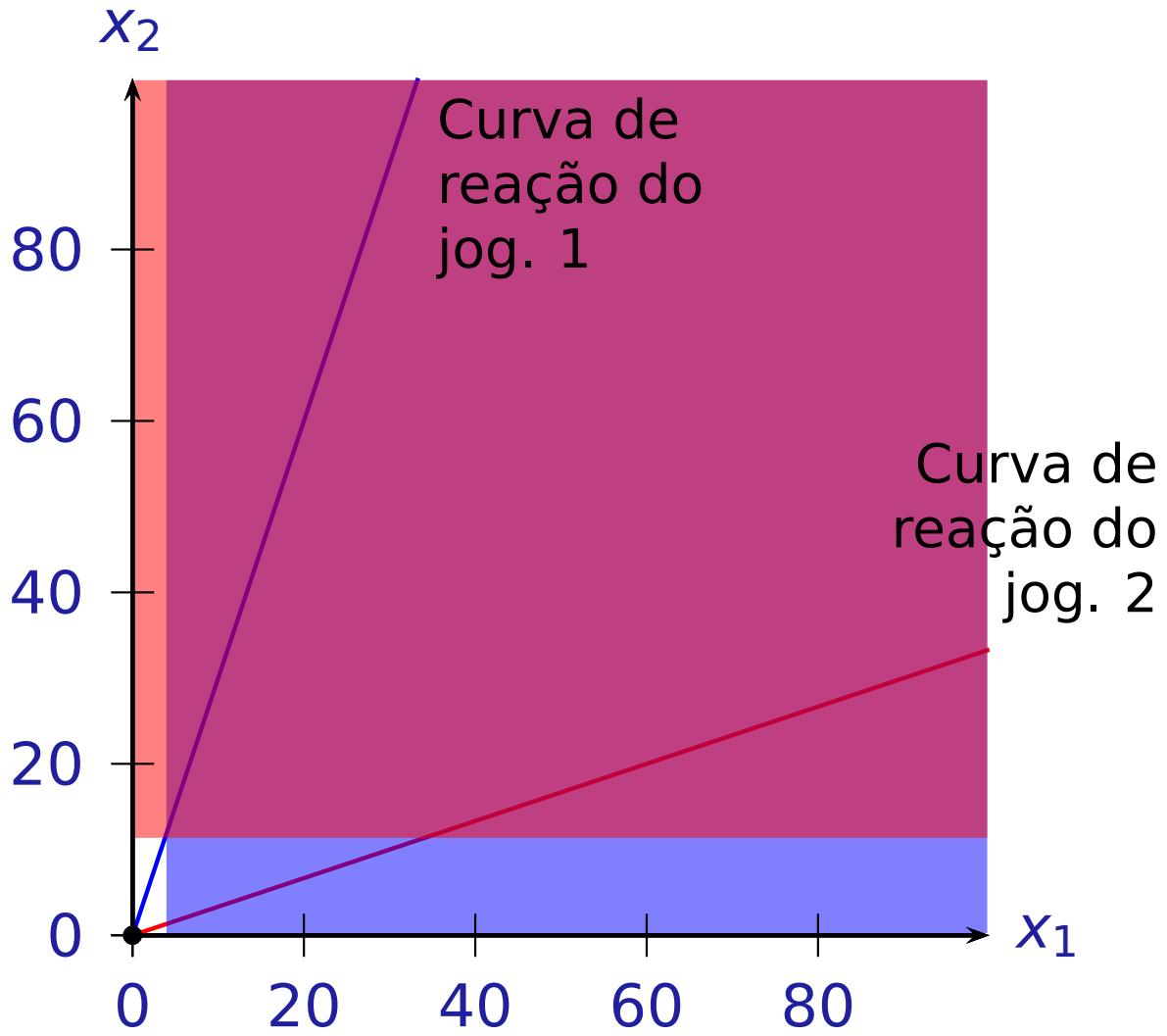
Racionalização do equilíbrio



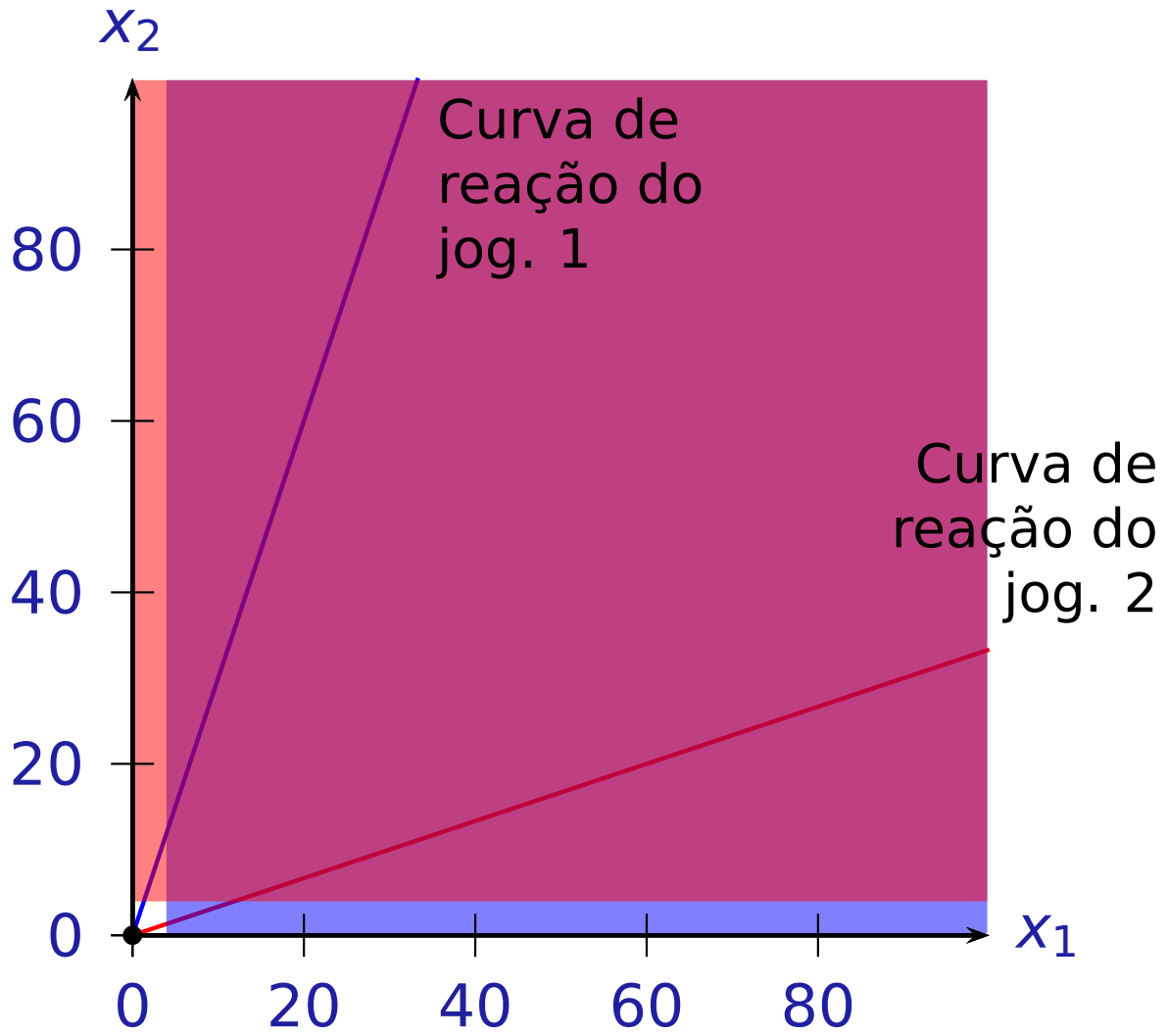
Racionalização do equilíbrio



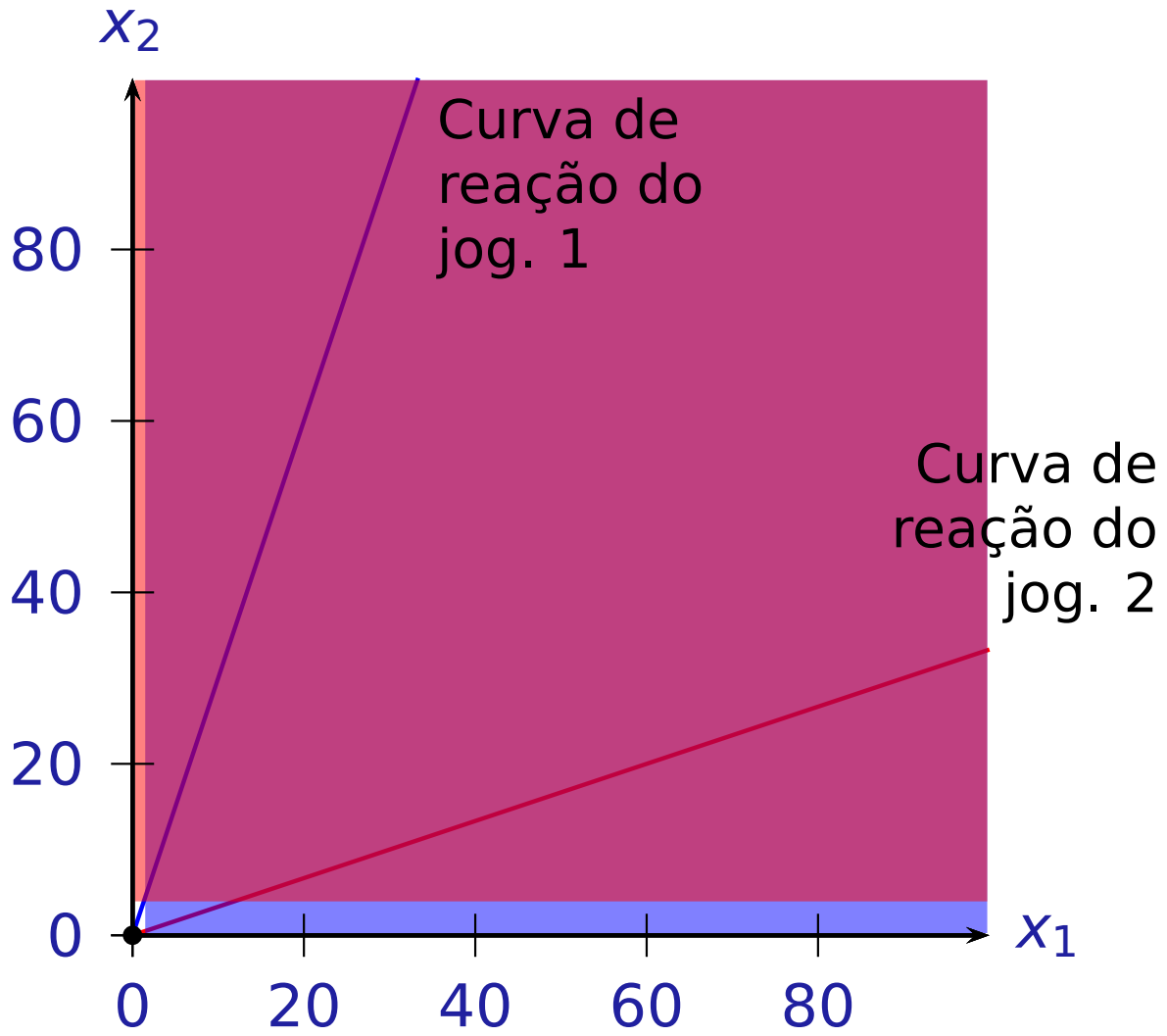
Racionalização do equilíbrio



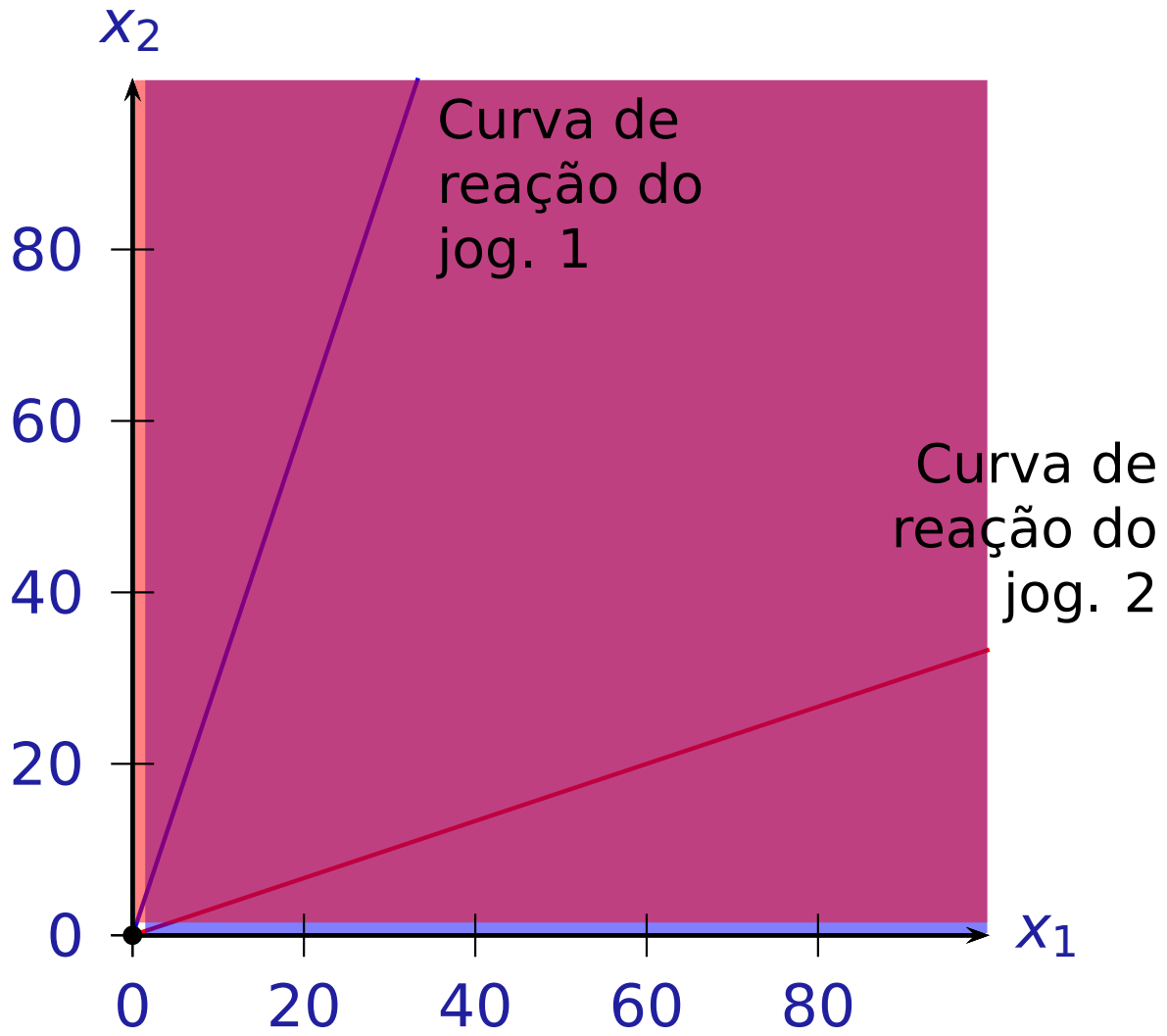
Racionalização do equilíbrio



Racionalização do equilíbrio



Racionalização do equilíbrio



Sumário

1 Representação de jogos com movimentos simultâneos

2 Estratégias dominantes

3 Equilíbrio de Nash

4 O modelo de Cournot

5 O Modelo de Bertrand

6 Jogos com repetição

O Modelo de Cournot

Duopólio de Cournot com custo marginal constante e demanda linear.

Duas empresas são as únicas a produzir um determinado bem. Cada uma delas produz com um custo médio constante igual a c. A função de demanda por esse bem é dada por $p = a - b(y_1 + y_2)$ na qual p é o preço de demanda e y_1 e y_2 são as quantidades produzidas pelas empresas 1 e 2, respectivamente.

Solução: equilíbrio de Nash

Os lucros da empresa 1, π_1, e da empresa 2, π_2, são iguais a

$$\pi_1 = [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - c\,y_1$$

Solução: equilíbrio de Nash

Os lucros da empresa 1, π_1, e da empresa 2, π_2, são iguais a

$$\pi_1 = [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - c\,y_1$$
$$\pi_2 = [a - b(y_1 + y_2)]y_2 - c\,y_2$$

Solução: equilíbrio de Nash

Os lucros da empresa 1, π_1, e da empresa 2, π_2, são iguais a

