LCE0216 - Introdução à Bioestatística Florestal
3. Variáveis aleatórias contínuas

Profa. Dra. Clarice Garcia Borges Demétrio
Monitores: Giovana Fumes e Ricardo Klein

Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"
Universidade de São Paulo

Piracicaba, 04 de Maio 2017

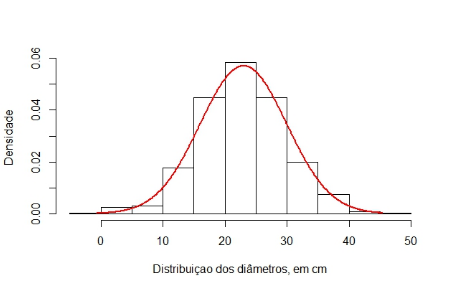
Distribuição normal

- Um dos modelos mais importantes de uma distribuição contínua de probabilidade;
- Representa, com boa aproximação, muitos fenômenos da natureza;
- Alguns exemplos de variáveis aleatórias contínuas que seguem distribuição normal (geralmente):
  - Peso: de matéria seca, de raiz, de animais, de pessoas, de frutos, de sacas de café,...
  - Altura: de árvores, plantas, animais;
  - DAP;
  - Produtividade: de cana-de-açúcar, de soja,...
  - Erros de medida em geral.

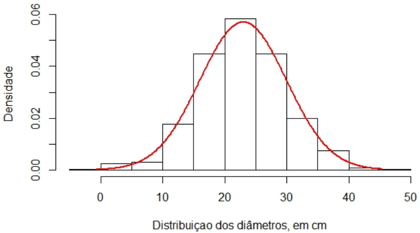
Distribuição normal

Um problema:

Sabe-se que as árvores em uma floresta de *Pinus caribaea* apresentam diâmetro médio de 23 cm, variância de 49 cm^2 e distribuição conforme a figura a seguir:



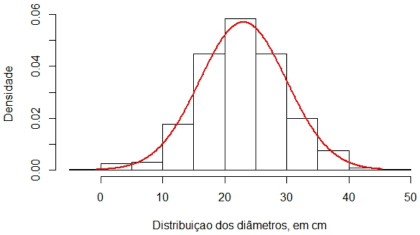
Distribuição normal



- Sistema I:

Classificação	Diâmetro	Porcentagem esperada
I	até 17 *cm*	___%
II	de 17 a 30 *cm*	___%
III	acima de 30 *cm*	___%

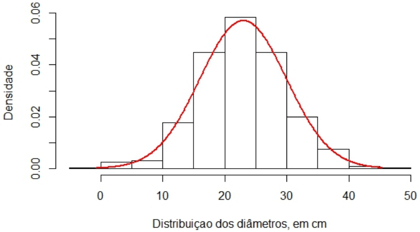
Distribuição normal



- Sistema II:

Classificação	Diâmetro	Porcentagem esperada
I	até ___ *cm*	20%
II	de ___ a ___ *cm*	60%
II	acima de ___ *cm*	20%

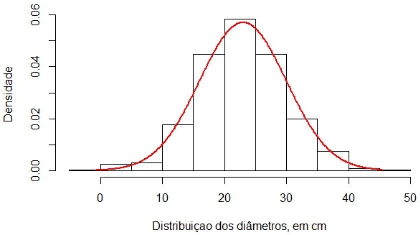
Distribuição normal



Observações:

- As observações estão mais concentradas em torno do valor central e a concentração vai diminuindo a medida que os valores vão aumentando ou diminuindo;
- Distribuição em forma de sino;
- Distribuição simétrica em torno do seu ponto central;

Distribuição normal



Observações:

- As distribuições amostrais de estatísticas como médias e proporções podem ser aproximadas pela distribuição normal $\Rightarrow$ Inferência estatística
- Distribuições binomial e Poisson $\Rightarrow$ aproximação através da distribuição normal
- Denominação: distribuição gaussinana $\Rightarrow$ Karl F. Gauss (1777-1855).

