Turbulência

J. L. Baliño

Escola Politécnica - Universidade de São Paulo

Apostila de aula
2017, v. 1



Sumário

1 Introdução

2 Equações médias da turbulência

3 Estrutura turbulenta de cisalhamento

4 Transporte de energia cinética turbulenta



Características da turbulência

Não existe uma definição precisa da turbulência, mas podemos dizer que é um estado de contínua instabilidade. Toda vez que o escoamento muda como consequência de uma instabilidade, nossa capacidade para decrever os detalhes dele é reduzida. Características da turbulência são:

Irregularidade ou aleatoriedade, o que faz impossível um tratamento determinístico; um tratamento estatístico é preferido;

Difusividade, o que aumenta a mistura e o transporte de massa, momento e energia;

Grandes números de Reynolds, suficientes para amplificar as perturbações nos termos não lineares das equações de conservação;

Natureza rotacional e tridimensional, mostrada através da dinâmica da vorticidade;

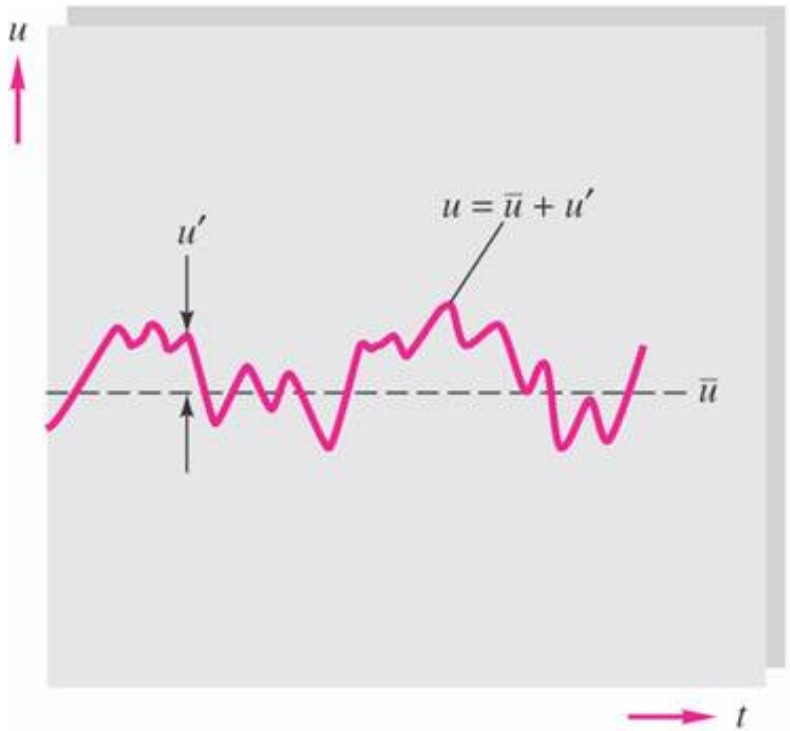
Dissipação, o que significa que a turbulência precisa de fornecimento de energia cinética para manter o escoamento; de outra maneira as flutuações se amortecem;

Natureza contínua, o que significa que as menores escalas da turbulência são muito maiores que as escalas moleculares, e

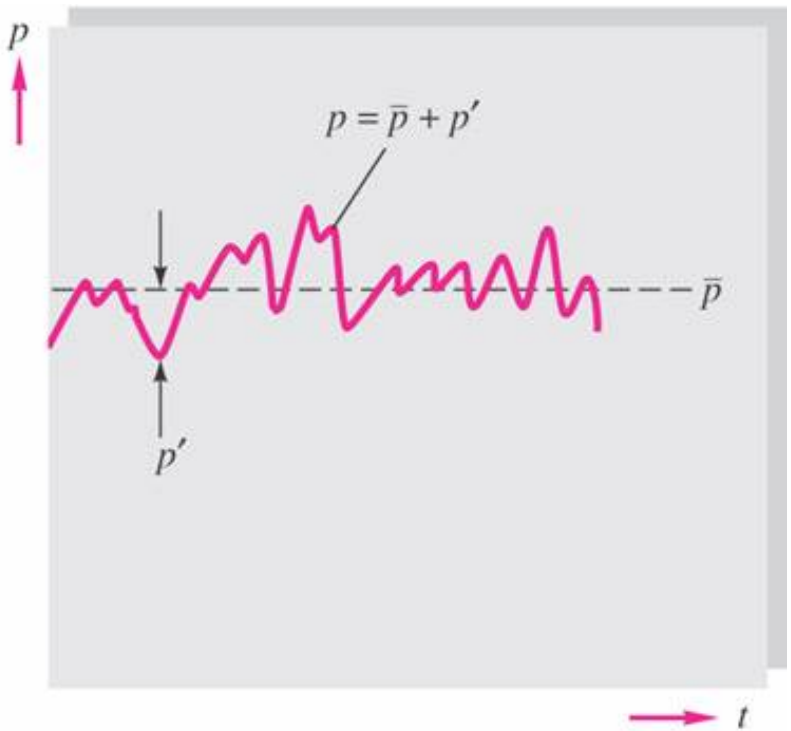
Propriedade do escoamento e não do fluido. A dinâmica da turbulência é a mesma e, para grandes números de Reynolds, independe das propriedades físicas dos fluidos.



Tratamento estatístico



(a)



(b)



Tratamento estatístico

Consideramos às variáveis como a soma de um valor médio e uma flutuação:

$$\chi(\boldsymbol{r}, t) = \overline{\chi}(\boldsymbol{r}, t) + \chi'(\boldsymbol{r}, t)$$

Para variáveis com média independente do tempo ou variando muito lentamente, o valor médio pode ser calculado como:

$$\overline{\chi}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2s} \int_{-s}^{s} \chi(\boldsymbol{r}, t + s')\, ds'$$

onde s é grande comparado com a escala temporal de variação de χ. Para variáveis médias com escalas temporais curtas:

$$\overline{\chi}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi_i(\boldsymbol{r}, t)$$

onde $\overline{\chi}_i$ é a variável medida em forma instantânea para o tempo t no i-ésimo de n experimentos realizados em forma independente (média no conjunto ou *ensemble average*).