$$\pi_1 = [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - c\,y_1$$
$$\pi_2 = [a - b(y_1 + y_2)]y_2 - c\,y_2$$

As funções de melhor resposta dessas empresas serão, portanto

$$y_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_2}{2} \tag{3}$$

Solução: equilíbrio de Nash

Os lucros da empresa 1, π_1, e da empresa 2, π_2, são iguais a

$$\pi_1 = [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - c\,y_1$$
$$\pi_2 = [a - b(y_1 + y_2)]y_2 - c\,y_2$$

As funções de melhor resposta dessas empresas serão, portanto

$$y_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_2}{2} \tag{3}$$
$$y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2} \tag{4}$$

Solução: equilíbrio de Nash

Os lucros da empresa 1, π_1, e da empresa 2, π_2, são iguais a

$$\pi_1 = [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - c\,y_1$$
$$\pi_2 = [a - b(y_1 + y_2)]y_2 - c\,y_2$$

As funções de melhor resposta dessas empresas serão, portanto

$$y_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_2}{2} \tag{3}$$
$$y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2} \tag{4}$$

O equilíbrio de Nash é obtido quando (3) e (4) são simultaneamente verdadeiros, ou seja, quando

$$y_1 = y_2 = \frac{a-c}{3b}$$

Solução: equilíbrio de Nash (cont.)

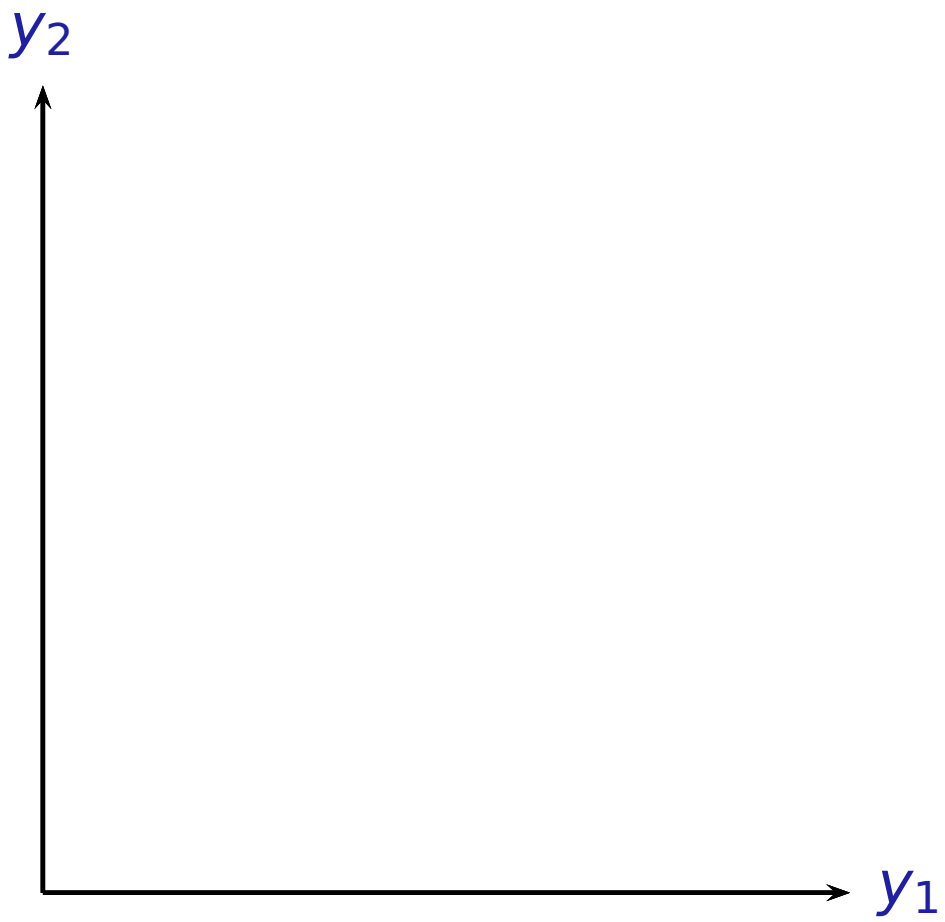
Substituindo $q_a = 3$ e $q_b = 3$ na função de demanda, obtemos o preço de equilíbrio.

