Teoria dos Jogos

Roberto Guena de Oliveira

USP

25 de outubro de 2013

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

Os elementos de um jogo

Jogadores Quais são os agentes envolvidos em um jogo? Em que número? Como serão denominados?

Os elementos de um jogo

Jogadores Quais são os agentes envolvidos em um jogo? Em que número? Como serão denominados?

Regras do jogo Quais são os movimentos que cada jogador pode realizar e quando?

Os elementos de um jogo

Jogadores Quais são os agentes envolvidos em um jogo? Em que número? Como serão denominados?

Regras do jogo Quais são os movimentos que cada jogador pode realizar e quando?

Payoffs Quais são as preferências de cada jogador em relação a cada possível resultado do jogo?

Uma classificação dos Jogos

Jogos com informação completa são jogos nos quais cada jogador conhece a estrutura do jogo (regras e possíveis resultados) e as preferências de todos os jogadores relativamente a cada possível resultado.

Jogos com informação perfeita são jogos com informação perfeita jogados em etapas nos quais a) em cada etapa apenas um jogador escolhe uma ação e b) em cada etapa todos os jogadores são capazes de obervar os movimentos dos outros jogadores nas etapas anteriores.

Jogos com informação incompleta São jogos nos quais um ou mais jogadores desconhecem ou parte da estrutura do jogo ou as preferências dos outros jogadores relativamente a cada possível resultado do jogo.

Exemplo: Empresa entrante vs. empresa estabelecida

Uma empresa, chamada entrante, deve decidir se entra ou não entra em um mercado dominado por outra empresa, a empresa estabelecida. Se ela entrar, a empresa estabelecida deve decidir se inicia uma guerra de preços ou se devide pacificamente o mercado com a entrante.

Exemplo: Empresa entrante vs. empresa estabelecida

Uma empresa, chamada entrante, deve decidir se entra ou não entra em um mercado dominado por outra empresa, a empresa estabelecida. Se ela entrar, a empresa estabelecida deve decidir se inicia uma guerra de preços ou se devide pacificamente o mercado com a entrante. Caso a entrante desista de entrar, o lucro da empresa estabelecida será de $1 bilhão.

Exemplo: Empresa entrante vs. empresa estabelecida

Uma empresa, chamada entrante, deve decidir se entra ou não entra em um mercado dominado por outra empresa, a empresa estabelecida. Se ela entrar, a empresa estabelecida deve decidir se inicia uma guerra de preços ou se devide pacificamente o mercado com a entrante. Caso a entrante desista de entrar, o lucro da empresa estabelecida será de $1 bilhão. Se ela entrar e a estabelecida optar por guerra de preços, as duas empresas terão prejuízo de $100 milhões.

Exemplo: Empresa entrante vs. empresa estabelecida

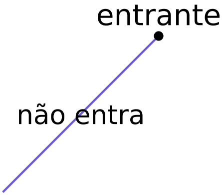
Uma empresa, chamada entrante, deve decidir se entra ou não entra em um mercado dominado por outra empresa, a empresa estabelecida. Se ela entrar, a empresa estabelecida deve decidir se inicia uma guerra de preços ou se devide pacificamente o mercado com a entrante. Caso a entrante desista de entrar, o lucro da empresa estabelecida será de $1 bilhão. Se ela entrar e a estabelecida optar por guerra de preços, as duas empresas terão prejuízo de $100 milhões. Caso, com a entrada da entrante, a estabelecida decida acomodar, cada empresa terá lucro de $300 milhões.