Tratamento estatístico

De acordo com a definição, resultam as seguintes propriedades:

$$\overline{(\overline{\chi})} = \overline{\chi} \; ; \; \overline{\chi'} = 0$$

Notar que:

$$\overline{\chi\,\varphi} = \overline{(\overline{\chi} + \chi')\,(\overline{\varphi} + \varphi')} = \overline{\chi}\,\overline{\varphi} + \overline{\chi}\,\overline{\varphi'} + \overline{\chi'}\,\overline{\varphi} + \overline{\chi'\,\varphi'} = \overline{\chi}\,\overline{\varphi} + \overline{\chi'\,\varphi'}$$

O termo $\overline{\chi'\,\varphi'}$ mede a *correlação* entre as variáveis χ e φ; para $\overline{\chi'\,\varphi'} = 0$, as variáveis não estão correlacionadas e são estatisticamente independentes. A raiz quadrada da flutuação quadrática média se denomina *intensidade* da flutuação $\left(\overline{\chi'^2}\right)^{1/2}$. Definimos a intensidade da turbulência $\left(\overline{q^2}\right)^{1/2}$ como:

$$\left(\overline{q^2}\right)^{1/2} = \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right)^{1/2}$$

A intensidade da turbulência está associada com a energia cinética turbulenta por unidade de volume $\sum = \frac{1}{2}\,\rho\,\overline{q^2}$.

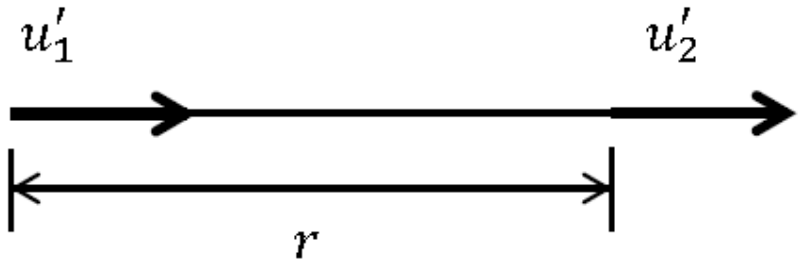


Tratamento estatístico

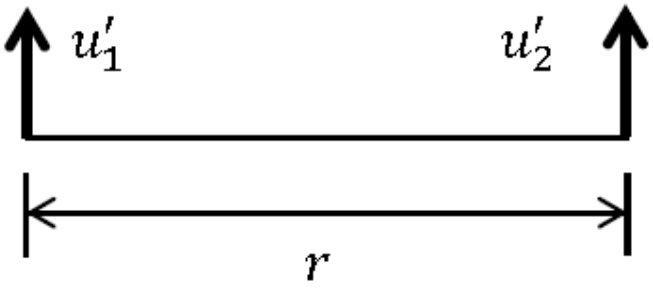
Definimos o coeficiente de correlação entre flutuações de velocidade gerais u'_1 e u'_2 como:

$$R = \frac{\overline{u'_1\, u'_2}}{\left(\overline{u'^2_1}\right)^{1/2} \left(\overline{u'^2_2}\right)^{1/2}}$$

As flutuações podem corresponder, por exemplo, às mesmas ou diferentes componentes de velocidade em diferentes pontos (correlação espacial); essa correlação dependerá da magnitude e direção da distância entre os pontos considerados. Considerando a mesma componente, podemos ter correlações longitudinais e laterais.



longitudinal



lateral

Tratamento estatístico

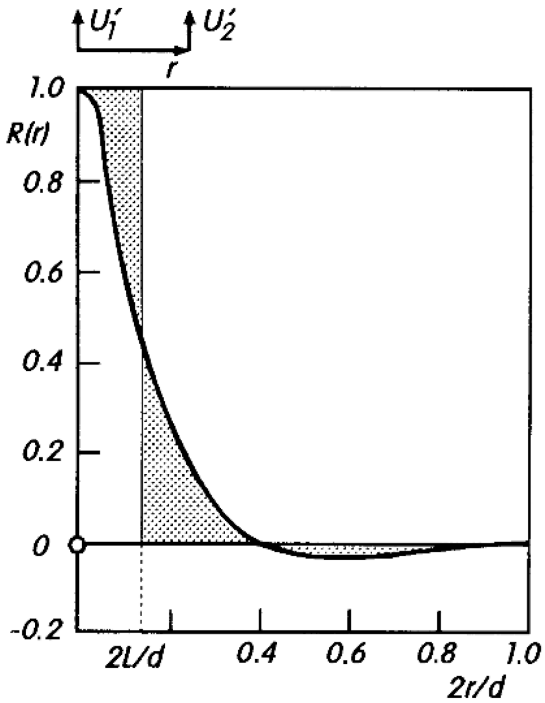


Fig. 16.3. Correlation function for the turbulent longitudinal velocity fluctuations u_1' in the centre of a pipe related to the velocity fluctuations u_2' at a distance r, after measurements by L.F.G. Simmons; C. Salter (1938); cf. also G.I. Taylor (1936)

Para $r \to 0$, $R \to 1$ com $\frac{dR}{dr} \to 0$ (máximo local). Para $r \to \infty$ as flutuações se tornam independentes e $R \to 0$. Podem ser definidos estimadores da *escala espacial* da turbulência: a) $\int_0^\infty R\,dr$; b) Distância na qual R cai a e^{-1}; c) Distância na qual R é mínimo.