$$p = a - b(y_1 + y_2) = a - 2b\frac{a-c}{3b} = \frac{a+2c}{3}$$

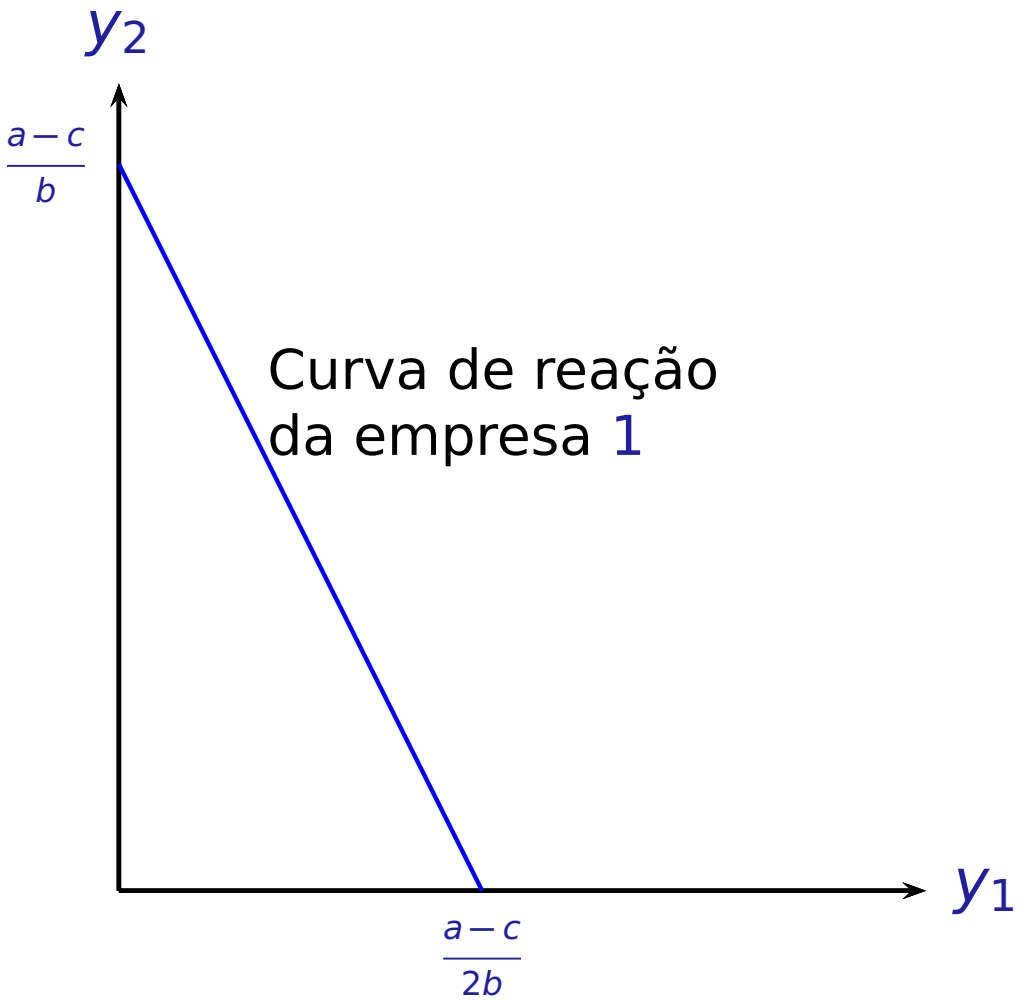
Substituindo essas valores nas expressões do lucro de cada empresa, obtemos

$$\pi_1 = \frac{a+2c}{3}\frac{a-c}{3b} - c\frac{a-c}{3b} = \frac{1}{9b}(a-c)^2$$
$$\pi_2 = \frac{a+2c}{3}\frac{a-c}{3b} - c\frac{a-c}{3b} = \frac{1}{9b}(a-c)^2$$