Distribuição normal

Definição

Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição normal, com parâmetros μ e σ, em que $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$, se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

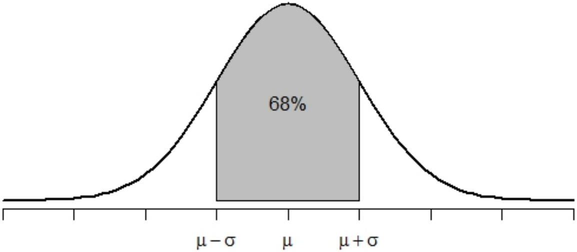
Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Pode-se demonstrar que:

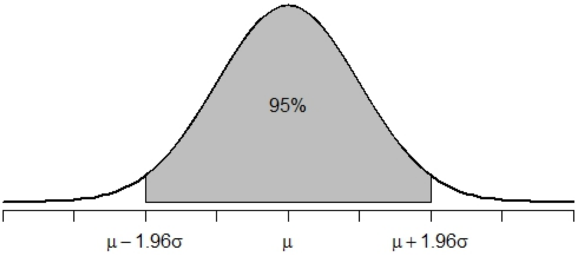
- $f_X(x) > 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$
- $\mathrm{E}(X) = \mu$
- $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
- $\mathrm{DP}(X) = \sigma$

- $f_X(x)$ é simétrica ao redor de μ, ou seja, $f(\mu - x) = f(\mu + x)$ para todo x

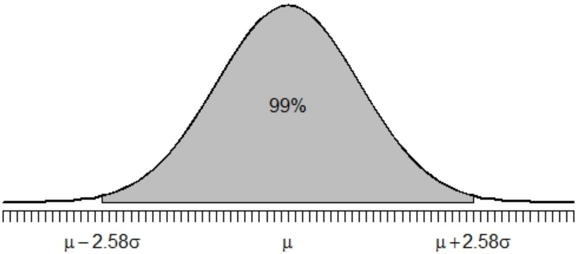
Distribuição normal



Distribuição normal

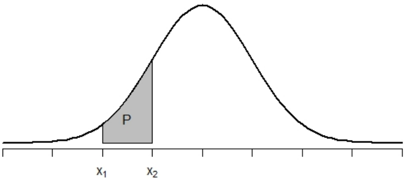


Distribuição normal



Distribuição normal

A probabilidade de uma variável aleatória com distribuição normal tomar um valor entre dois pontos quaisquer, x_1 e x_2, tal que $x_1 < x_2$, é igual a área sob a curva normal compreendida entre os dois pontos.



$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Distribuição normal

Sabendo-se que uma variável X = diâmetro, em *cm*, de uma árvore tem distribuição $N(23, 49)$, calcular:

(a) $P(X < 17)$

(b) $P(17 < X < 30)$

(c) $P(X > 30)$

Cálculo da integral $\Rightarrow$ métodos numéricos

$$\Downarrow$$

Distribuição normal padrão

Distribuição normal

Distribuição normal padrão

Se X uma variável aleatória com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, então a variável aleatória Z, definida por:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

tem uma distribuição $N(0, 1)$, cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

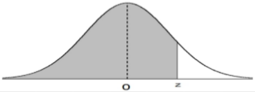
Observações:

- A nova distribuição têm média correspondente à origem e desvio padrão como medida de afastamento da média;
- $\mathrm{E}(Z) = \mu_Z = 0$ e $\mathrm{Var}(Z) = \sigma_Z^2 = 1$;
- Os valores correspondentes a $P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2)$ estão descritos em uma única tabela.

Tabela normal padrão

Distribuição Normal Padrão Acumulada

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545

Tabela normal padrão

$$P(Z < -1) = \Phi(-1) = ?$$

Tabela normal padrão

$$P(Z < -1) = \Phi(-1) = ?$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611

Tabela normal padrão

$$P(Z < -1) = \Phi(-1) = ?$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611

Tabela normal padrão

$$P(Z < -1) = \Phi(-1) = 0,1587$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611

Tabela normal padrão

$$P(-2,02 \leq Z \leq 1,04) = \Phi(1,04) - \Phi(-2,02)$$

Tabela normal padrão

$$P(-2,02 \leq Z \leq 1,04) = \Phi(1,04) - \Phi(-2,02)$$
$$\Phi(1,04) = 0,8508 \qquad \Phi(-2,02) = 0,0217$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890