Tratamento estatístico

Para a mesma componente de velocidade no mesmo ponto, mas para diferentes tempos ($u'(t)$ e $u'(t+s)$), obtemos o coeficiente de *autocorrelação*, que pode ser utilizado para definir uma *escala temporal* da turbulência.
Também podemos correlacionar flutuações em diferentes posições e instantes de tempo (correlações espaço-tempo), úteis para ter informação das trajetórias das estruturas de vórtices turbulentos.
Finalmente, pode ser feita uma análise de Fourier do espectro (frequências) das flutuações de velocidade.

Para ter uma ideia das ordens de grandeza, as flutuações turbulentas da velocidade podem ser de $1-20\,\%$ da velocidade média, abrangendo um espectro de frequências entre $1-10^4\,Hz$, com escalas espaciais entre $0,01-400\,cm$; essas escalas espaciais são muito maiores que as escalas associadas aos processos moleculares.



Equações médias da turbulência

Aplicamos o operador "média" às equações de continuidade e de Navier-Stokes, considerando que todas as variáveis estão representadas por um valor médio e uma flutuação. Utilizamos a notação indicial de Einstein (soma quando aparecem subscritos repetidos). Na equação de continuidade:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \nabla \cdot \left(\overline{\boldsymbol{V}} + \boldsymbol{V'}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u}_i + u_i'\right) = 0$$

Aplicando a média, resulta:

$$\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{V}} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

Substraindo a equação média da equação instantânea, resulta:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V'} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0$$

Isto é, o tanto a velocidade média quanto a flutuação são solenoidais (têm divergente nulo).



Equações médias da turbulência

Na equação de momento:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{u}_i + u_i'\right) + \left(\overline{u}_j + u_j'\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_i + u_i'\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{p} + p'\right) + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\overline{u}_i + u_i'\right)$$

Aplicando a média, resulta:

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_j\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j^2}$$

$$u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i'\,u_j'\right) - u_i'\frac{\partial u_j'}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i'\,u_j'\right) \quad \text{pois} \quad \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} = 0$$

Substituindo, obtemos:

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_j\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i'\,u_j'}\right)$$



Equações médias da turbulência

Vemos que, quando expressamos a equação de momento em termos das variáveis médias, aparece um termo adicional como consequência da média do termo não linear (aceleração convectiva), que resulta o divergente do *tensor de tensões turbulentas de Reynolds*:

$$\tau_{ij}^T = -\rho\left(\overline{u_i' u_j'}\right) \quad ; \quad \{\tau^T\} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u' v'} & \overline{u' w'} \\ \overline{u' v'} & \overline{v'^2} & \overline{v' w'} \\ \overline{u' w'} & \overline{v' w'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix}$$

Em notação vectorial, as equações médias resultam:

$$\frac{D\overline{\boldsymbol{V}}}{Dt} = \frac{\partial \overline{\boldsymbol{V}}}{\partial t} + \nabla \overline{\boldsymbol{V}} \cdot \overline{\boldsymbol{V}} = -\frac{1}{\rho}\nabla \overline{p} + \nu \nabla^2 \overline{\boldsymbol{V}} + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}^T$$

O tensor de tensões turbulentas pode ser grande comparado com o tensão de tensões viscosas molecular e precisa ser modelado para fechar matematicamente o problema.

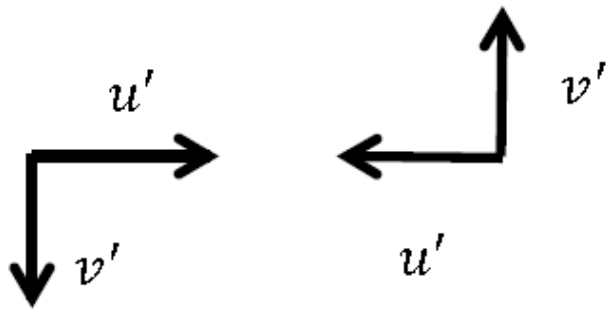


Estrutura turbulenta de cisalhamento

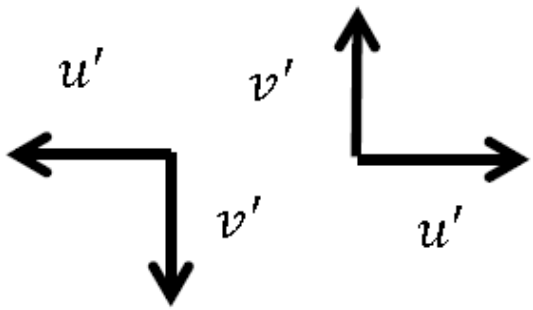
Considerando um problema bidimensional, permanente nas variáveis médias, com a aproximação de camada limite (tensões de cishalamento predominantes) temos:

$$\overline{u}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{d\overline{p}}{dx} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - \rho\,\overline{u'\,v'}\right)$$

Uma correlação não nula $\overline{u'\,v'}$ implica que as flutuações não são independentes e que existe uma anisotropia na intensidade da turbulência. Por exemplo, se $\overline{u'\,v'} < 0$, então quando u' é positivo é mais provável que v' seja negativo, e viceversa.