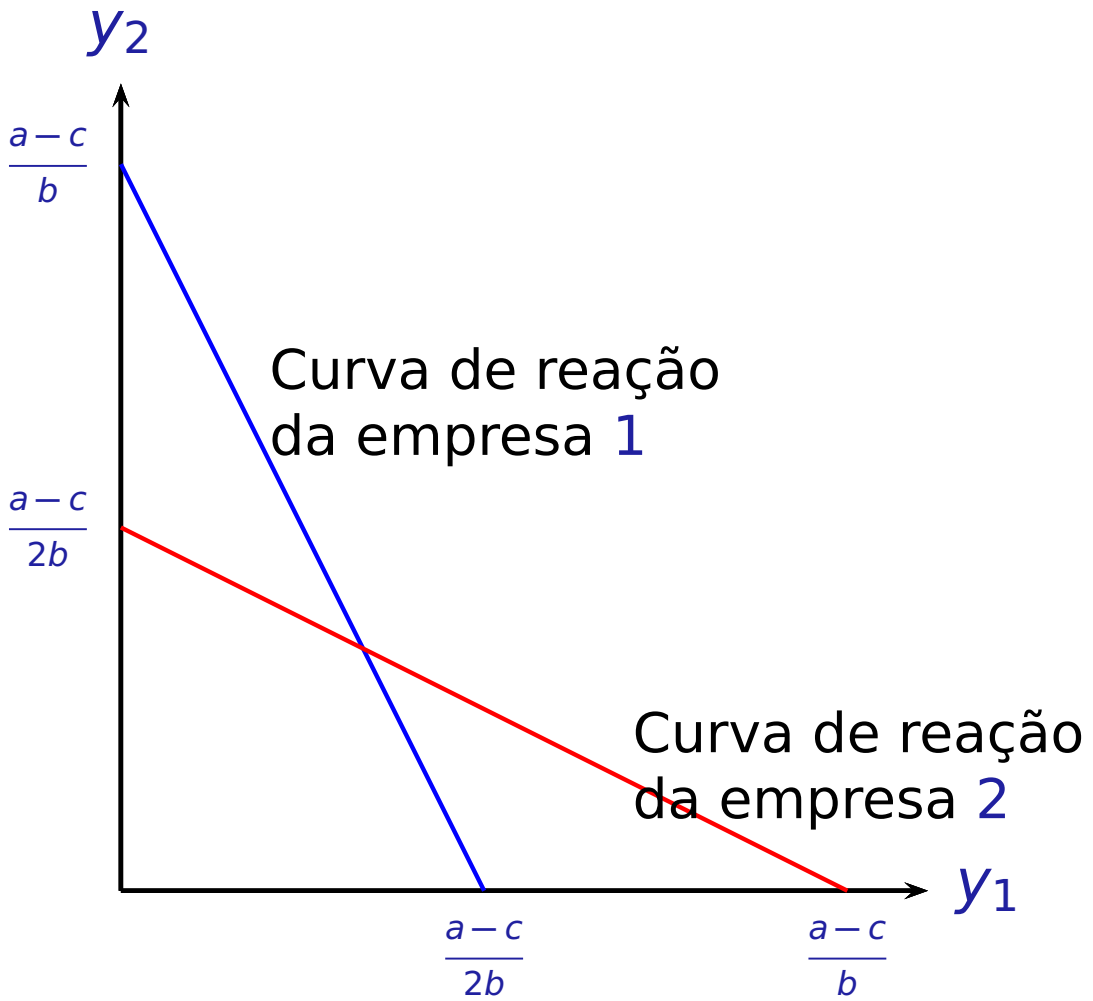
Equilíbrio de Nash: Solução Gráfica



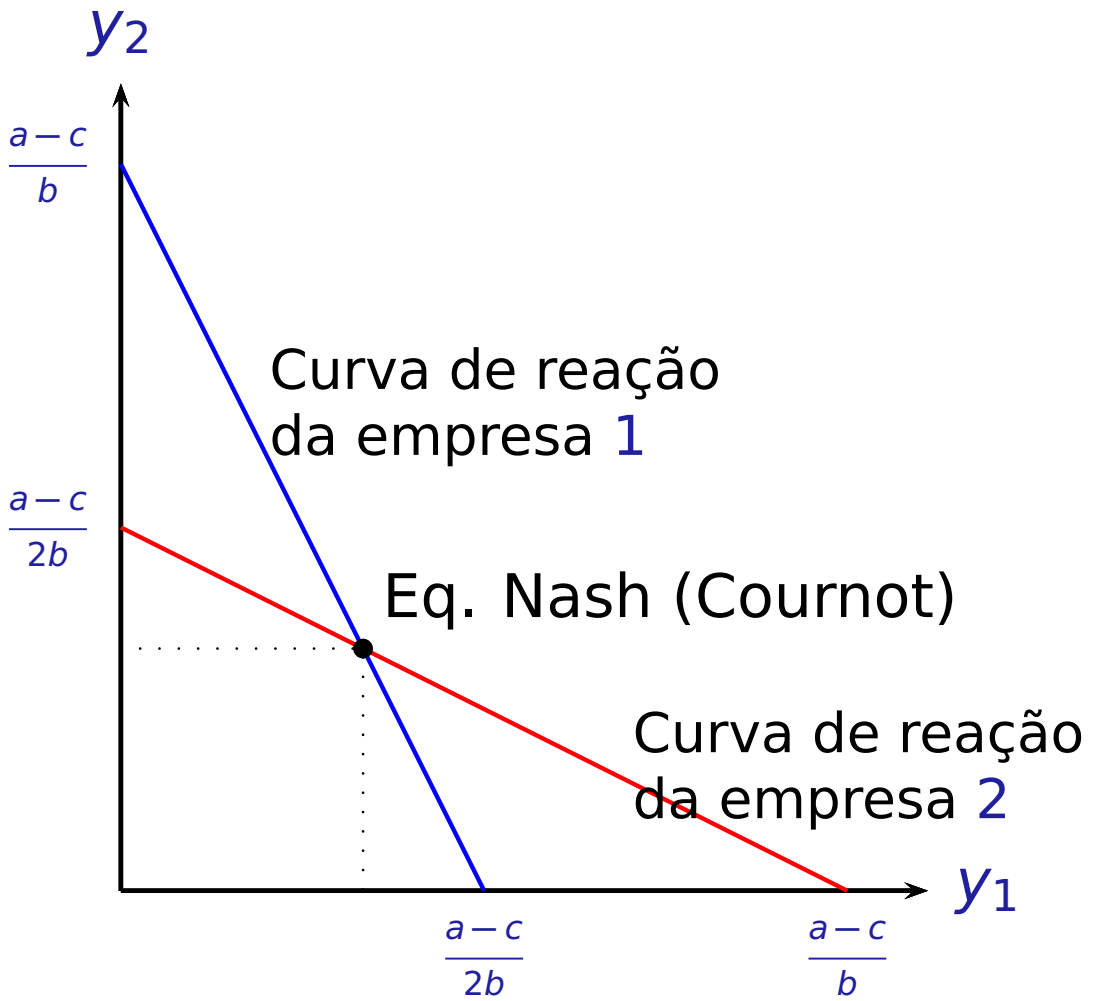
Equilíbrio de Nash: Solução Gráfica



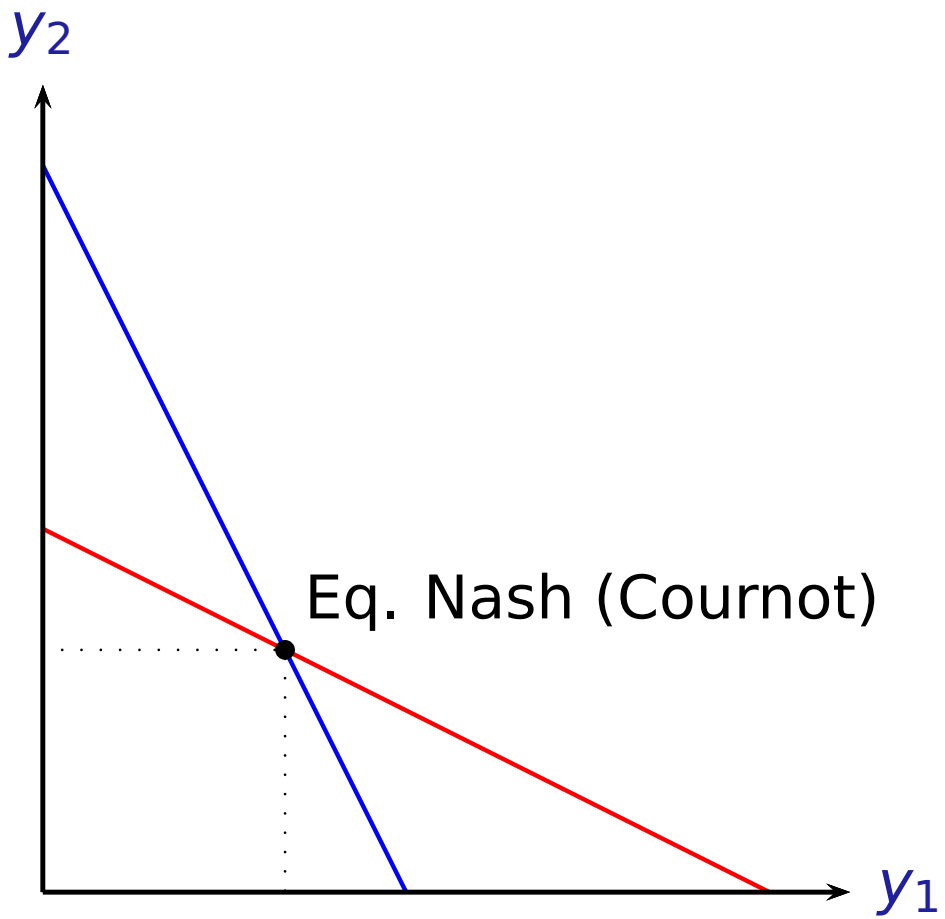
Equilíbrio de Nash: Solução Gráfica



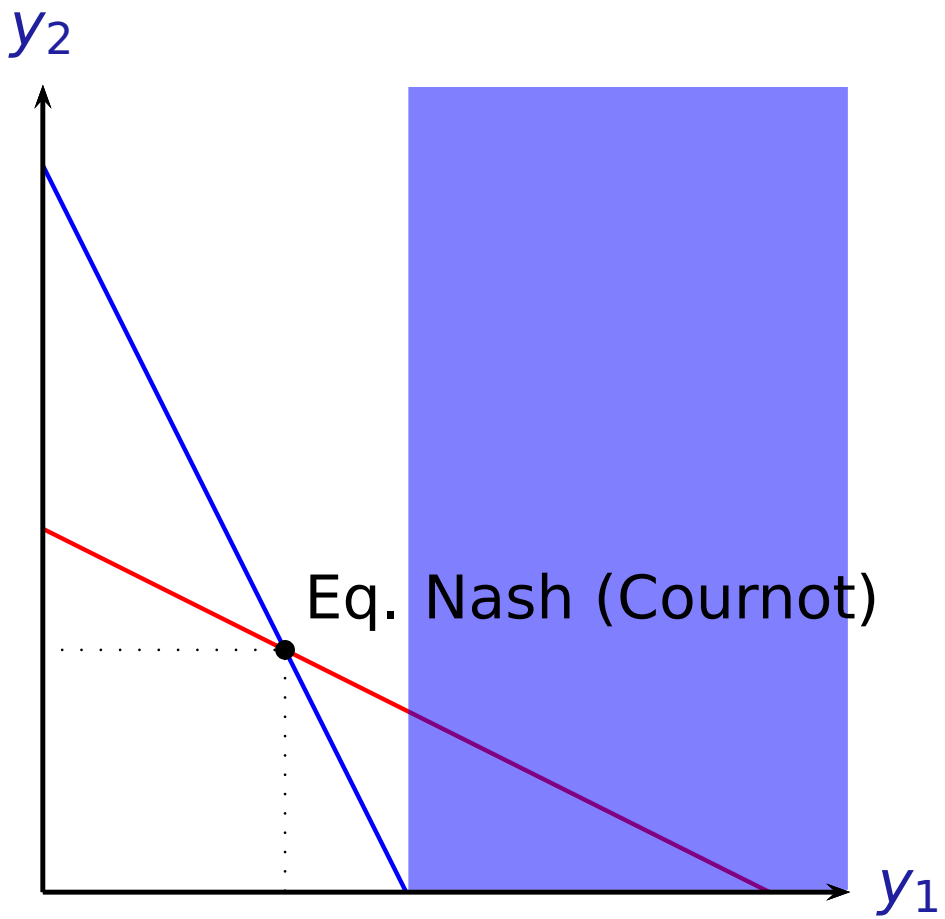
Equilíbrio de Nash: Solução Gráfica



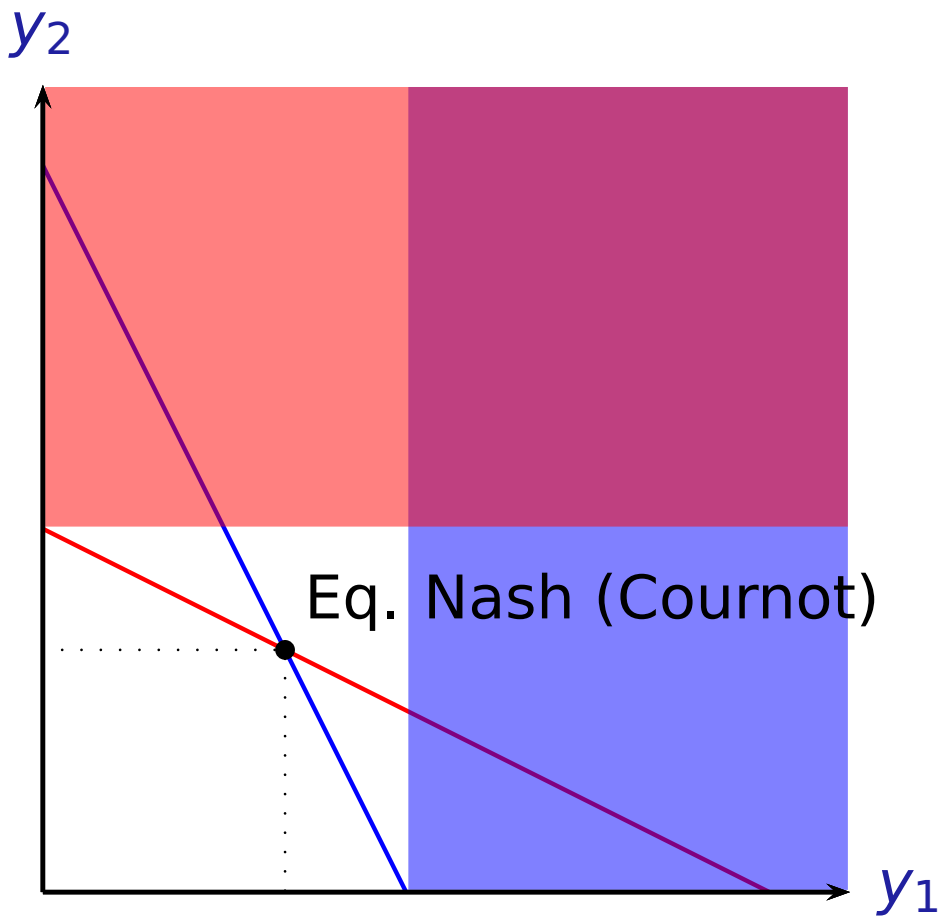
Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