Entrante vs. estabelecida

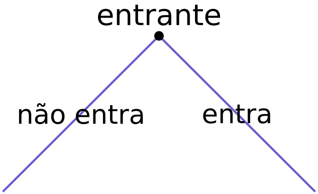
Entrante vs. estabelecida

entrante

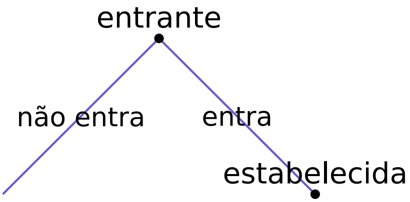
Entrante vs. estabelecida



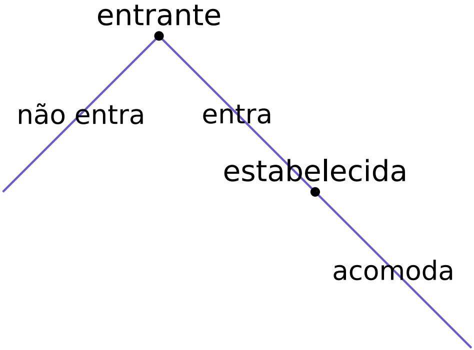
Entrante vs. estabelecida



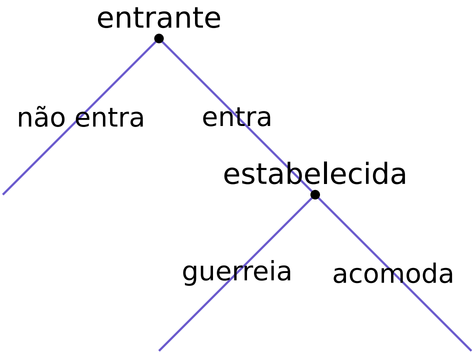
Entrante vs. estabelecida



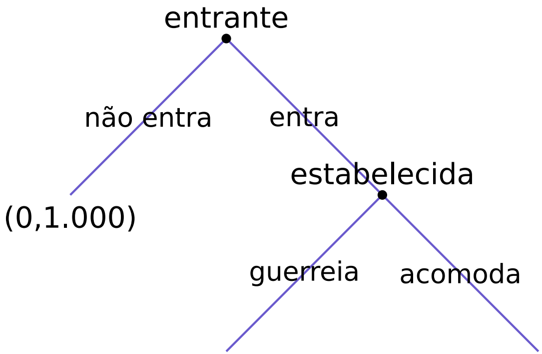
Entrante vs. estabelecida



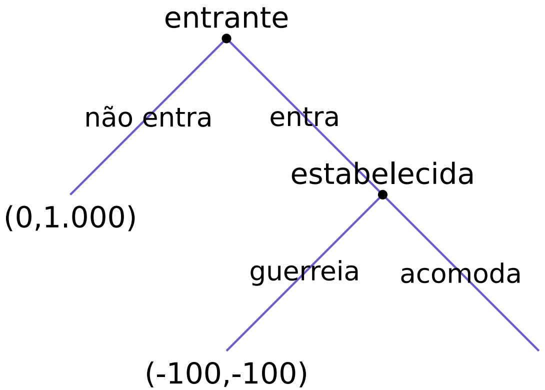
Entrante vs. estabelecida



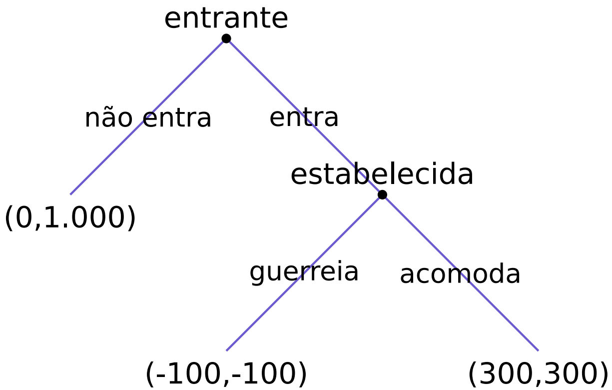
Entrante vs. estabelecida



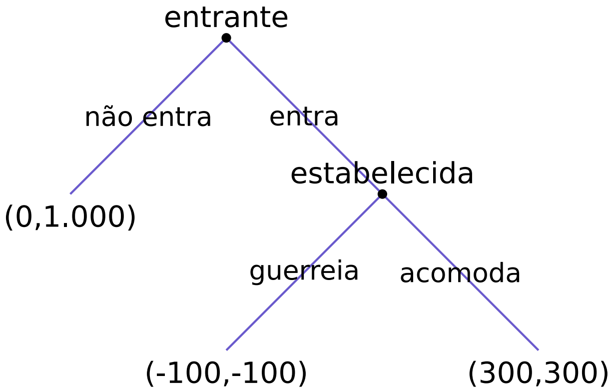
Entrante vs. estabelecida



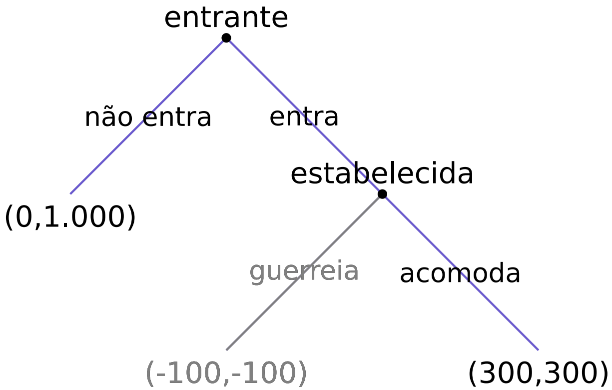
Entrante vs. estabelecida



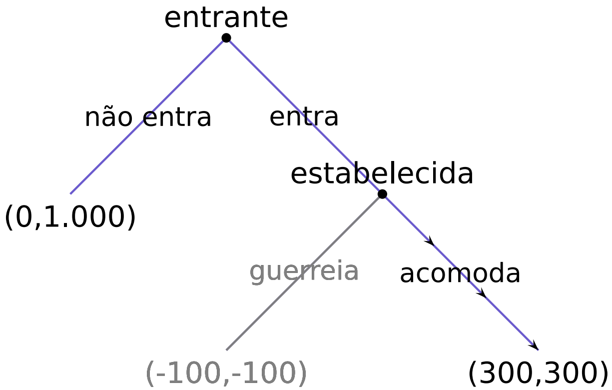
Solução do jogo por indução retroativa



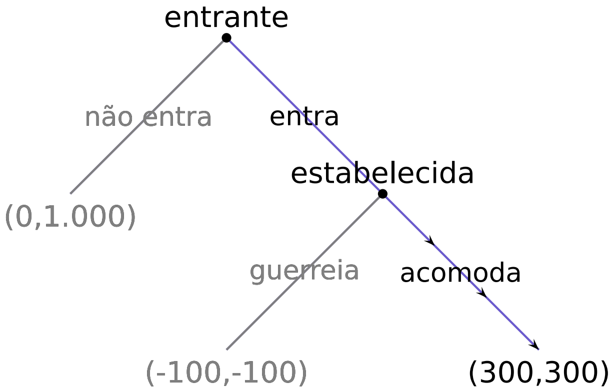
Solução do jogo por indução retroativa



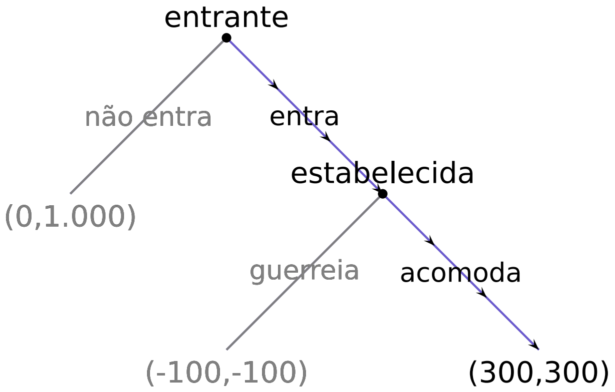