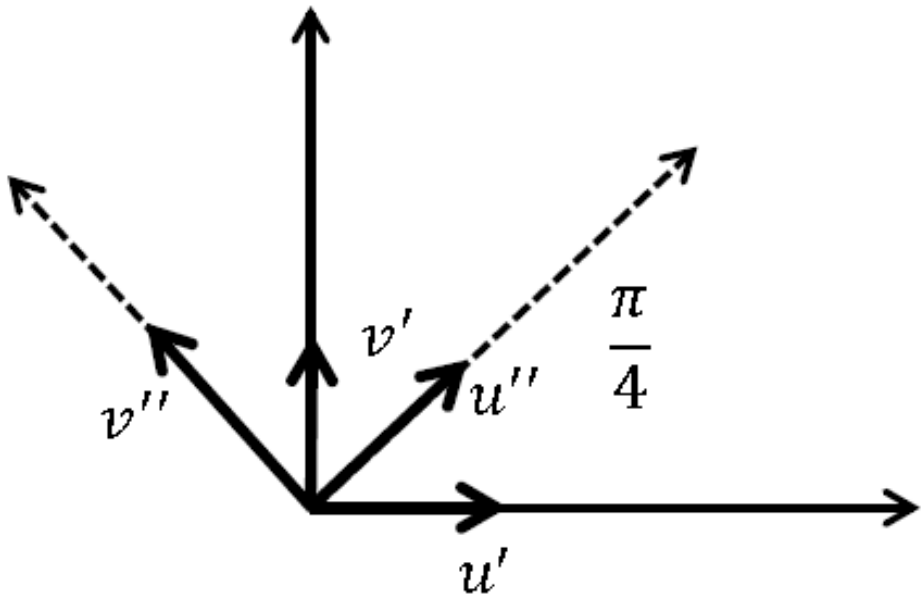
mais provável



menos provável



Estrutura turbulenta de cisalhamento

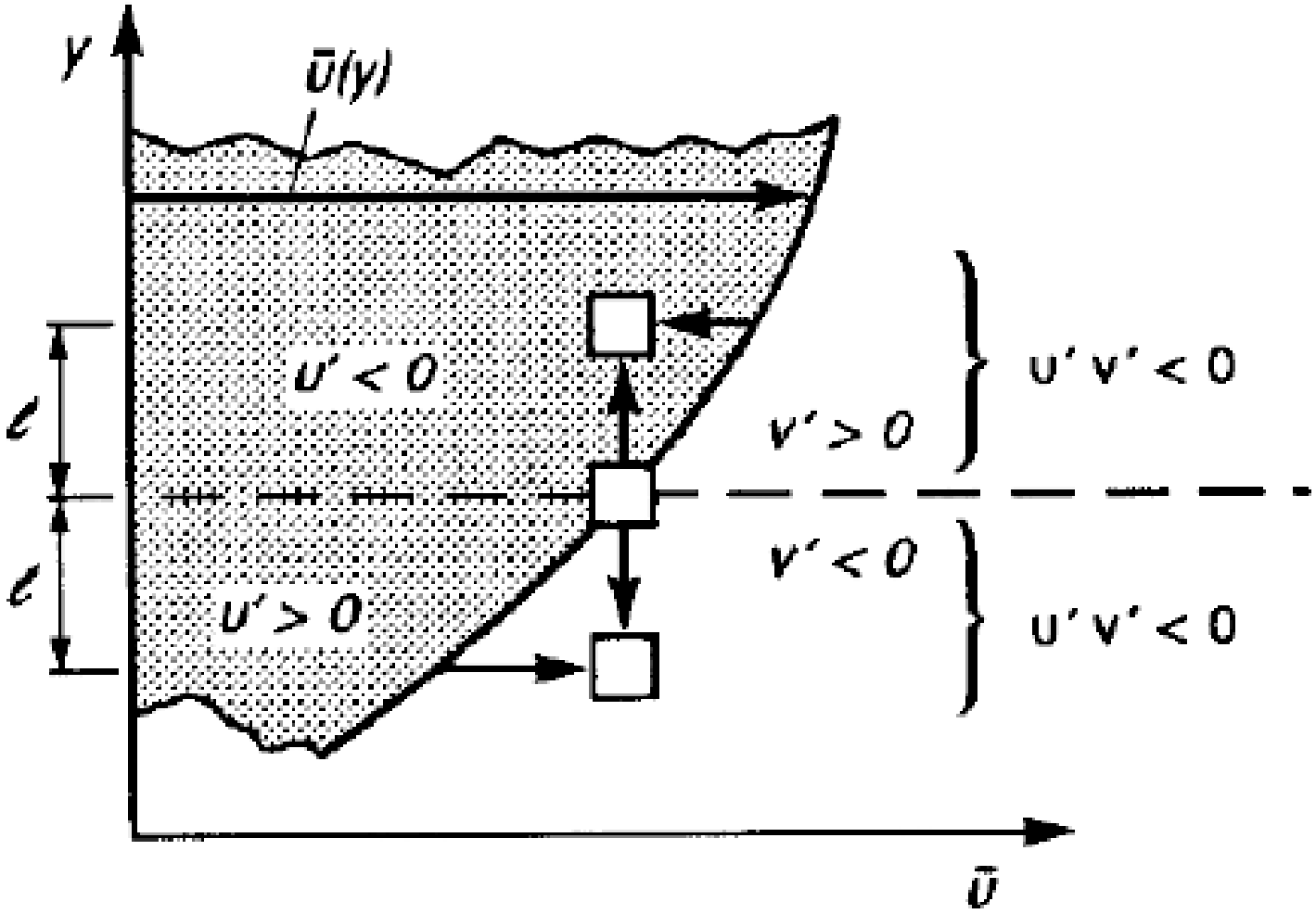


Escrevendo o termo $\overline{u'\,v'}$ em eixos rotados em $\frac{\pi}{4}$ em relação aos eixos originais, as flutuações u'' e v'' nestes eixos resultam:

$$\begin{aligned} u'' &= (u' + v')\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ v'' &= (v' - u')\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u' &= (u'' - v'')\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ v' &= (u'' + v'')\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad \therefore \quad \overline{u'\,v'} = \frac{1}{2}\left(\overline{u''^2} - \overline{v''^2}\right)$$



Estrutura turbulenta de cisalhamento



Estrutura turbulenta de cisalhamento

Uma correlação $\overline{u'\,v'} < 0$ acontece em um escoamento de cisalhamento, onde $\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} > 0$. Uma partícula com $v' > 0$ se deslocará de uma região de menor velocidade a outra de maior velocidade, em média freando as partículas na camada superior e gerando uma flutuação $u' < 0$, e viceversa. Baseado neste conceito, é definida uma *difusividade turbulenta* ν_T, de maneira que:

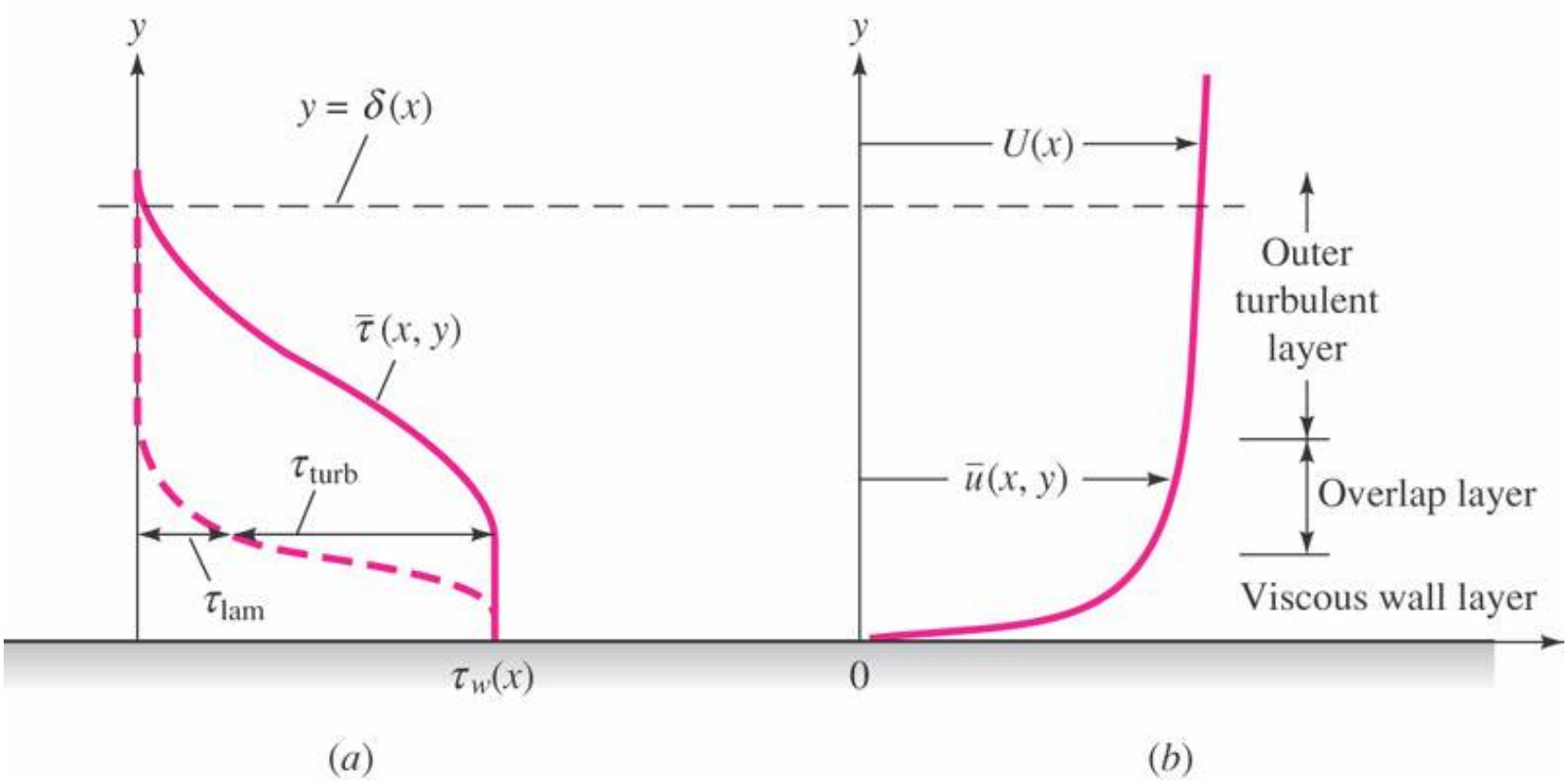
$$-\overline{u'\,v'} = \nu_T \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \quad \therefore \quad \frac{\tau}{\rho} = (\nu + \nu_T) \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$$

A tensão de cisalhamento tem uma contribuição laminar e turbulenta. Notar que, diferentemente de ν, a difusividade turbulenta ν_T *não é* uma propriedade termodinâmica, senão que depende do escoamento.

$$\tau_{lam} = \mu \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \quad ; \quad \tau_{turb} = -\rho\,\overline{u'\,v'}$$



Estrutura turbulenta de cisalhamento



Distribuição de velocidade na parede

Prandtl (1930) propôs que a velocidade média numa posição perto da parede é função das condições locais:

$$\overline{u} = \overline{u}\left(y,\ \tau_w,\ \nu,\ \rho\right)$$

Notar que τ_w dependerá do escoamento global, mas uma vez especificado, fica definida a estrutura do escoamento perto da parede. Utilizando análise dimensional, resulta:

$$u^+ = f\left(y^+\right) \quad \text{onde} \quad u^+ = \frac{\overline{u}}{u_\tau} \ ; \ y^+ = \frac{u_\tau\, y}{\nu} \ ; \ u_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2}$$

onde u_τ é a velocidade de cisalhamento. Ficam definidas três regiões: (a) a subcamada viscosa, onde $\tau_{lam} \gg \tau_{turb}$; (b) a camada de superposição, onde $\tau_{lam} \sim \tau_{turb}$ e (c) a camada externa, onde $\tau_{lam} \ll \tau_{turb}$.