Tabela normal padrão

$$P(-2,02 \leq Z \leq 1,04) = \Phi(1,04) - \Phi(-2,02)$$
$$\Phi(1,04) = 0,8508 \qquad \Phi(-2,02) = 0,0217$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379

Tabela normal padrão

$$P(-2,02 \leq Z \leq 1,04) = \Phi(1,04) - \Phi(-2,02)$$

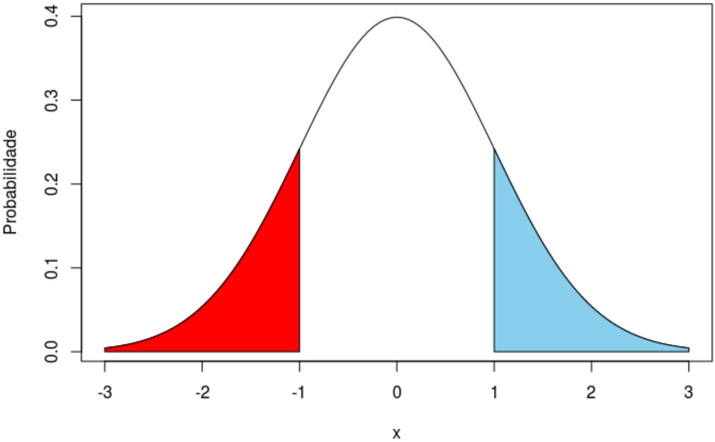
$$\Phi(1,04) = 0,8508 \qquad \Phi(-2,02) = 0,0217$$

$$P(-2,02 \leq Z \leq 1,04) = 0,8508 - 0,0217 = 0,8291$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681

Tabela normal padrão

$$P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = P(Z < -1) = 0,1587$$



As regiões vermelha e azul possuem a mesma área

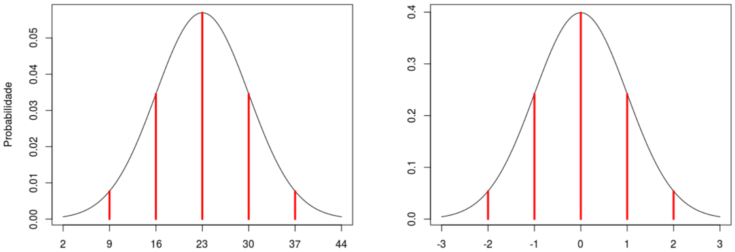
Padronização de uma variável

$$X \sim N(23, 49)$$

Para padronizar X, devemos subtrair a média e dividir pelo desvio padrão

$$P(Z < \frac{x-\mu}{\sigma}) = P(Z < \frac{16-23}{7}) = P(Z < -1) = 0,1587$$

$$\text{Portanto: } P(X < 16) = P(Z < -1) = 0,1587$$



Distribuição normal

Exercício: Sabendo-se que $Z \sim N(0,1)$, usando a tabela da distribuição normal padrão, calcular:

(a) $P(0 < Z < 2,14)$

(b) $P(-3,01 < Z < 0)$

(c) $P(-3,01 < Z < 2,14)$

(d) $P(Z > 0)$

(e) $P(Z > 1,00)$

(f) $P(Z < -1,00)$

Agora podemos calcular as probabilidades associadas aos intervalos correspondentes a variável X = diâmetro, em cm, de uma árvore com distribuição $N(23, 49)$.

(a) $P(X < 17)$

(b) $P(17 < X < 30)$

(c) $P(X > 30)$

Assim, as porcentagens esperadas são dadas por:

Classificação	Diâmetro	Porcentagem esperada
I	até 17 cm	___%
II	de 17 a 30 cm	___%
III	acima de 30 cm	___%

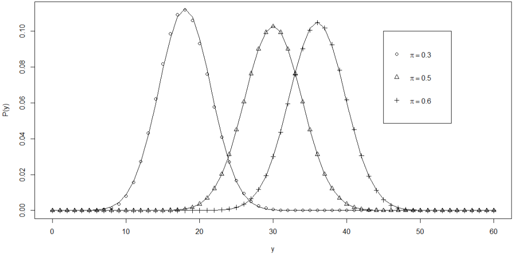
Distribuição normal

Exercício: Calcular os valores de X correspondentes às porcentagens esperadas, em que X = diâmetro, em *cm*, de uma árvore e tem distribuição $N(23, 49)$.