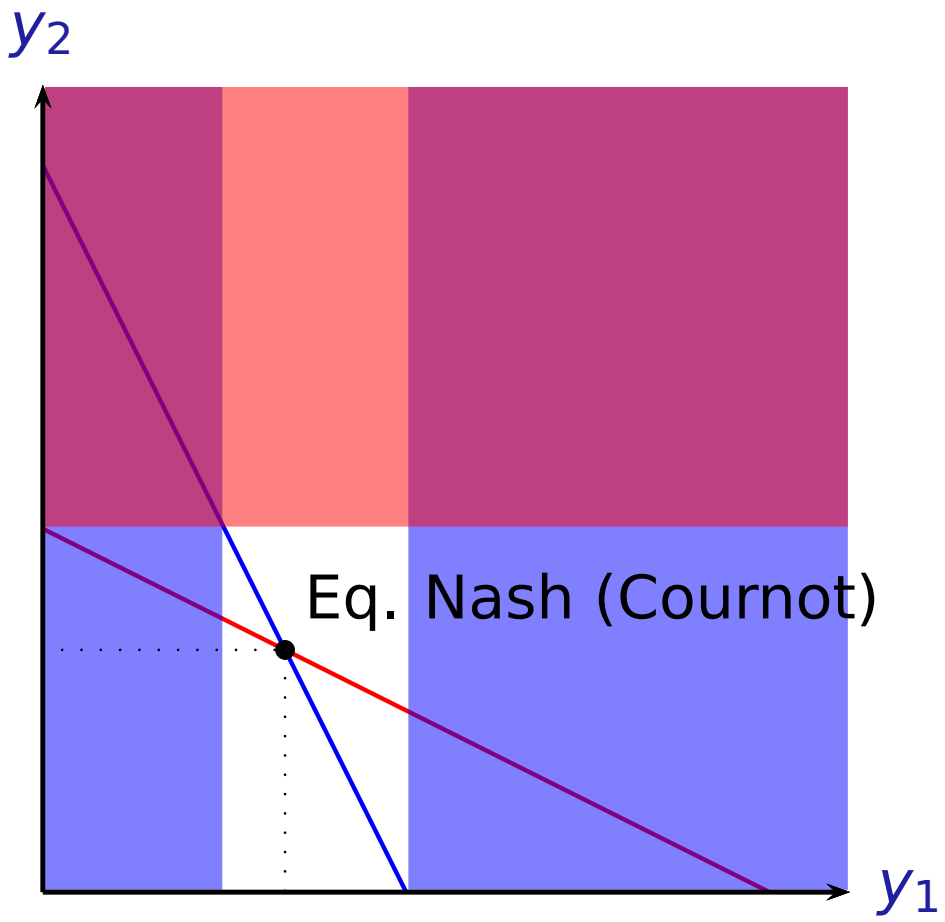
Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



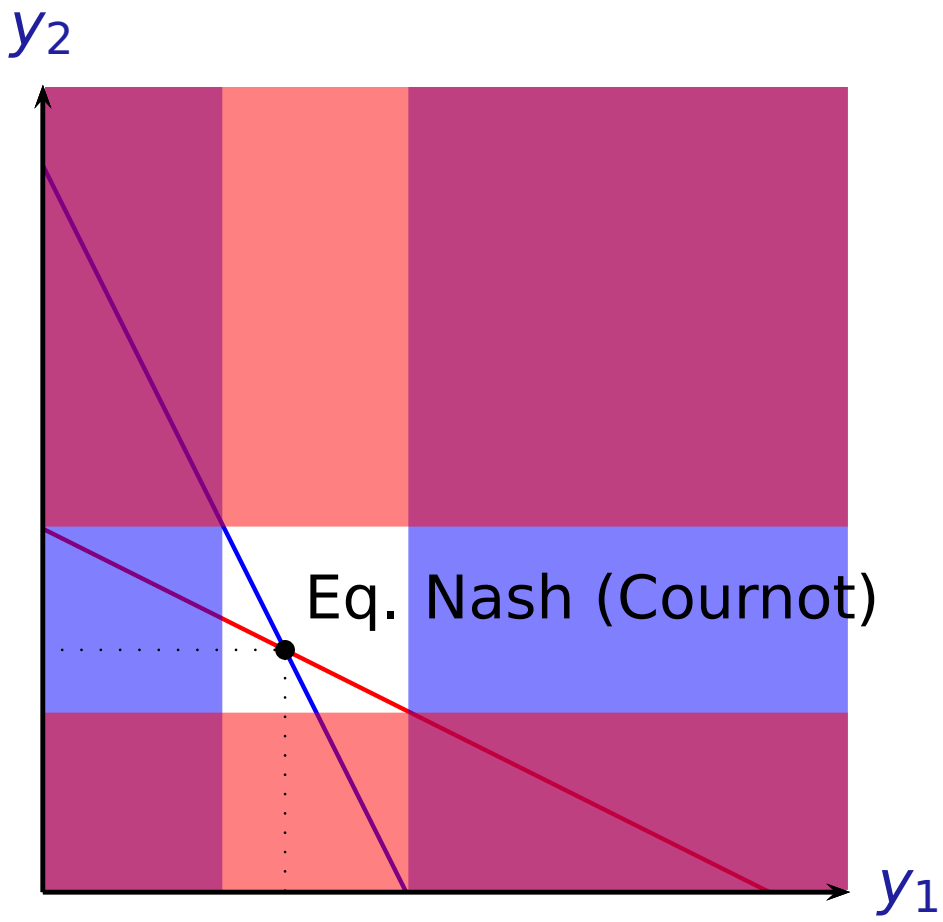
Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



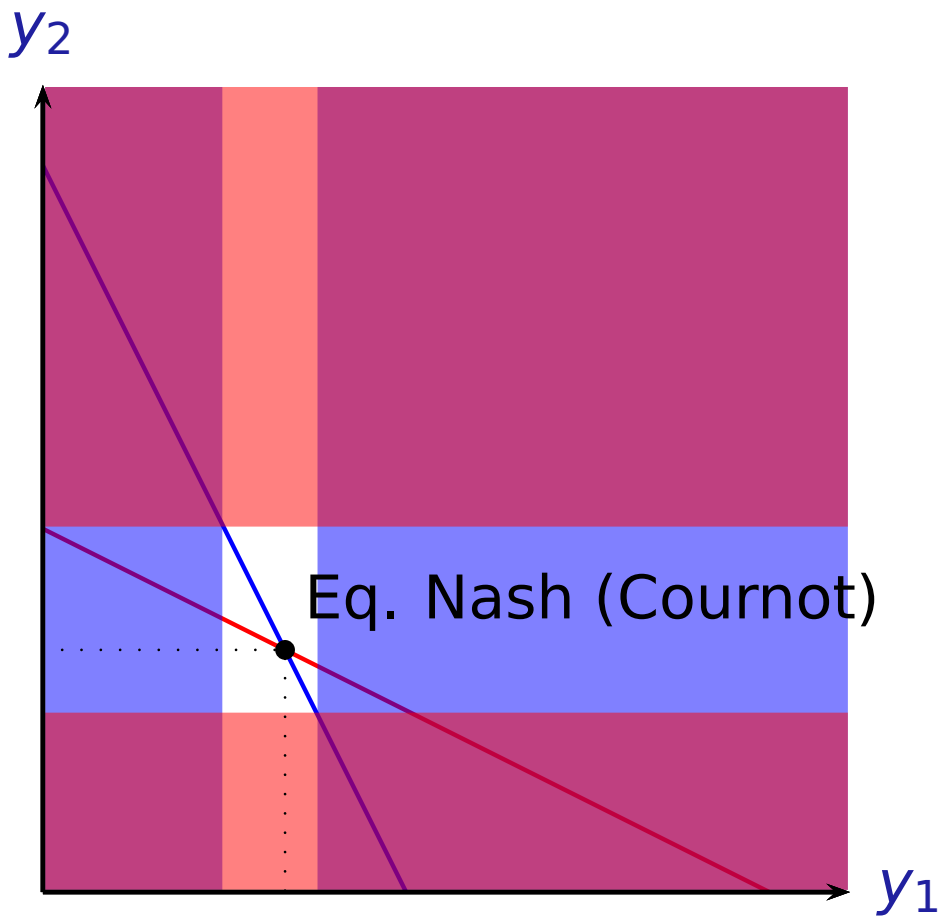
Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



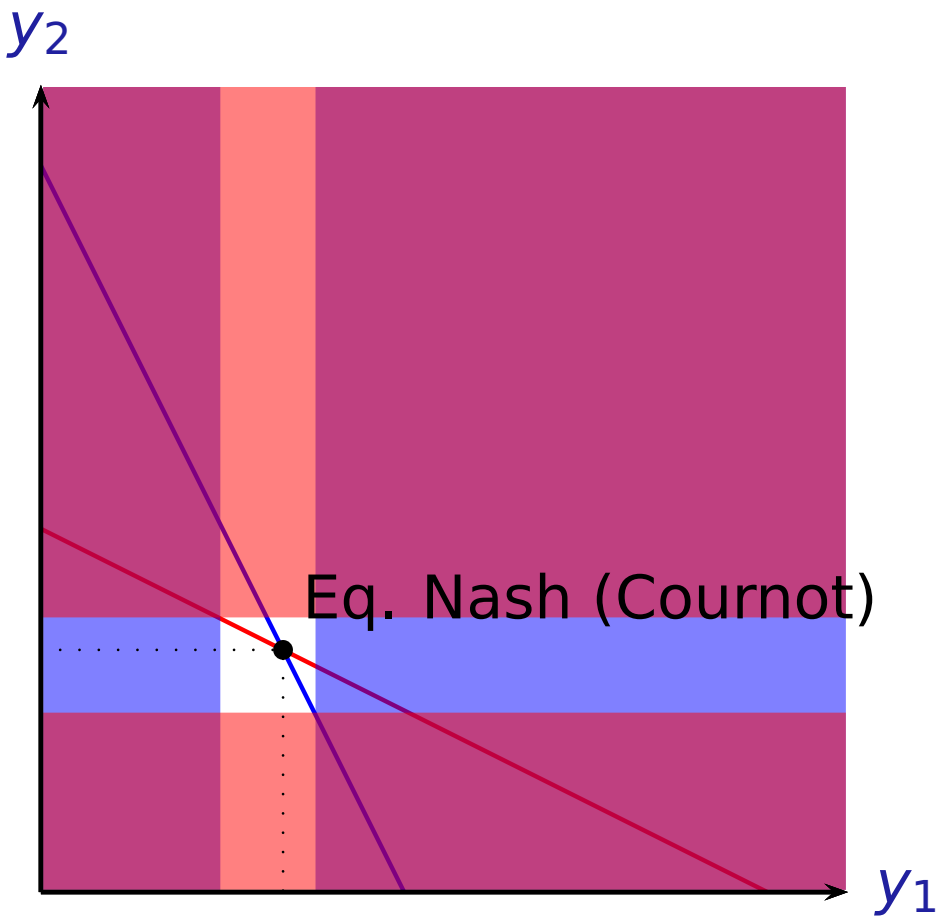
Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