Distribuição de velocidade na parede

Na subcamada viscosa ($y^+ \leq 5$), a tensão de cisalhamento é aproximadamente constante:

$$\tau = \mu \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \cong \tau_w \quad \Rightarrow \quad u^+ = y^+$$

Na camada externa ($y^+ \geq 30$), a difusão molecular ν não é importante e podemos escrever:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = g\left(u_\tau, y\right) \quad \Rightarrow \quad y^+ \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = cte = \frac{1}{\kappa} \quad \Rightarrow \quad u^+ = \frac{1}{\kappa} \log y^+ + B$$

onde experimentalmente se verifica que $\kappa \cong 0,40$ e $B \cong 5,5$.
Na camada de superposição ($5 \leq y^+ \leq 30$), o perfil pode ser interpolado como:

$$u^+ = -3,05 + 5,00 \log y^+$$



Modelo de comprimento de mistura

Baseado na troca de grupo de partículas (com escalas espaciais ou comprimentos de mistura l muito maiores que as escalas moleculares) entre as camadas, no sentido transversal. As partículas em $y - l$ (mais lentas) freiam as partículas em y (mais rápidas), gerando uma flutuação $u' < 0$:

$$u'(y) \cong \overline{u}(y-l) - \overline{u}(y-l) \cong -l\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} < 0$$

Supondo que as flutuações de velocidade têm a mesma ordem de grandeza ($u' \sim v'$), resulta:

$$\tau_{turb} = -\rho, \overline{u'\,v'} \approx \rho\, l^2 \left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$$

Na região turbulenta da camada externa, Prandtl propôs $l = \kappa\, y$, o que é consistente com a lei logarítmica de velocidade na parede.



Distribuição de velocidade na parede

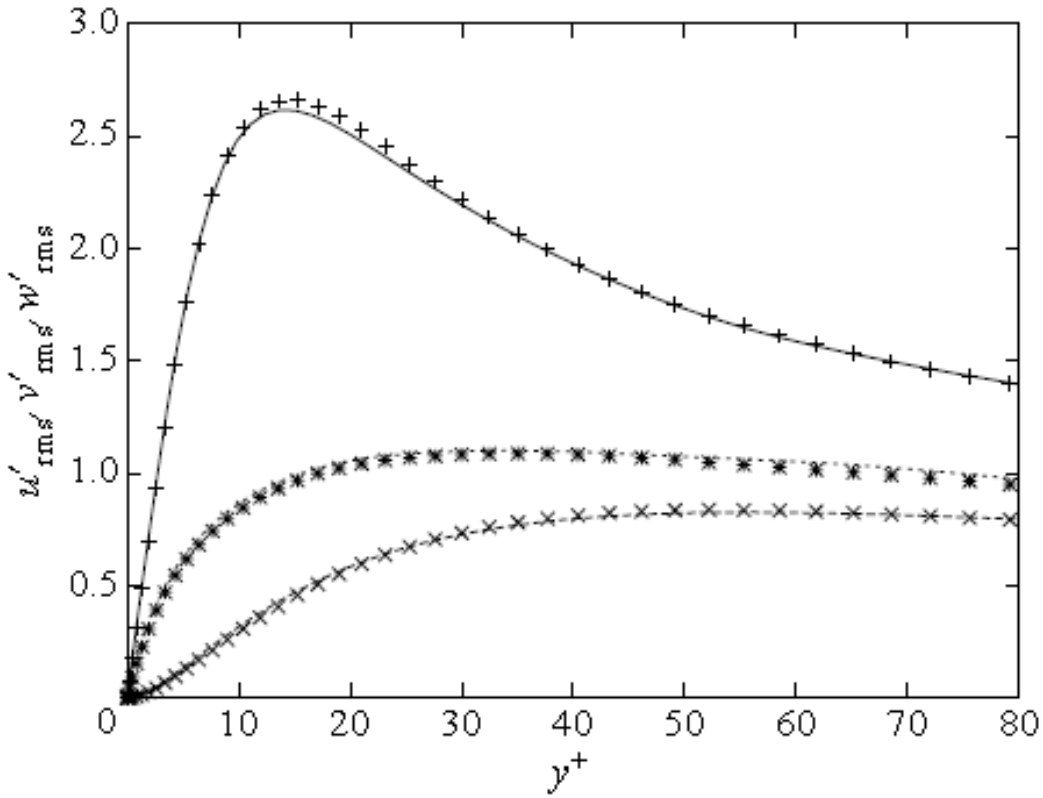


Figure 2. Rms values of the velocity fluctuations normalized by the friction velocity in wall coordinates. Present work: solid line, (u'_{rms}); dashed line, (v'_{rms}); dotted line, (w'_{rms}). Data from Moser *et al.* (1999): plus, (u'_{rms}); times, (v'_{rms}); asterisk, (w'_{rms}).