Solução do jogo por indução retroativa



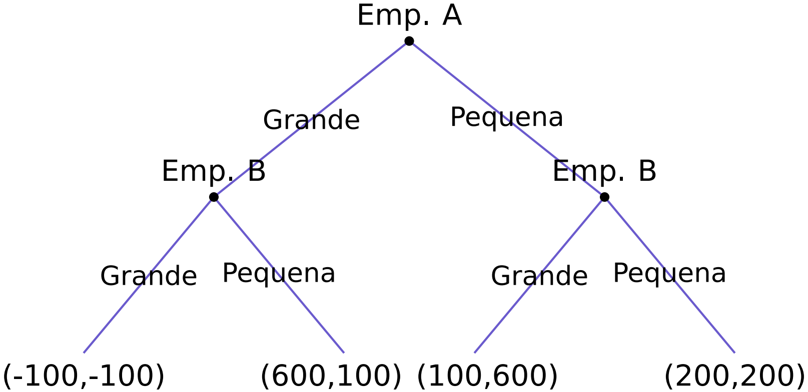
Solução do jogo por indução retroativa



Solução do jogo por indução retroativa

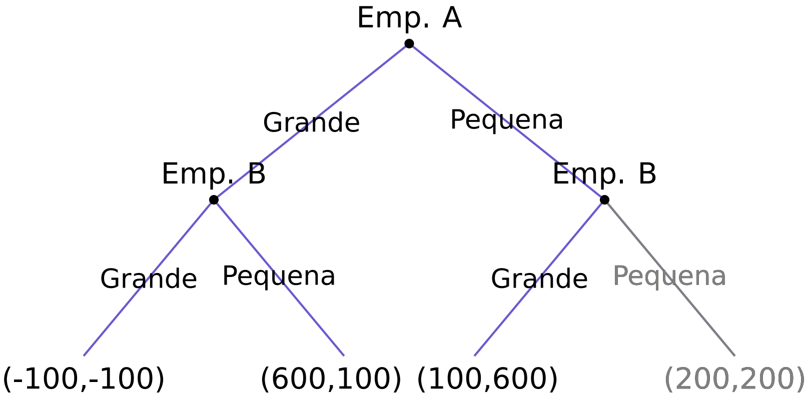


Exemplo: escolha de capacidade produtiva



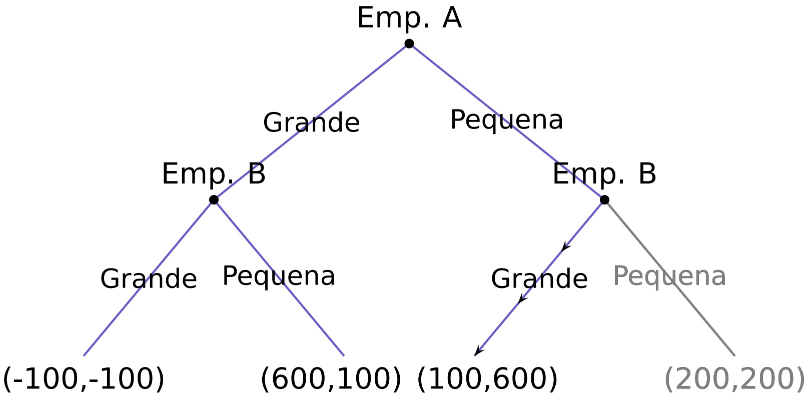
retornar do desvio

Exemplo: escolha de capacidade produtiva



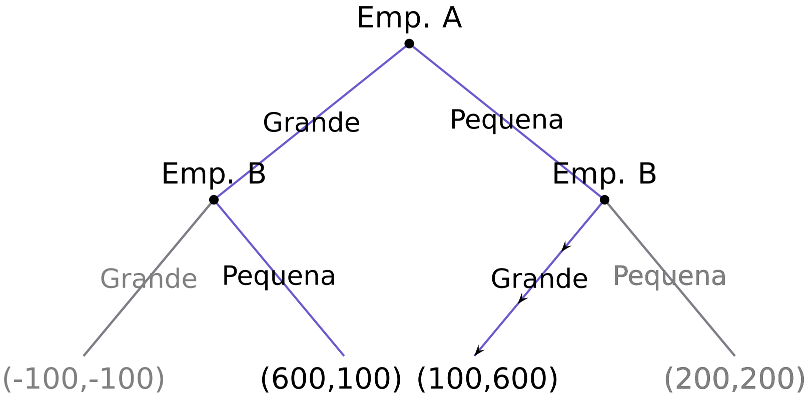
retornar do desvio

Exemplo: escolha de capacidade produtiva



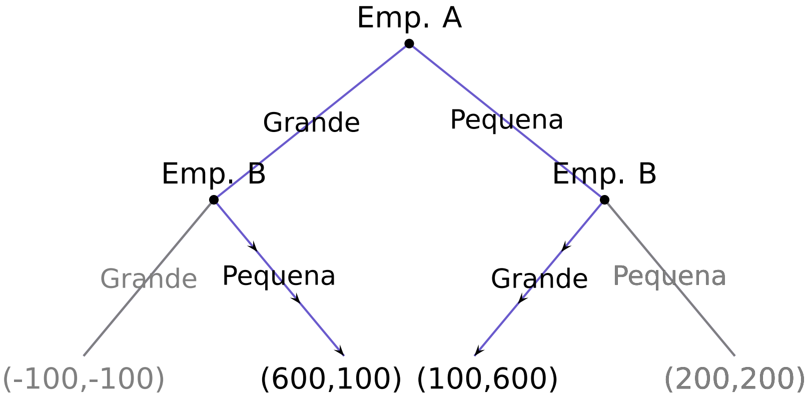
retornar do desvio

Exemplo: escolha de capacidade produtiva



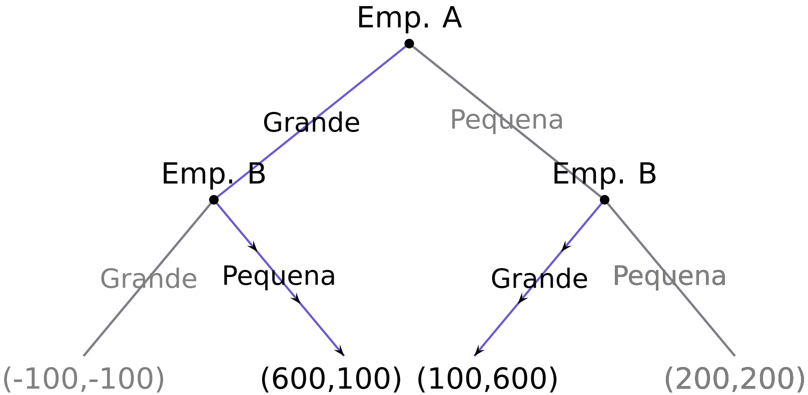
retornar do desvio

Exemplo: escolha de capacidade produtiva



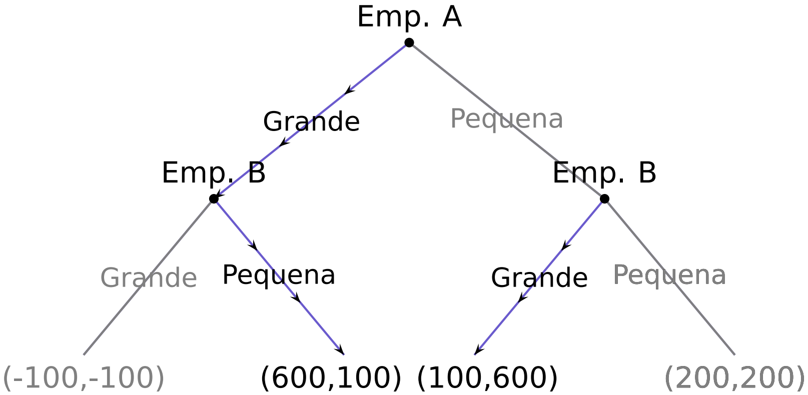
retornar do desvio

Exemplo: escolha de capacidade produtiva



retornar do desvio

Exemplo: escolha de capacidade produtiva