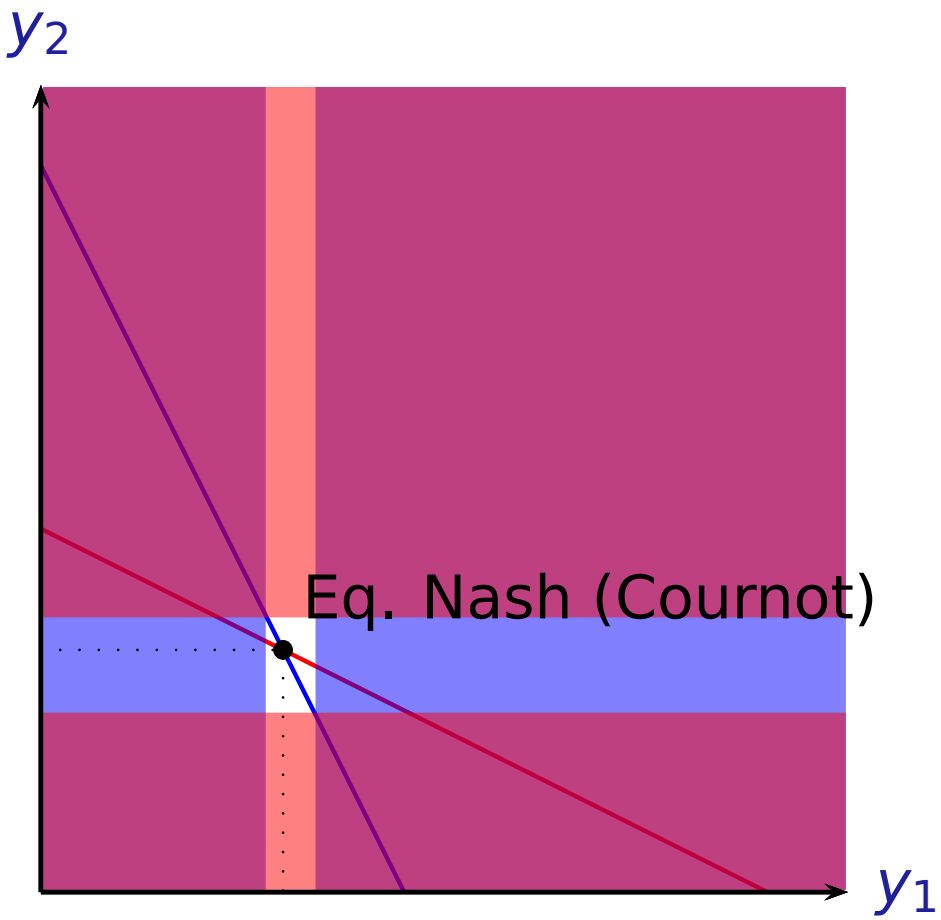
Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



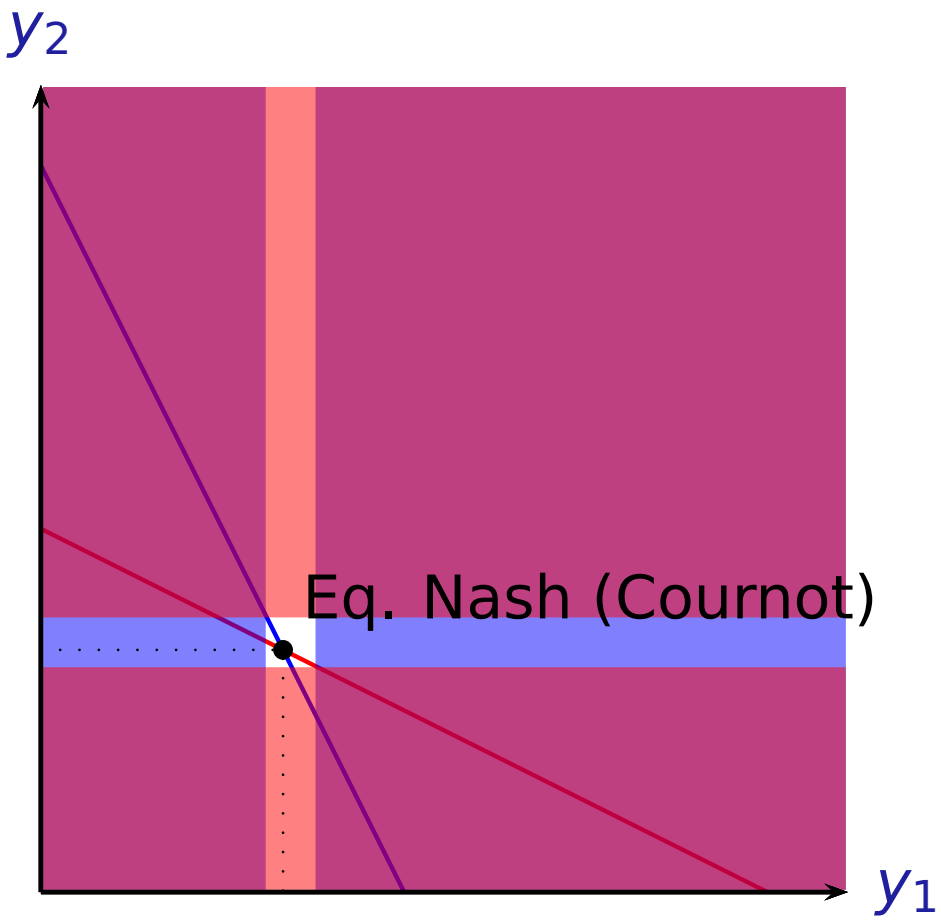
Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



Modelo de Cournot: o caso geral

Considere agora o caso em que há n empresas, produzindo um bem homogêneo cuja função de demanda inversa é dada por

$$p = p(y)$$

com

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

sendo y_i é o produto da empresa i e a função de custo da empresa i é

$$c_i(y_i),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Modelo de Cournot: o caso geral

Condição de equilíbrio

A empresa i deve escolher y_i de modo a maximizar seu lucro

$$p\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) y_i - c_i(y_i)$$

dado quanto é produzido pelas outras empresas. A condição de máximo de primeira ordem é

$$p + \frac{dp}{dy} y_i = c_i'(y_i)$$

Modelo de Cournot: o caso geral

Condição de equilíbrio

A empresa i deve escolher y_i de modo a maximizar seu lucro

$$p\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) y_i - c_i(y_i)$$

dado quanto é produzido pelas outras empresas. A condição de máximo de primeira ordem é

$$p + \frac{dp}{dy} y_i = c_i'(y_i)$$

$$p\left(1 + \frac{dp}{dy}\frac{y}{p}\frac{y_i}{y}\right) = c_i'(y_i)$$

Modelo de Cournot: o caso geral

Condição de equilíbrio

A empresa i deve escolher y_i de modo a maximizar seu lucro

$$p\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) y_i - c_i(y_i)$$

dado quanto é produzido pelas outras empresas. A condição de máximo de primeira ordem é

$$p + \frac{dp}{dy} y_i = c_i'(y_i)$$

$$p\left(1 + \frac{dp}{dy}\frac{y}{p}\frac{y_i}{y}\right) = c_i'(y_i)$$

$$p = CMg_i \frac{1}{1 - \frac{s_i}{|\epsilon|}}$$

Exemplo

Considere o modelo de Cournot, em que 49 empresas produzem um produto homogêneo. A empresa i produz de acordo com a função de custo $C(q_i) = 2q_i$, em que q_i é a quantidade produzida pela empresa i, com $i = 1, \ldots, 49$. Suponha uma demanda de mercado dada por $p = 402 - 2Q$, em que p é o preço e $Q = \sum_{i=1}^{49} q_i$ é a quantidade total produzida pelas 49 empresas. Calcule a quantidade que cada empresa irá produzir no equilíbrio de Cournot.

Solução

A condição de equilíbrio da empresa i, $i = 1, 2, \ldots, 49$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa i, $i = 1, 2, \ldots, 49$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$

$$402 - 2Q - 2q_i = 2$$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa i, $i = 1, 2, \ldots, 49$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$

$$402 - 2Q - 2q_i = 2$$

$$q_i = 200 - Q$$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa i, $i = 1, 2, \ldots, 49$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$

$$402 - 2Q - 2q_i = 2$$

$$q_i = 200 - Q$$

Isso implica $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q^* = 200 - Q$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa i, $i = 1, 2, \ldots, 49$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$

$$402 - 2Q - 2q_i = 2$$

$$q_i = 200 - Q$$

Isso implica $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q^* = 200 - Q$ e

$$Q = \sum_{i=1}^{49} q_i = 49\, q^*.$$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa i, $i = 1, 2, \ldots, 49$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$

$$402 - 2Q - 2q_i = 2$$

$$q_i = 200 - Q$$

Isso implica $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q^* = 200 - Q$ e

$$Q = \sum_{i=1}^{49} q_i = 49\, q^*.$$

Assim,

$$q^* = 200 - 49\, q^*$$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa i, $i = 1, 2, \ldots, 49$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$

$$402 - 2Q - 2q_i = 2$$

$$q_i = 200 - Q$$

Isso implica $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q^* = 200 - Q$ e