Distribuição de velocidade na parede

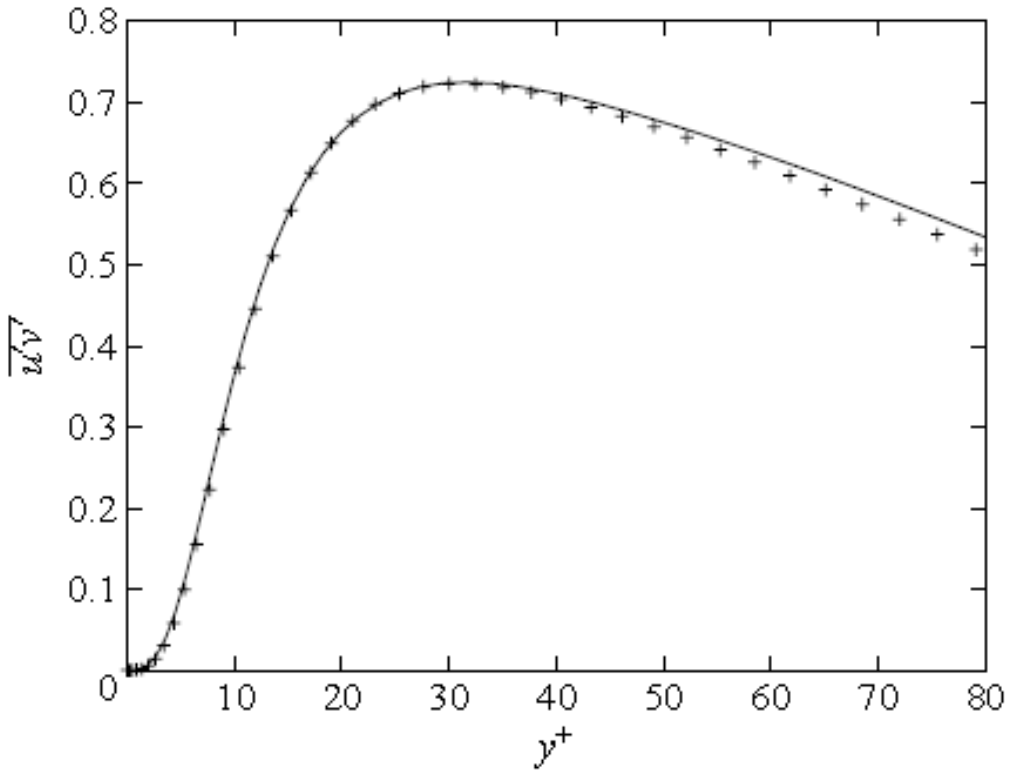


Figure 3. Reynolds shear stress ($-\overline{u'v'}$) normalized by the friction velocity in wall coordinates. Present work: solid line. Data from Moser *et al.* (1999): plus.

Distribuição de velocidade na parede

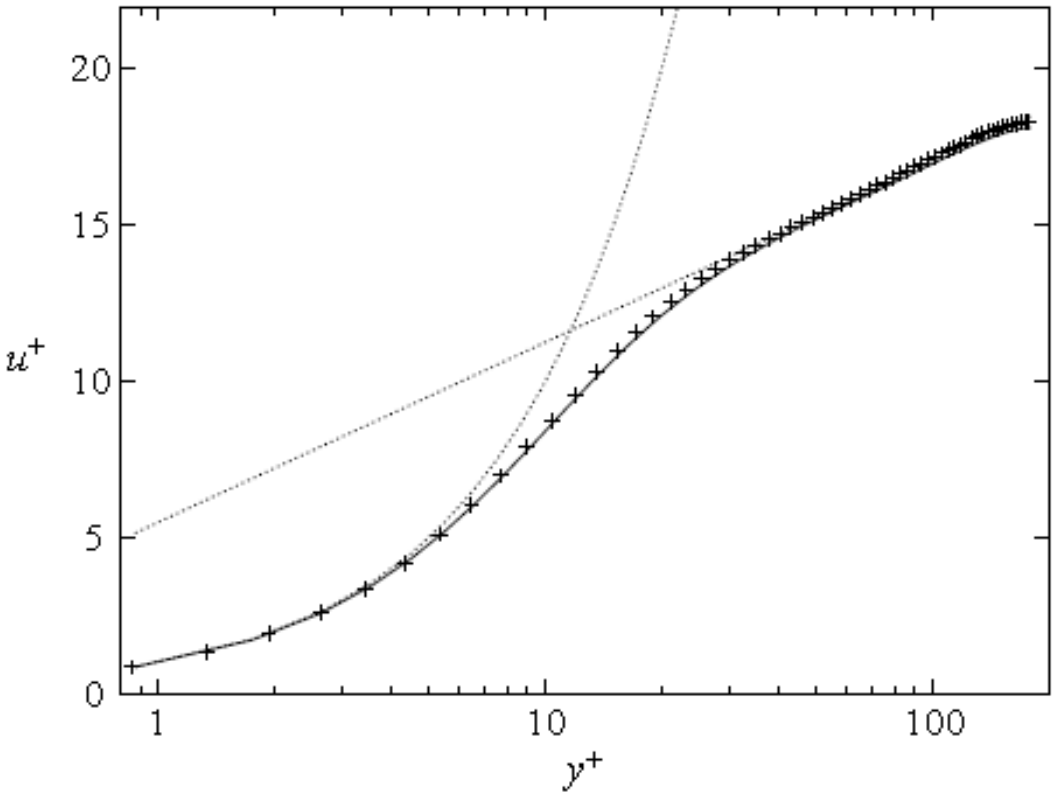
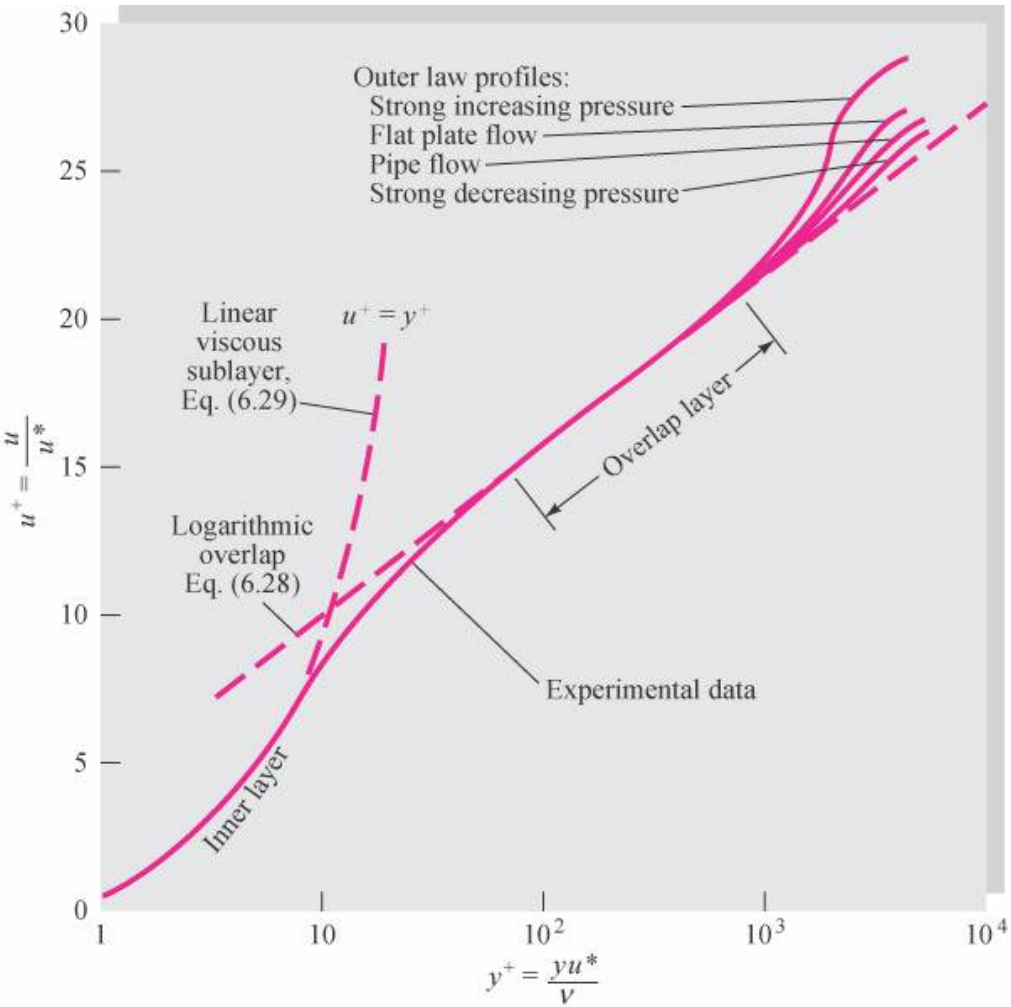


