

Segunda Prova - Solução

Krissia de Zawadzki ^{TA}, Luiz Nunes de Oliveira ^F
^{TA} monitor ^{PF} docente

Abaixo a solução da monitora para a segunda prova.

Problema 1

Seja $|\phi_n\rangle$ um auto-estado normalizado do Hamiltoniano H de um oscilador harmônico com frequência ω . No enunciado abaixo, a é a combinação entre os operadores X e P definida em classe.

- (a) Mostre que $a^\dagger |\phi_n\rangle$ é também auto-estado de H .
- (b) Num dado instante, o estado quântico do operador é

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^\dagger |\phi_0\rangle + a^\dagger |\phi_1\rangle). \quad (1)$$

Se for feita uma medida de energia do oscilador nesse momento, que resultados poderão ser obtidos?

Solução

(a)

Mostrar que um estado $|\Psi\rangle = a^\dagger |\phi_n\rangle$ é autoestado de H significa mostrar que a atuação do Hamiltoniano sobre este estado não o modifica. Matematicamente, queremos obter

$$H |\Psi\rangle = \alpha |\Psi\rangle, \quad (2)$$

onde α seria o autovalor de H associado ao estado $|\Psi\rangle$.

Lembrando que o Hamiltoniano do oscilador harmônico quântico definido em termos dos operadores de aniquilação e destruição é dado por

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (3)$$

vamos calcular

$$H |\Psi\rangle = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) a^\dagger |\phi_n\rangle \quad (4)$$

e verificar se

$$H |\Psi\rangle = \alpha a^\dagger |\phi_n\rangle, \quad (5)$$

determinando o α que satisfaz a igualdade.

$$\begin{aligned}
 H a^\dagger |\phi_n\rangle &= \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) a^\dagger |\phi_n\rangle \\
 &= \hbar\omega a^\dagger \underbrace{a a^\dagger}_{a^\dagger a + 1} |\phi_n\rangle + \frac{1}{2} \hbar\omega a^\dagger |\phi_n\rangle \\
 &= \hbar\omega a^\dagger (a^\dagger a + 1) |\phi_n\rangle + \frac{1}{2} \hbar\omega a^\dagger |\phi_n\rangle \\
 &= \hbar\omega a^\dagger \underbrace{(n+1)}_{n+1 \rightarrow m} |\phi_n\rangle + \frac{1}{2} \hbar\omega a^\dagger |\phi_n\rangle \\
 &= \hbar\omega \left(m + \frac{1}{2} \right) a^\dagger |\phi_n\rangle \\
 &= E_m a^\dagger |\phi_n\rangle \\
 &= E_{n+1} a^\dagger |\phi_n\rangle.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Desse modo, mostramos que $a^\dagger |\phi_n\rangle$ é, de fato, autoestado de H e identificamos seu autovalor como sendo E_{n+1} .

Apreciem: Esse resultado tem um significado especial. Quando H atua em um de seus auto-estados $|\phi_n\rangle$ obtemos a energia correspondente ao seu número quântico n . Por sua vez, quando este estado é modificado pela atuação do operador de criação $a^\dagger$, ele ganha um quantum energia de $\hbar\omega$. Equivalentemente, ao aplicar o operador de destruição a no estado $|\phi_n\rangle$ é como se ele perdesse um quantum de energia $\hbar\omega$. Esquemáticamente, podemos ilustrar isto através da figura(1).

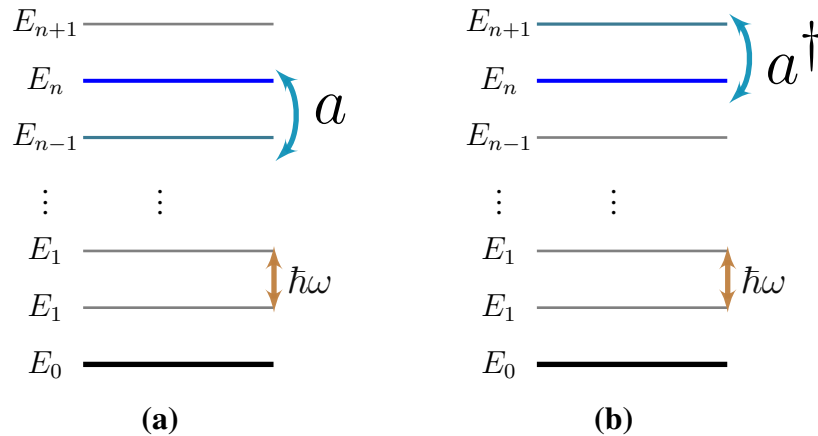


Figura 1. Atuação dos operadores de (a) criação $a^\dagger$ e (b) destruição a nos autoestados do oscilador harmônico quântico.