Classificação	Diâmetro	Porcentagem esperada
I	até ___ *cm*	20%
II	de ___ a ___ *cm*	60%
III	acima de ___ *cm*	20%

Distribuição normal

Seja Y uma variável aleatória representando o número de sucessos em um total de n ensaios independentes e π a probabilidade de ocorrer sucesso em um ensaio. Então $Y \sim B(n; \pi)$. Observe os seguintes gráficos:



A aproximação normal com média $\mu = n\pi$ e variância $\sigma^2 = n\pi(1 - \pi)$ aproxima-se bem das distribuições binomiais apresentadas!

Link aproximação

Distribuição normal

Quando a aproximação é boa?

Quando a probabilidade π de ocorrer sucesso não está muito próxima de 0 ou de 1 e o número n de ensaios é grande, de tal modo que $n\pi \geq 20$.

O cálculo da probabilidade pela normal é feito utilizando-se uma distribuição $N(n\pi, n\pi(1-\pi))$.

Distribuição normal

Correção de continuidade

Consiste em somar e/ou subtrair 0,5 aos limites do intervalo para o qual desejamos calcular as probabilidades.

- Em muitas situações práticas o cálculo das probabilidades pode ser realizado sem levarmos em conta a correção de continuidade;
- Ignorar a correção para os casos em que $0,30 < \pi < 0,75$ e n maior do que 400.

Exercício: As mudas em um viveiro são classificadas em grandes ou pequenas, conforme sua altura. Verificou-se que 45% das mudas são consideradas grandes. Supondo que as mudas são colocadas em recipientes que comportam 60 unidades, aleatoriamente, pergunta-se:

(a) Em que porcentagem esperada de recipientes teremos pelo menos 50% de mudas grandes? (50% é igual a 30 mudas).

(b) Em que porcentagem de recipientes teremos exatamente 50% de mudas grandes?

Distribuição Exponencial

Distribuição Exponencial

- Teoria da confiabilidade;
- Utilizada para prever o período de tempo necessário até a ocorrência de um evento;
- Probabilidade ao longo do tempo ou da distância entre ocorrências num intervalo contínuo;

Distribuição Exponencial

Distribuição Exponencial: função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que $\frac{1}{\beta}$ indica a taxa de ocorrência por unidade de medida, que pode ser tempo, distância, volume.
Notação: $X \sim E(\beta.)$

Distribuição Exponencial: Esperança e Variância

$$\mathrm{E}(X) = \beta$$

$$\mathrm{Var}(X) = \beta^2$$

(Integração por partes!)

Distribuição Exponencial

Distribuição Exponencial: função densidade de probabilidade

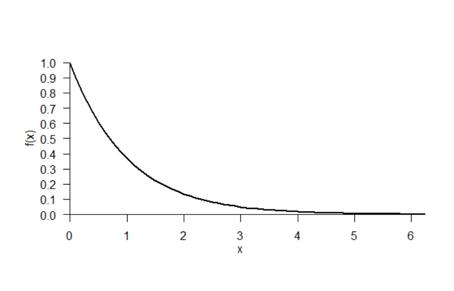


Figura: Função densidade de probabilidade exponencial com parâmetro $\beta = 1$

Distribuição Exponencial

Distribuição Exponencial

$$P(a < X < b) = \int_a^b = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{1}{\beta}x} dx = e^{-\frac{1}{\beta}a} - e^{-\frac{1}{\beta}b}.$$

Distribuição Exponencial

Exemplo: Considere que a variável volume diário de chuva (mm) em Pelotas-RS no mês de janeiro segue uma distribuição exponencial com parâmetro $\beta = 14,36$. Qual é a proporção de dias com volume de chuva superior a 30 mm?

Distribuição Exponencial

Exemplo: Uma industria fabrica lâmpadas especiais que ficam em operação continuamente. Empresa oferece aos seus clientes a garantia de reposição, caso a lâmpada dure menos de 50 horas. A vida útil dessa lâmpada é modelada por meio da distribuição exponencial com parâmetro $\beta = 8000$. Determine a proporção de trocas por defeito de fabricação.