Figure 1. Mean velocity profile normalized by the friction velocity in wall coordinates. Present work: solid line. Data from Moser *et al.* (1999): plus. Law of the wall $u^+ = y^+$ and $u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$: dotted line.

Distribuição de velocidade na parede





Transporte de energia cinética turbulenta

Analisaremos a interação entre o escoamento médio e as flutuações para obter uma equação de transporte da energia cinética da turbulência.
Substraindo a equação média de momento da equação de momento, resulta:

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} - \overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}$$

Multiplicando pela correspondente componente da flutuação de velocidade (e sumando nas três componentes, já que o subscrito i aparece repetido), resulta:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(u_i'^2 \right) + \frac{1}{2} \overline{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i'^2 \right) + u_i' u_j' \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + u_i' u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} - \overline{u_i' u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$$
$$= -\frac{1}{\rho} u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}$$



Transporte de energia cinética turbulenta

Levando em conta a equação de continuidade, podemos por:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u'^2_i\, u'_j\right) = 2\, u'_i\, u'_j\, \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'^2_i\, \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 2\, u'_i\, u'_j\, \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \;\Rightarrow\; u'_i\, u'_j\, \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\, \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u'^2_i\, u'_j\right)$$

$$u'_i\, \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p'\, u'_i\right) + p'\, \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p'\, u'_i\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(p'\, u'_j\right)$$

Substituindo na equação anterior, aplicando a média e levando em conta que $q^2 = u'^2_i$ obtemos:

$$\frac{1}{2}\, \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{q^2}\right) + \frac{1}{2}\, \overline{u}_j\, \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{q^2}\right)$$

$$= -\overline{u'_i\, u'_j}\, \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\, \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{q^2\, u'_j}\right) - \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{p'\, u'_j}\right) + \nu\, \overline{u'_i\, \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2}}$$



Transporte de energia cinética turbulenta

Aliás:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{q^2}\right) + \frac{1}{2}\overline{u}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{q^2}\right) = \frac{D_{\overline{u}}\,\overline{q^2}}{Dt}$$

$$u_i'\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right) - \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(q^2\right) - \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2$$

Substituindo, obtemos finalmente:

$$\frac{D_{\overline{u}}\,\overline{q^2}}{Dt} = -\overline{u_i'\,u_j'}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\overline{q^2\,u'}_j + \frac{1}{\rho}\overline{p'\,u_j'}\right) + \frac{1}{2}\nu\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\overline{q^2}\right) - \nu\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2}$$

A relação anterior mostra a taxa de variação da intensidade da turbulência acompanhando o escoamento médio. O primeiro termo do lado direito é um termo de fonte (veremos que ele é positivo); o segundo termo representa o transporte devido às flutuações de velocidade; o terceiro é um termo de difusão viscosa de intensidade da turbulência e o quarto é um termo viscoso dissipativo.



Transporte de energia cinética turbulenta

As tensões turbulentas extraêm energia do gradiente do escoamento médio, da mesma maneira que a viscosidade molecular extrai energia do gradiente do escoamento em regime laminar. Porém, em lugar de ser diretamente dissipada e transformada em calor, essa energia alimenta os vórtices turbulentos de escalas espaciais grandes. Esses vórtices decaêm por meio da dinâmica da vorticidade (alongamento, reorientação) a vórtices de escalas espaciais menores. Finalmente, depois deste processo em cascata, a energia cinética turbulenta é dissipada pela ação da viscosidade.

"Big whirls have little whirls,
That feed on their velocity;
And little whirls have lesser whirls,
And so on to viscosity".

(Lewis Fry Richardson, 1922)



Estrutura turbulenta de cisalhamento

Considerando um problema bidimensional, permanente nas variáveis médias, com a aproximação de camada limite (tensões de cisalhamento predominantes) a equação de transporte resulta:

$$\frac{1}{2}\,\overline{u}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{q^2}\right)+\frac{1}{2}\,\overline{v}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{q^2}\right)=-\frac{1}{2}\,\overline{u'\,v'}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\,\overline{q^2\,v'}+\overline{p'\,v'}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\,\nu\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\overline{q^2}\right)-\nu\,\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2}$$