(b)

Dada a relação obtida no item (a) eq. (6), a atuação do Hamiltoniano H no estado proposto em(1) teria como resultado

$$H |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_1 a^\dagger |\phi_0\rangle + E_2 a^\dagger |\phi_1\rangle), \tag{7}$$

pois o estado proposto é uma combinação dos autoestados $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ a menos de uma constante multiplicativa.

Assim, as energias que seriam medidas no instante em que o OH é descrito pelo estado da eq. (1) são

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{3\hbar\omega}{2} \\ E_2 &= \frac{5\hbar\omega}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

OBS: Veja que esses são os possíveis valores medidos. Isso significa que se você for no laboratório para medir a energia, você irá observar ou E_1 ou E_2 . Ué??? Mas, eu calculei o valor esperado da energia e obtive um resultado

$$\langle E \rangle \propto E_1 + 2E_2 = \frac{13}{2}\hbar\omega, \quad (9)$$

pois

$$H|\Psi\rangle \propto E_1|\psi_1\rangle + \sqrt{2}E_2|\psi_2\rangle. \quad (10)$$

Sim, você está correto! Mas, o valor esperado para a medida de energia significa que se você fosse ao laboratório medir a energia um número N de vezes, em média, em $1/3$ das suas medidas você obteria o valor E_1 e em $2/3$ das suas medidas você obteria o valor E_2 .¹

Problema 2

Suponhamos que o Hamiltoniano de um elétron seja dado pela matriz

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

- Quais as energias que os elétrons pode ter?
- Encontre o valor médio esperado da energia no estado

$$|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} i \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Se for feita uma medida de energia do oscilador nesse momento, que resultados poderão ser obtidos?

¹Veja que a conclusão entre a proporção de medidas $1/3$ e $2/3$ independe do fator de normalização de $|\Psi\rangle$, pois o estado $|\phi_2\rangle$ em (7) aparece com o dobro de probabilidade ($\sqrt{2}^2$) em relação ao $|\phi_1\rangle$.

Solução

(a)

Em Mecânica Quântica representamos as projeções dos operadores em uma base de autoestados através de matrizes. Assim, encontrar os as energias possíveis associadas ao operador Hamiltoniano é equivalente a diagonalizar a sua matriz correspondente.

Para diagonalizarmos a matriz da eq. (11), basta calcular as soluções do polinômio característico

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ &= \lambda^2 - 1 = 0 \\ \lambda &= \pm 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Assim, os possíveis valores de energia são $E_- = -1$ e $E_+ = +1$.

(b)

Lidando com MQ a partir das definições de álgebra linear, nossos estados ket's são vetores coluna, enquanto nossos bra's são os correspondentes conjugados. No nosso problema, o bra correspondente ao estado da eq. (12) é

$$\langle \Psi | = \begin{bmatrix} -i \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Calcular o valor esperado da energia se resume, então, a duas multiplicações matriciais:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | H | \Psi \rangle &= \begin{bmatrix} -i \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -i \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \sin \theta \\ -\cos \theta \end{bmatrix} \\ &= -2 \sin \theta \cos \theta \\ &= -\sin 2\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Isso nos diz que dado o autoestado $|\Psi\rangle$, se o ângulo θ for convenientemente escolhido, podemos fazer o elétron ficar em algum dos autoestados de H e, assim, ter energias E_- ou E_+ . Para todo $\theta = (4n+1)\pi/4$, com $n = 0, 1, \dots$, a energia dele será $E_- = -1$. Para todo $\theta = (4n+3)\pi/4$, com $n = 0, 1, \dots$, a energia dele será $E_+ = +1$. Em todos os demais ângulos, o elétron é encontrado em um estado que é sobreposição dos autoestados associados a E_- ou E_+ , com as probabilidades para cada estado dadas por $\cos^2 \theta$ e $\sin^2 \theta$.