Mecânica Quântica — 7600022

Quinta Lista — teste no dia 9/5/2017

Nas questões abaixo, os auto-estados do oscilador harmônicos são denotados $|n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), em lugar de $|\varphi_n\rangle$.

1. Para um oscilador harmônico com massa m e frequência ω, calcule os seguintes elementos de matriz
   (a) $\langle 0|X^2|0\rangle$
   (b) $\langle 0|X|1\rangle$
   (c) $\langle 0|X^2|2\rangle$
   (d) $\langle n|X^2|n\rangle$, para $n \gg 1$. Compare o resultado com o valor clássico.
2. Repita o problema acima com P no lugar do operador X
3. Um operador Hermitiano A tem dois auto-estados $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ com o mesmo autovalor λ, isto é,

$$A|\phi_1\rangle = \lambda|\phi_1\rangle$$
$$A|\phi_2\rangle = \lambda|\phi_2\rangle$$

   Em outras palavras, o autovalor λ é (duas vezes) *degenerado*.
   (a) Podemos afirmar que $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ são ortogonais?
   (b) Mostre que qualquer combinação linear de $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ é também autovetor de A com autovalor λ.
   (c) Admitindo que $|\phi_2\rangle$ não seja ortogonal a $|\phi_1\rangle$, use o procedimento de Gram-Schmidt (ver Lista 3) para encontrar um vetor ortogonal a $|\phi_1\rangle$. Esse vetor é autovetor de A?
4. O operador Π é definido (em uma dimensão) pela igualdade

$$\Pi\phi(x) = \phi(-x),$$

   onde $\phi(x)$ é uma função de onda qualquer.
   (a) O operador Π é Hermitiano?
   (b) Encontre os seus autovalores e autovetores.
   (c) Os autovalores de Π são degenerados?
   (d) Verifique se Π comuta com o Hamiltoniano do oscilador harmônico.
   (e) Dado um auto-estado $|n\rangle$ ($n = 0, 1, \ldots$) do Hamiltoniano do oscilador harmônico, podemos afirmar que ele é auto-estado do operador Π? Por quê? Em caso afirmativo, qual é o autovalor de Π?
   (f) Dado um auto-estado $|\varphi\rangle$ do operador Π, podemos afirmar que ele é auto-estado do Hamiltoniano H oscilador harmônico? Por quê? Em caso afirmativo, qual é o autovalor de H?
5. A partir da função de onda $\varphi_0(x)$ encontrada na Lista 4,
   - Encontre a função normalizada $\varphi_1(x)$.
   - Mostre que $\varphi_1(x)$ é auto-estado do operador Π e determine o autovalor correspondente.
   - Mostre por integração que $\langle\varphi_0|\varphi_1\rangle = 0$.
6. Um Hamiltoniano $H = P^2/2m + V(x)$ é definido pelo potencial

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}m\omega^2 & (x > 0) \\ \infty & (x < 0). \end{cases}$$

   Encontre os autovalores de H. *Dica: na região $(x > 0)$, as autofunções $\varphi_n(x)$ satisfazem à equação diferencial do oscilador harmônico, mas devem satisfazer à condição de contorno $\varphi_n(x = 0) = 0$.*

7. Verifique se o operador L_+L_- é Hermitiano. Nas seguintes questões, os estados $|\lambda, \nu\rangle$ são auto-estados de L^2 (com autovalor $\hbar^2\lambda$) e de L_z (com autovalor $\hbar\nu$).
8. Mostre que $L_-|\lambda, \nu\rangle$ é auto-estado de L_z e encontre o autovalor.
9. Verifique se $L_+|\lambda, \nu\rangle$ e $L_-|\lambda, \nu\rangle$ são auto-estados de L^2 e encontre os autovalores correspondentes.
10. O estado $|\lambda, \nu\rangle$ é auto-estado de L_+L_-? Caso afirmativo, qual é o autovalor correspondente?