$$Q = \sum_{i=1}^{49} q_i = 49\, q^*.$$

Assim,

$$q^* = 200 - 49\, q^* \Rightarrow q^* = 4$$

Sumário

1 Representação de jogos com movimentos simultâneos

2 Estratégias dominantes

3 Equilíbrio de Nash

4 O modelo de Cournot

5 O Modelo de Bertrand

6 Jogos com repetição

O Modelo de Bertrand

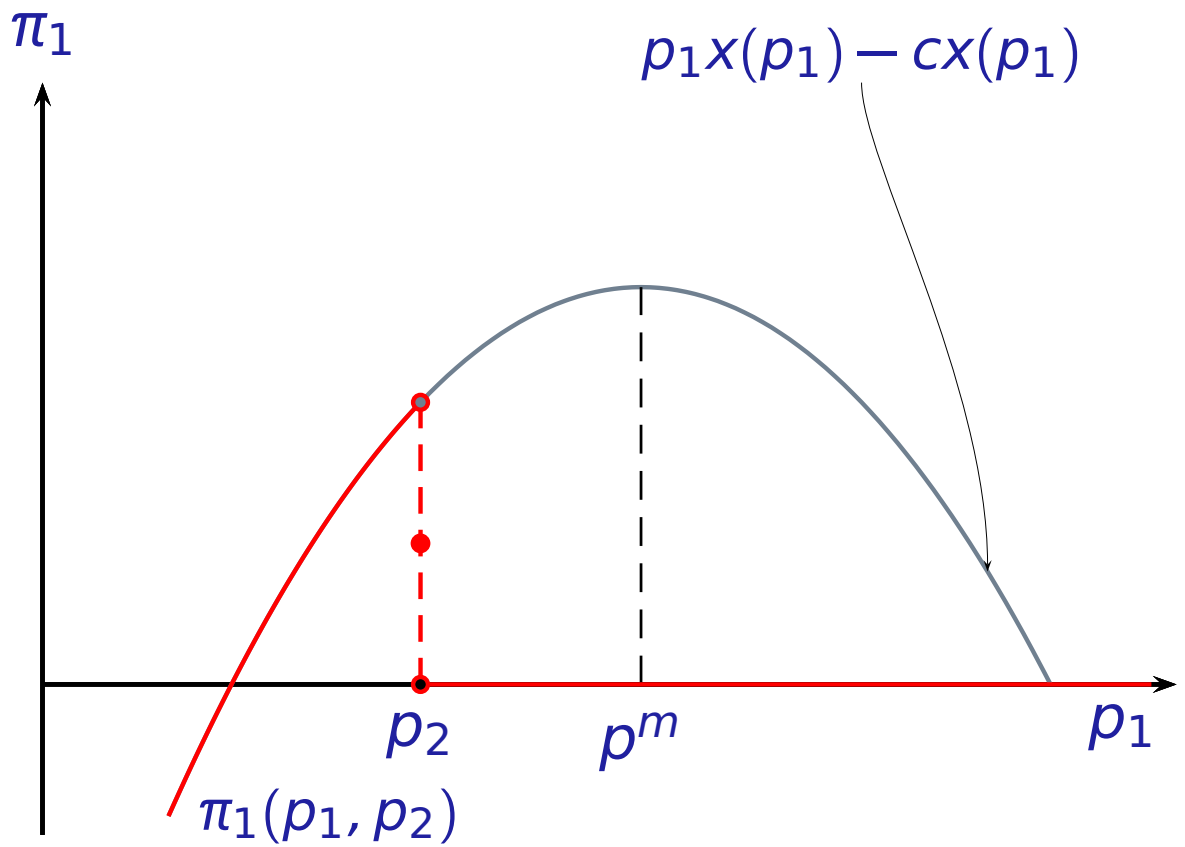
Hipóteses

- Duas empresas (1 e 2), cada uma deve escolher o preço de seu produto (p_1 e p_2).
- Produto Homogêneo
- Produção com rendimentos constantes de escala e custo médio constante igual a c
- Funções de demanda

$$\begin{bmatrix} x_1(p_1,p_2) \\ x_2(p_1,p_2) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} x(p_1) \\ 0 \end{bmatrix} & \text{caso} \quad p_1 < p_2 \\ \begin{bmatrix} x(p_1)/2 \\ x(p_2)/2 \end{bmatrix} & \text{caso} \quad p_1 = p_2 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ x(p_2) \end{bmatrix} & \text{caso} \quad p_1 > p_2 \end{cases}$$

O Modelo de Bertrand

A função de lucro da empresa 1



Modelo de Bertrand

“Funções” de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ & \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

"Funções" de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

"Funções" de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \\ p_1 \geq c & \text{se } p_2 = c \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

"Funções" de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \\ p_1 \geq c & \text{se } p_2 = c \\ p_1 > p_2 & \text{se } p_2 < c \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

"Funções" de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \\ p_1 \geq c & \text{se } p_2 = c \\ p_1 > p_2 & \text{se } p_2 < c \end{cases}$$

Empresa 2

$$p_2(p_1) = \begin{cases} \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

"Funções" de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \\ p_1 \geq c & \text{se } p_2 = c \\ p_1 > p_2 & \text{se } p_2 < c \end{cases}$$

Empresa 2

$$p_2(p_1) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_1 > p_m \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

"Funções" de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \\ p_1 \geq c & \text{se } p_2 = c \\ p_1 > p_2 & \text{se } p_2 < c \end{cases}$$

Empresa 2

$$p_2(p_1) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_1 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_1 \leq p_m \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

"Funções" de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \\ p_1 \geq c & \text{se } p_2 = c \\ p_1 > p_2 & \text{se } p_2 < c \end{cases}$$

Empresa 2

$$p_2(p_1) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_1 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_1 \leq p_m \\ p_2 \geq c & \text{se } p_1 = c \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

"Funções" de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \\ p_1 \geq c & \text{se } p_2 = c \\ p_1 > p_2 & \text{se } p_2 < c \end{cases}$$

Empresa 2

$$p_2(p_1) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_1 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_1 \leq p_m \\ p_2 \geq c & \text{se } p_1 = c \\ p_2 > p_1 & \text{se } p_1 < c \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

"Funções" de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \\ p_1 \geq c & \text{se } p_2 = c \\ p_1 > p_2 & \text{se } p_2 < c \end{cases}$$

Empresa 2

$$p_2(p_1) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_1 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_1 \leq p_m \\ p_2 \geq c & \text{se } p_1 = c \\ p_2 > p_1 & \text{se } p_1 < c \end{cases}$$

Equilíbrio de Nash

$$p_1 = p_2 = c$$

Bertrand com diferenciação de produto

Exemplo

Duopolistas, denominados A e B, concorrem em um mercado com produtos diferenciados por meio da escolha de preços. Os dois determinam seus preços simultaneamente, configurando um equilíbrio de Nash. São dadas as funções: Demanda: $q_A = 21 - p_A + p_B$ e $q_B = 20 - 2p_B + p_A$ Custos: $C_A(q_A) = q_A + 175$ e $C_B(q_B) = 2q_B + 100$
em que q_A e q_B são as quantidades e p_A e p_B os preços dos produtos de A e B, respectivamente. Pede-se: o somatório dos lucros das duas empresas.

Bertrand com diferenciação de produto

Exemplo

Duopolistas, denominados A e B, concorrem em um mercado com produtos diferenciados por meio da escolha de preços. Os dois determinam seus preços simultaneamente, configurando um equilíbrio de Nash. São dadas as funções: Demanda: $q_A = 21 - p_A + p_B$ e $q_B = 20 - 2p_B + p_A$ Custos: $C_A(q_A) = q_A + 175$ e $C_B(q_B) = 2q_B + 100$
em que q_A e q_B são as quantidades e p_A e p_B os preços dos produtos de A e B, respectivamente. Pede-se: o somatório dos lucros das duas empresas.
Resposta: 78

Sumário

1 Representação de jogos com movimentos simultâneos

2 Estratégias dominantes

3 Equilíbrio de Nash

4 O modelo de Cournot

5 O Modelo de Bertrand

6 **Jogos com repetição**
- Cartel

Exemplo:Dilema dos prisioneiros com repetição

- Considere um jogo do tipo dilema dos prisioneiros jogado mais de uma vez.

Exemplo:Dilema dos prisioneiros com repetição

- Considere um jogo do tipo dilema dos prisioneiros jogado mais de uma vez.
- A repetição do jogo pode induzir à cooperação entre os jogadores, pois possibilita que o comportamento não cooperativo por parte de um jogador em uma repetição seja punido pelo outro jogador na repetição seguinte.

Exemplo:Dilema dos prisioneiros com repetição

- Considere um jogo do tipo dilema dos prisioneiros jogado mais de uma vez.
- A repetição do jogo pode induzir à cooperação entre os jogadores, pois possibilita que o comportamento não cooperativo por parte de um jogador em uma repetição seja punido pelo outro jogador na repetição seguinte.
- Se o jogo é jogado um número finito e definido de vezes, pelo princípio da indução retroativa, não haverá cooperação.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Algumas possíveis estratégias

- Estratégia **bonzinho**: sempre cooperar.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Algumas possíveis estratégias

- Estratégia **bonzinho**: sempre cooperar.
- Estratégia **malvado**: nunca cooperar.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Algumas possíveis estratégias

- Estratégia **bonzinho**: sempre cooperar.
- Estratégia **malvado**: nunca cooperar.
- Estratégia **trigger**: começar cooperando. Se o outro jogador deixar de cooperar em algum momento, nunca mais cooperar.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Algumas possíveis estratégias

- Estratégia **bonzinho**: sempre cooperar.
- Estratégia **malvado**: nunca cooperar.
- Estratégia **trigger**: começar cooperando. Se o outro jogador deixar de cooperar em algum momento, nunca mais cooperar.
- Estratégia **tit-for-tat**: cooperar na primeira rodada. Nas outras rodadas repetir a estratégia do outro jogador na rodada anterior.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Alguns equilíbrios de Nash (supondo baixa taxa de desconto):

- Ambos escolhem a estratégia malvado.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Alguns equilíbrios de Nash (supondo baixa taxa de desconto):

- Ambos escolhem a estratégia malvado.
- Ambos escolhem a estratégia trigger.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Alguns equilíbrios de Nash (supondo baixa taxa de desconto):

- Ambos escolhem a estratégia malvado.
- Ambos escolhem a estratégia trigger.
- Ambos escolhem a estratégia tit-for-tat.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Alguns equilíbrios de Nash (supondo baixa taxa de desconto):

- Ambos escolhem a estratégia malvado.
- Ambos escolhem a estratégia trigger.
- Ambos escolhem a estratégia tit-for-tat.
- Um jogador escolhe tit-for-tat e o outro escolhe trigger.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Alguns equilíbrios de Nash (supondo baixa taxa de desconto):

- Ambos escolhem a estratégia malvado.
- Ambos escolhem a estratégia trigger.
- Ambos escolhem a estratégia tit-for-tat.
- Um jogador escolhe tit-for-tat e o outro escolhe trigger.