Distribuição Exponencial

Distribuição Exponencial: Falta de memória

$$
\begin{aligned}
P(X \geq t+s | X \geq s) &= \frac{P(X \geq t+s, X \geq s)}{P(X \geq s)} = \frac{P(X \geq t+s)}{P(X \geq s)} \\
&= \frac{e^{-\frac{t+s}{\beta}}}{e^{-\frac{s}{\beta}}} \\
&= e^{-\frac{t}{\beta}} = P(X \geq t)
\end{aligned}
$$

Distribuição Exponencial

Exemplo: O intervalo de tempo, em minutos, entre emissões consecutivas de uma fonte radioativa é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\beta = 5$. Calcule:

(a) A probabilidade de haver uma emissão em um intervalo inferior a 2 minutos;

(b) A probabilidade do intervalo ser superior ou igual a 7, sabendo que ele é superior ou igual a 5.

Distribuição Weibull

Distribuição Weibull

- Teoria da confiabilidade;
- Tempo de vida.

Distribuição Weibull

Distribuição Weibull: função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que $\theta > 0$ é o parâmetro de escala e β é o parâmetro de forma.

Distribuição Weibull: acumulada

$$P(X < a) = \int_0^a \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}} dx = 1 - e^{-\left(\frac{a}{\theta}\right)^{\beta}}$$

Distribuição Weibull

Distribuição Weibull: Esperança e Variância

$$\mathrm{E}(X) = \theta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \theta^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right)^2\right]$$

$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$. Se $n \in N$, então $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ e $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Distribuição Weibull

Distribuição Weibull: função densidade de probabilidade

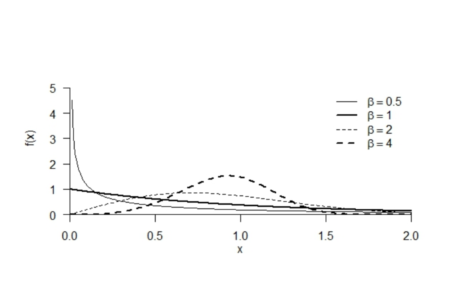


Figura: Função densidade de probabilidade Weibull com variação no parâmetro de forma β

Distribuição Weibull

Exemplo: O tempo de falha de uma submontagem eletrônica usada em uma estação de trabalho RISK é satisfatoriamente modelado por uma distribuição de Weibull com $\beta = 0,5$ e $\theta = 1000$. Obtenha o tempo médio de falha de uma submontagem. Qual a probabilidade da submontagem sobreviver mais de 4000h.

Distribuição Weibull

Exemplo: Suponha que a precipitação diária para a cidade de Santa Maria - RS, no mês de dezembro, segue uma distribuição Weibull com parâmetro de forma $\beta = 0,6792$ e parâmetro de escala $\theta = 11,6427$. Qual é a probabilidade da precipitação diária ser inferior a 10 mm no mês de dezembro?

Distribuição Qui-quadrado

Uma variável aleaória contínua Y, com valores positivos, tem uma distribuição qui-quadrado com ν graus de liberdade, se sua densidade for dada por:

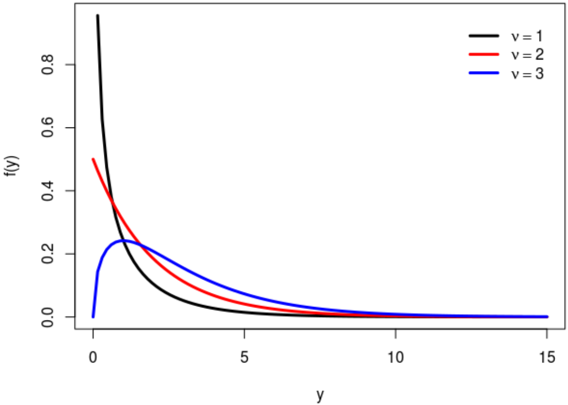
Notação: $Y \sim \chi^2_{(\nu)}$

$$f(y;\nu) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\nu/2)^{\nu/2}} y^{\nu/2-1} e^{-y/2} & \text{se } y \geq 0 \\ 0 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(Y) = \nu \qquad \mathrm{Var}(Y) = 2\nu$$

Outras distribuições importantes

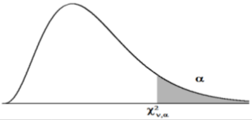
Distribuição Qui-quadrado



A distribuição qui-quadrado tem muitas aplicações e, como no caso da normal padrão, também possui uma tabela com valores de probabilidade.

