Mecânica Clássica 1 (Semestre 1 de 2017): Lista 4

1. A partir da Lagrangeana do oscilador harmoônico símples, obtenha a Hamiltoniana e as equações de Hamilton.

2. Considere uma partícula que se move sob a ação de um campo de força central. Determine a Hamiltoniana, as equações de Hamilton e determine a equação de movimento da partícula. Compare com o resultado obtido pelo método de Lagrange.

3. Dada a Lagrangeana
$$L = \frac{\dot{x}}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{s} - \alpha x^3 + \beta \dot{x}^2 \,, \tag{1}$$
obtenha a Hamiltoniana. Em que condições ela se reduz à função de um oscilador harmônico?

4. Determine a Hamiltoniana de uma partícula que se move sob a ação do potencial de Weber
$$V = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right) \,. \tag{2}$$

5. Encontre as equações de movimento de uma partícula cuja Hamiltoniana é
$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{c|\mathbf{p}|}{n(\mathbf{p}, \mathbf{r})} \,, \tag{3}$$
onde $n(\vec{p}, \vec{r})$ é uma função escalar e c uma constante.

6. (**Invariância Adiabática**): Considere um sistema governado pela Hamiltoniana $H(q, p)$, que tenha coordenadas e momentos limitados a uma região com limites finitos, e que variam quase-periodicamente (na verdade, é possível mostrar que todo sistema limitado a uma região finita é periódico), com a variação de um período a outro dependendo de um parâmetro λ. Vamos supor que esse parâmetro varia muito pouco no intervalo de tempo T, onde T é o perpiodo de oscilação do sistema, isto é,
$$T\frac{d\lambda}{dt} << \lambda \,. \tag{4}$$
Nessas condições dizemosque o sistema varia adiabaticamente.

   a) Mostre que
   $$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}\frac{d\bar{H}}{d\lambda} \,, \tag{5}$$
   onde
   $$\frac{d\bar{H}}{d\lambda} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dH}{d\lambda} dt \,. \tag{6}$$

   b) A partir do resultado anterior, mostre que
   $$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}\frac{\int \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{\partial H}{\partial p} dq}{\int \frac{\partial p}{\partial H} dq} \tag{7}$$

c) Para λ fixo, E é constante e p é bem definido, com $E = H(q, p, \lambda)$. Mostre que então

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt}\frac{\int \frac{\partial p}{\partial \lambda}dq}{\int \frac{\partial p}{\partial E}dq}\,. \tag{8}$$

d) Se $d\lambda/dt \sim$ const., mostre que

$$\int \left[\frac{\partial p}{\partial E}\frac{dE}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt}\right] dq = 0\,. \tag{9}$$

e) Definindo $I = (2\pi)^{-1}\int_0^T pdq$, mostre que $d\bar{I}/dt$=0.

f) Mostre que $E = I\omega$, onde $\omega = 2\pi/T$.

7. Uma função $f(y, y')$ é o extremo de uma quantidade $F = \int f(y, y')dx$, sendo que f depende apenas implicitamente (através de y e y') de x. Mostre que

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\,. \tag{10}$$

8. (**Catenária**) Uma corrente de comprimento C e massa M está suspensa entre os pontos $(0, a)$ e (L, b). Ache a forma de equilíbrio.

9. Mostre que $F_2(q, P, t)$, $F_3(p, Q, t)$ e $F_4(p, P, t)$ são transformadas de Legendre da função $F_1(q, Q, t)$.

10. Mostre que se $F_1(q, Q)$, então $H = H'$ e dF é uma diferencial exata.

11. Mostre que a transformação $(q, p) \to (Q, P)$ é canônica se e somente se a forma bilinear

$$\sum_k \delta p_k dq - k - \delta q_k dp_k \tag{11}$$

é invariante, onde δq_k e δp_k são deslocamentos virtuais quaisquer enquanto dq_k e dp_k são deslocamentos reais realizados num intervalo de tempo dt.

12. Considere a Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2\,. \tag{12}$$

Uma função geratriz $F_1 = (m/2)\omega q^2 cotgQ$ é utilizada para obter novas coordenadas (Q, P).

a) Obtenha os momentos generalizados p e P.

b) Mostre que F_1 é uma transformação canônica.

c) Como fica a nova Hamiltoniana em termos de P e Q?

13. Mostre que $F = \sum_i q_i Q_i$ é a função geratriz da transformação identidade.

14. Mostre que a transformação $P = (1/2)(p^2 + q^2)$ e $Q = arctg(q/p)$ é canônica.

15. Dada a transformação $P = 2(1 + \sqrt{q}cos\, p)\sqrt{q}sen\, p$ e $Q = log(1 + \sqrt{p}cos\, p)$:

    a) Mostre que a transformação é canônica.

    b) Mostre que a funcção geratriz dessa transformação é $F_3(p, Q) = -(e^Q - 1)^2 tg\, p$.

16. Considere a Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \,, \tag{13}$$

que descreve, no espaço de fase, uma elíse.

    a) Mostre que a equação de uma elípse pode ser escrita na forma $p = R(\theta)sen\theta$ e $q = R(\theta)cos\theta$.

    b) Pode-se encontrar uma função geratriz $F_1(q, \theta)$ para a transformação $(q, p) \to (\theta, P)$. Mostre que essa função é $F(q, theta) = (m\omega/2)q^2 cotg\, \theta$