Não são equilíbrios de Nash

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Alguns equilíbrios de Nash (supondo baixa taxa de desconto):

- Ambos escolhem a estratégia malvado.
- Ambos escolhem a estratégia trigger.
- Ambos escolhem a estratégia tit-for-tat.
- Um jogador escolhe tit-for-tat e o outro escolhe trigger.

Não são equilíbrios de Nash

- Ambos escolhem a estratégia bonzinho.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Alguns equilíbrios de Nash (supondo baixa taxa de desconto):

- Ambos escolhem a estratégia malvado.
- Ambos escolhem a estratégia trigger.
- Ambos escolhem a estratégia tit-for-tat.
- Um jogador escolhe tit-for-tat e o outro escolhe trigger.

Não são equilíbrios de Nash

- Ambos escolhem a estratégia bonzinho.
- Um jogador joga tit-for-tat (ou trigger) e o outro malvado.

O experimento de Robert Axelrod

Robert Axelrod é um cientista político da Universidade de Michigan. Ele pediu a diversos especialistas em teoria dos jogos que enviassem suas estratégias favoritas em um jogo do tipo dilema dos prisioneiros com repetição. Em um computador, ele simulou os resultados desse jogo confrontando todas as estratégias duas a duas. A estratégia com melhor performance foi a tit-for-tat.

Cartel em um jogo sem repetição

Um modelo

- n empresas produzem um produto homogêneo. As quantidades produzidas são y_i e as funções de custo são $c_i(y_i)$ ($i = 1, \ldots, n$).
- A demanda inversa pelo produto é dada por $p(y)$ na qual $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$

Cartel em um jogo sem repetição

Um modelo

- n empresas produzem um produto homogêneo. As quantidades produzidas são y_i e as funções de custo são $c_i(y_i)$ ($i = 1, \ldots, n$).
- A demanda inversa pelo produto é dada por $p(y)$ na qual $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$

Objetivo do Cartel

$$\max_{y_1,\ldots,y_n} p(y)y - \sum_{i=1}^{n} c_i(y_i)$$

$$\text{com} \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Cartel em um jogo sem repetição

Condição de lucro máximo

$$p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy} y^* \leq \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} \quad j = 1, \ldots, n$$

Com igualdade caso $y_i^* > 0$, sendo $y^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^*$

Cartel em um jogo sem repetição

Condição de lucro máximo

$$p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy} y^* \leq \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} \quad j = 1, \ldots, n$$

Com igualdade caso $y_i^* > 0$, sendo $y^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^*$

Uma interpretação

Caso tenhamos $y_j^* > 0$ e $y_k^* > 0$, então

$$\frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} = \frac{dc_k(y_k^*)}{dy_k}$$

Cartel em um jogo sem repetição

Condição de lucro máximo

$$p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy} y^* \leq \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} \quad j = 1, \ldots, n$$

Com igualdade caso $y_i^* > 0$, sendo $y^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^*$

Uma interpretação

Caso tenhamos $y_j^* > 0$ e $y_k^* > 0$, então

$$\frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} = \frac{dc_k(y_k^*)}{dy_k} \quad \text{ou} \quad CMg_j(y_j^*) = CMg_k(y_k^*)$$

Cartel em um jogo sem repetição

Instabilidade do Cartel

O lucro da empresa j no cartel é

$$\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*) = p(y^*)y_j^* - c_j(y_j^*)$$

Cartel em um jogo sem repetição

Instabilidade do Cartel

O lucro da empresa j no cartel é

$$\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*) = p(y^*)y_j^* - c_j(y_j^*)$$

Será vantajoso burlar o cartel caso $\partial\pi(y_1^*, \ldots, y_n^*)/\partial y_j > 0$.

Cartel em um jogo sem repetição

Instabilidade do Cartel

O lucro da empresa j no cartel é

$$\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*) = p(y^*)y_j^* - c_j(y_j^*)$$

Será vantajoso burlar o cartel caso $\partial\pi(y_1^*, \ldots, y_n^*)/\partial y_j > 0$.

$$\frac{\partial \pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y_j^* - \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j}$$

Cartel em um jogo sem repetição

Instabilidade do Cartel

O lucro da empresa j no cartel é

$$\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*) = p(y^*)y_j^* - c_j(y_j^*)$$

Será vantajoso burlar o cartel caso $\partial\pi(y_1^*, \ldots, y_n^*)/\partial y_j > 0$.

$$\frac{\partial \pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y_j^* - \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j}$$

A condição de ótimo é $\frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y^*$. Logo,

Cartel em um jogo sem repetição

Instabilidade do Cartel

O lucro da empresa j no cartel é

$$\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*) = p(y^*)y_j^* - c_j(y_j^*)$$

Será vantajoso burlar o cartel caso $\partial\pi(y_1^*, \ldots, y_n^*)/\partial y_j > 0$.

$$\frac{\partial \pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y_j^* - \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j}$$

A condição de ótimo é $\frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y^*$. Logo,

$$\frac{\partial \pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = \frac{dp(y^*)}{dy}(y_j^* - y^*)$$

Cartel em um jogo sem repetição

Instabilidade do Cartel

O lucro da empresa j no cartel é

$$\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*) = p(y^*)y_j^* - c_j(y_j^*)$$

Será vantajoso burlar o cartel caso $\partial\pi(y_1^*, \ldots, y_n^*)/\partial y_j > 0$.

$$\frac{\partial \pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y_j^* - \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j}$$

A condição de ótimo é $\frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y^*$. Logo,

$$\frac{\partial \pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = \underbrace{\frac{dp(y^*)}{dy}}_{<0}(y_j^* - y^*)$$

Cartel em um jogo sem repetição

Instabilidade do Cartel

O lucro da empresa j no cartel é

$$\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*) = p(y^*)y_j^* - c_j(y_j^*)$$

Será vantajoso burlar o cartel caso $\partial\pi(y_1^*, \ldots, y_n^*)/\partial y_j > 0$.

$$\frac{\partial \pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y_j^* - \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j}$$

A condição de ótimo é $\frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y^*$. Logo,

$$\frac{\partial \pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = \underbrace{\frac{dp(y^*)}{dy}}_{<0}\underbrace{(y_j^* - y^*)}_{<0}$$

Cartel em um jogo sem repetição

Instabilidade do Cartel

O lucro da empresa j no cartel é

$$\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*) = p(y^*)y_j^* - c_j(y_j^*)$$

Será vantajoso burlar o cartel caso $\partial\pi(y_1^*, \ldots, y_n^*)/\partial y_j > 0$.

$$\frac{\partial \pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y_j^* - \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j}$$

A condição de ótimo é $\frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y^*$. Logo,

$$\frac{\partial \pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = \underbrace{\frac{dp(y^*)}{dy}}_{<0}\underbrace{(y_j^* - y^*)}_{<0} > 0$$

Formação de cartel em um jogo com repetição

Termos

- $\pi_i^* =$ lucro da empresa i no cartel.
- $\widehat{\pi}_{i0} =$ Lucro imediato da empresa i caso ela abandone o cartel.
- $\widehat{\pi}_i =$ Lucro posterior da empresa i caso ela abandone o cartel.
- $r_i =$ taxa de desconto da empresa i

Formação de cartel em um jogo com repetição

Termos

- $\pi_i^* =$ lucro da empresa i no cartel.
- $\widehat{\pi}_{i0} =$ Lucro imediato da empresa i caso ela abandone o cartel.
- $\widehat{\pi}_i =$ Lucro posterior da empresa i caso ela abandone o cartel.
- $r_i =$ taxa de desconto da empresa i

Condição para a estabilidade do cartel

$$\widehat{\pi}_{i0} - \pi_i^* \leq \frac{\pi_i^* - \widehat{\pi}_i}{r_i}$$

Exemplo:

- Duas empresas produzem um produto homogêneo com custo médio constante igual a c. Suas produções serão notadas por y_1 e y_2.
- A função de demanda é dada por $p(y) = a - by$ na qual $y = y_1 + y_2$.

Exemplo:

- Duas empresas produzem um produto homogêneo com custo médio constante igual a c. Suas produções serão notadas por y_1 e y_2.
- A função de demanda é dada por $p(y) = a - by$ na qual $y = y_1 + y_2$.

Equilíbrio de Cournot

Em cada período teremos

$$y_1 = y_2 = \frac{a-c}{3b}$$

e

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{9}\frac{(a-c)^2}{b}$$

Exemplo:

- Duas empresas produzem um produto homogêneo com custo médio constante igual a c. Suas produções serão notadas por y_1 e y_2.
- A função de demanda é dada por $p(y) = a - by$ na qual $y = y_1 + y_2$.

Equilíbrio de Cournot

Em cada período teremos

$$y_1 = y_2 = \frac{a-c}{3b}$$

e

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{9}\frac{(a-c)^2}{b}$$

Solução de Cartel

Em cada período teremos

$$y_1 = y_2 = \frac{a-c}{4b}$$

e

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b}$$

Exemplo (cont)

Melhor ganho ao burlar o cartel

$$\max_{y_1}\left[a-b\left(y_1+\frac{a-c}{4b}\right)\right]y_1-cy_1$$

Exemplo (cont)

Melhor ganho ao burlar o cartel

$$\max_{y_1}\left[a-b\left(y_1+\frac{a-c}{4b}\right)\right]y_1-cy_1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\widehat{y_{10}}=\dfrac{5}{8}\dfrac{a-c}{b}\\ \widehat{\pi_{10}}=\dfrac{9}{64}\dfrac{(a-c)^2}{b}\end{cases}$$

Exemplo (cont)

Estabilidade do cartel

Suponha que a empresa 2 jogue a seguinte estratégia do gatilho: começa produzindo a quantidade de Cartel. Caso a empresa 1 não faça o mesmo, ela passa a produzir a quantidade de Cournot. Nesse caso a condição de estabilidade do cartel será

$$\frac{9}{64}\frac{(a-c)^2}{b} - \frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b} \leq \frac{1}{r}\left(\frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b} - \frac{1}{9}\frac{(a-c)^2}{b}\right)$$

Isso ocorrerá caso

$$r \leq \frac{8}{9} \approx 88,89\%$$