Distribuição Qui-quadrado

Quantis da distribuição Quiquadrado: $P\left(\chi^2_\nu \geq \chi^2_{\nu,\alpha}\right) = \alpha$



G.L.	α									
ν	0.99	0.975	0.95	0.90	0.50	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.00016	0.00098	0.0039	0.016	0.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.020	0.051	0.103	0.211	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.115	0.216	0.352	0.584	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.297	0.484	0.711	1.064	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.554	0.831	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.872	1.24	1.64	2.20	5.35	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82

Distribuição Qui-quadrado

Exemplo:

$$Y \sim \chi^2_{(10)}, \quad \begin{array}{l} P(Y > 2,56) = 0,99 \\ P(Y > 18,31) = 0,05 \end{array}$$

Distribuição Qui-quadrado

Resultado importante:

Considere uma Z$\sim$ N$(0,1)$. Se Y$=$ Z^2, tem-se que Y$\sim$ $\chi^2_{(1)}$. Portanto, o quadrado de uma variável aleatória que segue uma distribuição normal padronizada corresponde a uma distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade.

De modo geral, uma distribuição qui-quadrado com ν graus de liberdade pode ser vista como a soma de ν normais padronizadas independentes ao quadrado.

Outras distribuições importantes

Distribuição t de Student

Seja Z uma variável aleatória N(0,1) e Y uma variável aleatória $\chi^2_{(\nu)}$, com Z e Y independentes. Então, a variável

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}},$$

tem densidade dada por

$$f(t,\nu) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}}(1+t^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

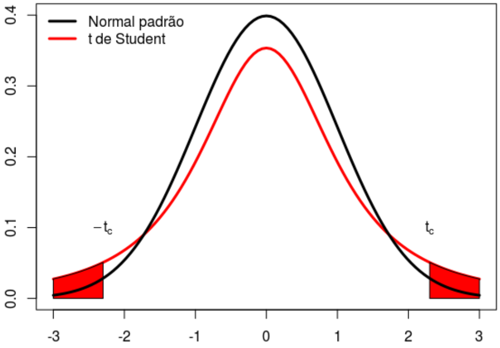
Dizemos que a variável tem uma distribuição t de Student com ν graus de liberdade.

$$\text{Notação: } T \sim t_{(\nu)}.$$

$$E(T) = 0, \qquad Var(T) = \tfrac{\nu}{\nu-2}, \nu > 2.$$

Distribuição t de Student

O gráfico da densidade t aproxima-se bastante de uma normal padrão quando ν é grande. Dessa forma, quando $\nu \to \infty$, pode-se usar a tabela da normal padrão ao invez da tabela t de Student. Para n>120 a aproximação é muito boa.

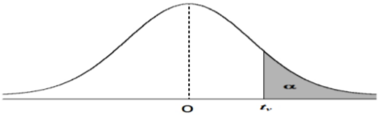


Outras distribuições importantes

Distribuição t de Student

Distribuição *t* – *Student*

$$\alpha = P(T \geq t_\nu)$$



ν	α 0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	127.3213	318.3088
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	14.0890	22.3271
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	7.4533	10.2145
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	5.5976	7.1732
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	4.7733	5.8934
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	4.3168	5.2076
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.0293	4.7853
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	3.8325	4.5008
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	3.6897	4.2968
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	3.5814	4.1437
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	3.4966	4.0247
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.4284	3.9296
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.3725	3.8520
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.3257	3.7874
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.2860	3.7328
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.2520	3.6862

Distribuição t de Student

Exemplo:

$$T \sim t_{(6)}, \quad \mathrm{P}(-1,943 < T < 1,943) = 0,90$$

$$\mathrm{P}(T > 2,4469) = 0,025$$

Outras distribuições importantes

Distribuição F de Snedecor

Vamos definir agora uma variável aleatória definida como o quociente de duas variáveis com distribuição qui-quadrado.