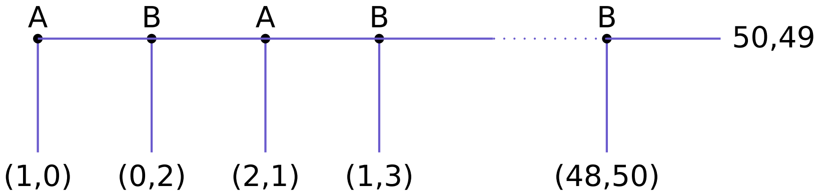
retornar do desvio

O jogo do ultimato

R$ 1.000,00 reais devem ser divididos entre dois jogadores. A regra para a divisão é a seguinte. Um primeiro jogador propõe uma divisão (ex. R$ 900,00 para mim e R$ 100 para você). O segundo jogador deve aceitar ou não essa divisão. Caso ele aceite, a divisão do dinheiro é feita conforme propôs o jogador 1. Caso ele não aceite nenhum jogador recebe dinheiro algum.
Qual a solução para esse jogo pelo princípio da indução retroativa? O que deve realmente ocorrer quando esse jogo é jogado?

O jogo da Centopéia

O jogo começa com o jogador 1 com R$1,00 e o jogador 2 com nada. O jogador 1 pode decidir parar o jogo, caso no qual ele fica com seu R$1,00 ou pagar R$1,00 para que o jogo continue. Caso ele pague, a banca adiciona R$1,00 ao R$ do jogador 1 e passa os R$2,00 para o jogador 2. Este deve decidir encerrar o jogo ou pagar para que o jogo continue. Após a 100ª, o jogo é encerrado compulsoriamente.



Aplicação 1: o modelo de Stakelberg ou liderança quantidade.

Descrição do modelo

- Duas empresas devem decidir quanto produzir.
- Uma dessas empresas, a empresa líder, deverá tomar sua decisão antes da outra.
- A outra empresa, a empresa seguidora, deverá decidir quanto produzir conhecendo a escolha feita pela empresa líder.
- A empresa líder deverá antecipar a reação da empresa seguido para tomar a decisão acertada.

Exemplo:

Informações

- Função de demanda: $p(y_1 + y_2) = a - b(y_1 + y_2)$
- Funções de custo: $c_1(y_1) = c\,y_1$ e $c_2(y_2) = c\,y_2$.
- Empresa líder é a empresa 1.

Exemplo (cont.)

O problema da seguidora

$$\max_{y_2} [a - b(y_1 + y_2)]y_2 - c\,y_2$$

Exemplo (cont.)