Sejam U e V duas variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição qui-quadrado, com ν_1 e ν_2 graus de liberdade, respectivamente. Então, a variável aleatória W dada por:

$$W = \frac{U/\nu_1}{V/\nu_2},$$

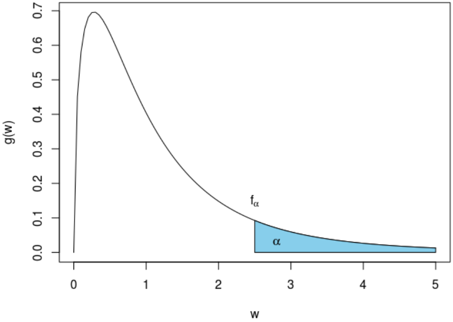
tem densidade dada por

$$g(w, \nu_1, \nu_2) = \frac{\Gamma((\nu_1 + \nu_2)/2)}{\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} \frac{w^{(\nu_1-2)/2}}{(1 + \nu_1 w/\nu_2)^{(\nu_1+\nu_2)/2}}, \quad w > 0.$$

W tem distribuição F de Snedecor, com ν_1 e ν_2 graus de liberdade.
Notação: W $\sim$ F(ν_1, ν_2)

Distribuição F de Snedecor

$$E(W) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \quad \text{e} \quad \text{Var}(W) = \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)}$$



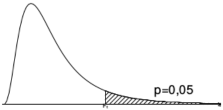
Na tabela são dados os pontos f_α, tais que

$$P(W > w_\alpha) = \alpha$$

Outras distribuições importantes

Distribuição F de Snedecor

Distribuição F de Snedecor a 5% (p=0,05)



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	18	20	30	40	60	120
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,42	19,43	19,43	19,44	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,71	8,70	8,69	8,67	8,66	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,87	5,86	5,84	5,82	5,80	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,64	4,62	4,60	4,58	4,56	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,96	3,94	3,92	3,90	3,87	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,53	3,51	3,49	3,47	3,44	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,24	3,22	3,20	3,17	3,15	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,03	3,01	2,99	2,96	2,94	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,86	2,85	2,83	2,80	2,77	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,74	2,72	2,70	2,67	2,65	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,64	2,62	2,60	2,57	2,54	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,55	2,53	2,51	2,48	2,46	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,48	2,46	2,44	2,41	2,39	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,42	2,40	2,38	2,35	2,33	2,25	2,20	2,16	2,11
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,37	2,35	2,33	2,30	2,28	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,33	2,31	2,29	2,26	2,23	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,29	2,27	2,25	2,22	2,19	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,26	2,23	2,21	2,18	2,16	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,22	2,20	2,18	2,15	2,12	2,04	1,99	1,95	1,90
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,20	2,18	2,16	2,12	2,10	2,01	1,96	1,92	1,87
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,17	2,15	2,13	2,10	2,07	1,98	1,94	1,89	1,84
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,15	2,13	2,11	2,08	2,05	1,96	1,91	1,86	1,81
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,13	2,11	2,09	2,05	2,03	1,94	1,89	1,84	1,79
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,11	2,09	2,07	2,04	2,01	1,92	1,87	1,82	1,77
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,09	2,07	2,05	2,02	1,99	1,90	1,85	1,80	1,75

Quantis da distribuição F para a probabilidade $P(W \geq w_\alpha) = 0,05$. Graus de liberdade do numerador dado no topo e do denominador na margem esquerda.

Distribuição F de Snedecor

Exemplo:

$$W \sim F(5,7), \quad P(W > 3,97) = 0,05$$

$$P(W \leq 3,97) = 0,95$$

Variáveis aleatórias no software R

No exemplo com feijões...

X: Número de germinações em 3 sementes

$$X \sim \text{Binomial}(3; 0,3)$$

x	$P(X = x) = P(x)$
0	0,343
1	0,441
2	0,189
3	0,027
Total	1,000

Para obter as probabilidades especificadas acima, utilizaremos o seguinte comando:

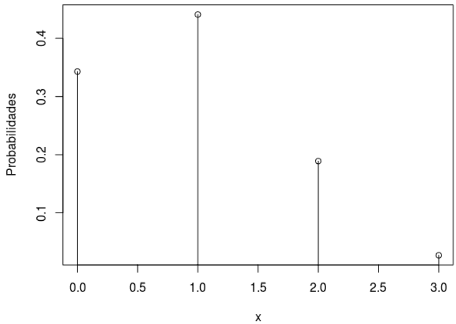
Probabilidade da distribuição Binomial com $n = 3$ e $\pi = 0,3$

```
> dbinom(x=0, size=3, prob=0.3)
[1] 0.343
```

Variáveis aleatórias no software R

Gráfico da distribuição Binomial com $n = 3$ e $\pi = 0,3$

```
n<-3
pi<-0.3
xvalores=0:3
prob<-dbinom(xvalores,n,pi)
plot(xvalores,prob, xlab="x", ylab="Probabilidades")
points(xvalores,dbinom(xvalores,n,pi),type="h")
```



Variáveis aleatórias no software R

No exemplo de diâmetro de árvores de uma floresta...

X $\sim$ Normal(23; 49)

$$\begin{aligned} P(X < 17) &= 0,1949 \\ P(17 < X < 30) &= 0,6465 \end{aligned}$$

Probabilidade da distribuição Normal com $\mu = 17$ e $\sigma^2 = 49$

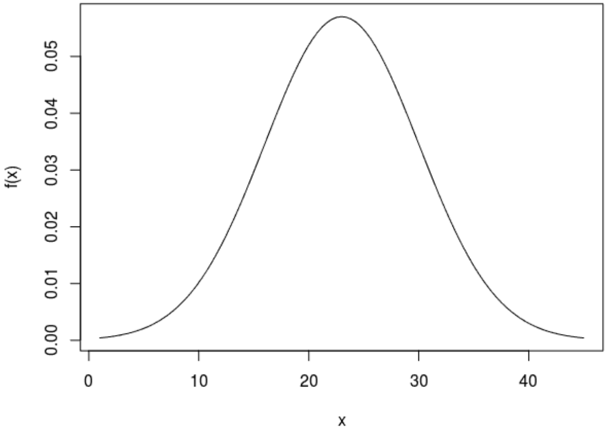
```
pnorm(q=17, mean=23, sd=7)
[1] 0.195683

> pnorm(q=30, mean=23, sd=7) - pnorm(q=17, mean=23, sd=7)
[1] 0.6456618
```

A diferença de valores obtidos é referente aos métodos de integração utilizados.

Variáveis aleatórias no software R

Gráfico da distribuição Normal com $\mu = 23$ e $\sigma^2 = 49$

```
curve(dnorm(x,mean=23,sd=7), from=1, to=45, ylab="f(x)"
```



Variáveis aleatórias no software R

X $\sim$ Normal$(23; 49)$

$P(X < x_1) = 0,20$

Quantil da Normal com $\mu = 23$, $\sigma^2 = 49$ e probabilidade $0,20$

```
> qnorm(p=0.2, mean=23, sd=7)
[1] 17.10865
```

Portanto, $x_1 = 17,108$.

Distribuição qui-quadrado

$Y \sim \chi^2_{(10)}$

$$\begin{aligned} P(Y > 2,558) &= 1 - P(Y < 2,558) \\ &= 0,99 \end{aligned}$$

```
> 1-pchisq(q=2.558,df=10)
[1] 0.9900033
```

ou

```
> pchisq(q=2.558,df=10, lower.tail=FALSE)
[1] 0.9900033
```

$$P(Y > y) = 0,99$$

```
> qchisq(p=0.99, df=10, lower.tail=FALSE)
[1] 2.558212
```

Distribuição t de Student

$T \sim t_{(6)}$

$$\mathrm{P}(T > 2,447) \quad = \quad 0{,}025$$

```
> pt(q=2.447,df=6, lower.tail=FALSE)
[1] 0.02499701
```

$$P(T > t) \quad = \quad 0,025$$

```
> qt(p=0.025, df=6, lower.tail=FALSE)
[1] 2.446912
```

Variáveis aleatórias no software R

Distribuição F de Snedecor

$W \sim \mathrm{F}(5, 7)$

$$\mathrm{P}(W > 3,97) \quad = \quad 0{,}05$$

```
> pf(q=3.97,df1=5, df2=7, lower.tail=FALSE)
[1] 0.05004428
```

$$P(W > w_\alpha) \quad = \quad 0,05$$

```
> qf(p=0.05, df1=5, df2=7, lower.tail=FALSE)
[1] 3.971523
```