O problema da seguidora

$$\max_{y_2}[a-b(y_1+y_2)]y_2-cy_2$$

Reação da seguidora:

$$y_2(y_1)=\frac{a-c}{2b}-\frac{y_1}{2}$$

Essa função é chamada *função de reação* da seguidora.

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_1} \quad [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - cy_1$$

$$\text{sujeito a} \quad y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}$$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_1} \quad [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - cy_1$$

$$\text{sujeito a} \quad y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}$$

Solução:

$$y_1 = \frac{a-c}{2b}$$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_1} \quad [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - cy_1$$

$$\text{sujeito a} \quad y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}$$

Solução:

$$y_1 = \frac{a-c}{2b} \qquad\qquad y_2 = \frac{a-c}{4b}$$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_1} \quad [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - cy_1$$

$$\text{sujeito a} \quad y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}$$

Solução:

$$y_1 = \frac{a-c}{2b} \qquad y_2 = \frac{a-c}{4b}$$

$$y = y_1 + y_2 = \frac{3}{4}\frac{a-c}{b}$$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_1} \quad [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - cy_1$$

$$\text{sujeito a} \quad y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}$$

Solução:

$$y_1 = \frac{a-c}{2b} \qquad y_2 = \frac{a-c}{4b}$$

$$y = y_1 + y_2 = \frac{3}{4}\frac{a-c}{b} \qquad p(y) = \frac{a}{4} + \frac{3}{4}c$$

Exercício

Considere um modelo de Stackelberg com as seguintes informações:

Demanda: $x(p) = 7 - p$

Custo seguidora: $CT_s(y_s) = y_s$

Custo líder: $CT_l(y_l) = 3\,y_l$

Exercício

Considere um modelo de Stackelberg com as seguintes informações:

Demanda: $x(p) = 7 - p$

Custo seguidora: $CT_s(y_s) = y_s$

Custo líder: $CT_l(y_l) = 3\,y_l$

Pede-se

1. Quanto será produzido por empresa, a que preço o produtos será vendido e qual será o lucro de cada empresa no modelo de Stackelberg.
2. Quanto seria produzido pela empresa líder se lhe fosse assegurado o monopólio nesse mercado independentemente do preço por ela praticado? Qual seria seu lucro?

Aplicação 2: O modelo de liderança preço

Descrição

- Duas empresas: líder e seguidora

Aplicação 2: O modelo de liderança preço

Descrição

- Duas empresas: líder e seguidora
- Produto homogêneo com demanda $x(p)$.

Aplicação 2: O modelo de liderança preço

Descrição

- Duas empresas: líder e seguidora
- Produto homogêneo com demanda $x(p)$.
- A empresa líder deve decidir quanto produzir y_l e que preço praticar p.

Aplicação 2: O modelo de liderança preço

Descrição

- Duas empresas: líder e seguidora
- Produto homogêneo com demanda $x(p)$.
- A empresa líder deve decidir quanto produzir y_l e que preço praticar p.
- A seguidora escolhe o nível de produção y_s que torna máximo o seu lucro dado o preço anunciado pela líder. $y_s = y_s(p))$

Aplicação 2: O modelo de liderança preço

Descrição

- Duas empresas: líder e seguidora
- Produto homogêneo com demanda $x(p)$.
- A empresa líder deve decidir quanto produzir y_l e que preço praticar p.
- A seguidora escolhe o nível de produção y_s que torna máximo o seu lucro dado o preço anunciado pela líder. $y_s = y_s(p))$
- A emp. líder deve escolher p e y_l de modo a tornar seu lucro máximo, atendendo à condição de equilíbrio $y_l + y_s(p) = x(p)$.

Exemplo:

Dados

Demanda: $x(p) = 1.000 - \frac{3}{4}p$

Exemplo:

Dados

Demanda: $x(p) = 1.000 - \frac{3}{4}p$

Função de custo da seguidora: $c_s = 2{y_s}^2$

Exemplo:

Dados

Demanda: $x(p) = 1.000 - \frac{3}{4}p$

Função de custo da seguidora: $c_s = 2{y_s}^2$

Função de custo da líder: $\frac{{y_l}^2}{4}$

Exemplo:

Dados

Demanda: $x(p) = 1.000 - \frac{3}{4}p$

Função de custo da seguidora: $c_s = 2{y_s}^2$

Função de custo da líder: $\frac{{y_l}^2}{4}$

A reação da seguidora

$$\max_{y_s} p\, y_s - 2{y_s}^2$$

Exemplo:

Dados

Demanda: $x(p) = 1.000 - \frac{3}{4}p$

Função de custo da seguidora: $c_s = 2{y_s}^2$

Função de custo da líder: $\frac{{y_l}^2}{4}$

A reação da seguidora

$$\max_{y_s} p\, y_s - 2{y_s}^2 \Rightarrow y_s(p) = \frac{p}{4}$$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_l} py_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Sujeita à restrição $y_l + y_s = x(p)$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_l} py_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Sujeita à restrição $y_l + y_s = x(p)$ ou

$$y_l + \frac{p}{4} = 1.000 - \frac{3}{4}p$$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_l} py_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Sujeita à restrição $y_l + y_s = x(p)$ ou

$$y_l + \frac{p}{4} = 1.000 - \frac{3}{4}p \Rightarrow p = 1.000 - y_l$$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_l} py_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Sujeita à restrição $y_l + y_s = x(p)$ ou

$$y_l + \frac{p}{4} = 1.000 - \frac{3}{4}p \Rightarrow p = 1.000 - y_l$$

O que equivale ao problema

$$\max_{y_l} (1.000 - y_l)y_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_l} py_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Sujeita à restrição $y_l + y_s = x(p)$ ou

$$y_l + \frac{p}{4} = 1.000 - \frac{3}{4}p \Rightarrow p = 1.000 - y_l$$

O que equivale ao problema

$$\max_{y_l} (1.000 - y_l)y_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Solução

$y_l = 400$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_l} py_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Sujeita à restrição $y_l + y_s = x(p)$ ou

$$y_l + \frac{p}{4} = 1.000 - \frac{3}{4}p \Rightarrow p = 1.000 - y_l$$

O que equivale ao problema

$$\max_{y_l}(1.000 - y_l)y_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Solução

$y_l = 400$, $p = 600$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_l} py_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Sujeita à restrição $y_l + y_s = x(p)$ ou

$$y_l + \frac{p}{4} = 1.000 - \frac{3}{4}p \Rightarrow p = 1.000 - y_l$$

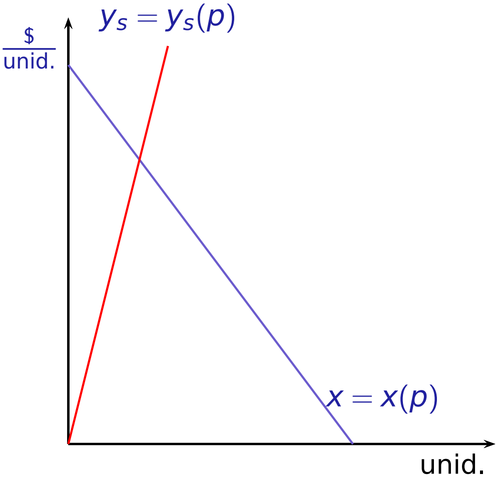
O que equivale ao problema

$$\max_{y_l}(1.000 - y_l)y_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

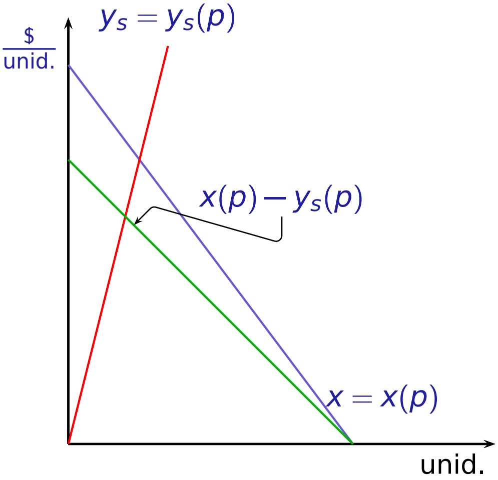
Solução

$y_l = 400$, $p = 600$, $y_s = 150$

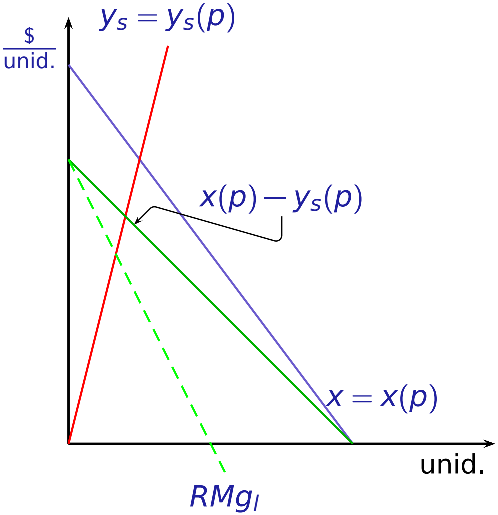
Liderança preço: solução gráfica



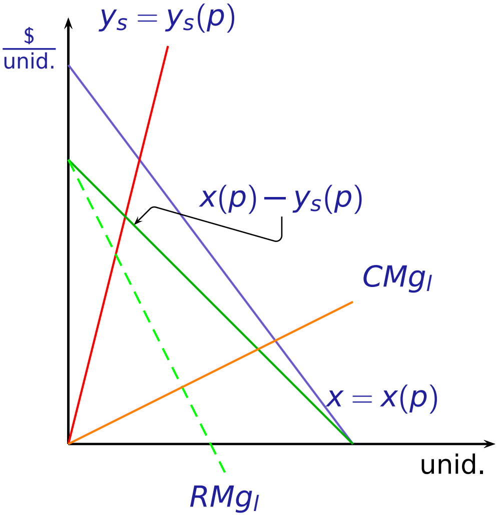
Liderança preço: solução gráfica



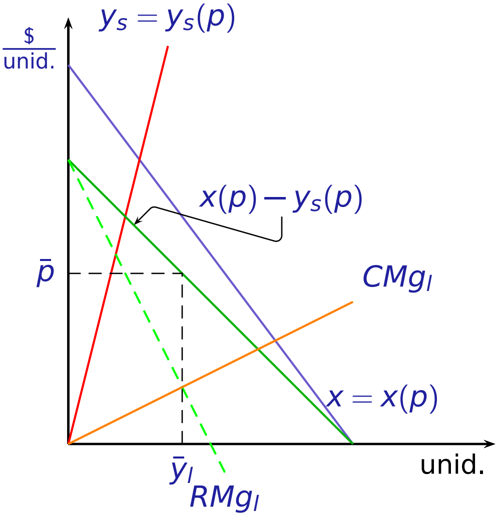
Liderança preço: solução gráfica



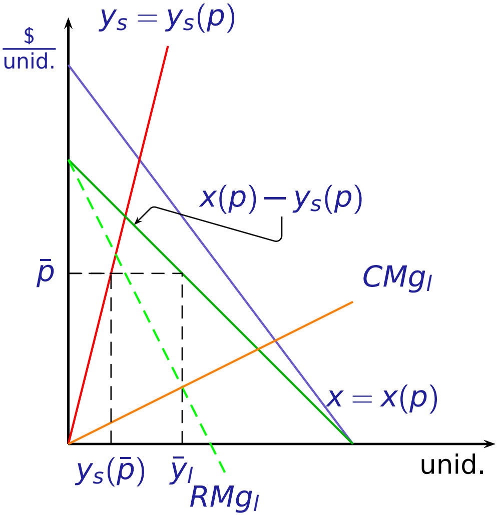
Liderança preço: solução gráfica



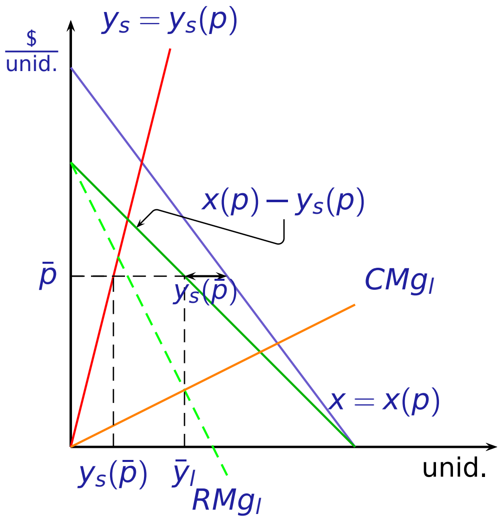
Liderança preço: solução gráfica



Liderança preço: solução gráfica



Liderança preço: solução gráfica



Leituras recomendadas

Ronaldo Fiani: *Teoria dos Jogos Para cursos de Administração e Economia*. Campus, 2004.

Avinash Dixit e Susan Skeath: *Games of Strategy*. Norton, 1999.

Avinash Dixit e Barry G. Nalebuff: *Thinking Strategically: The Competitive Edge in Business, Politics, and Everyday Life*. Norton 1991.

David M. Kreps: *Game theory and economic modelling.* Clarendon, 1990.