Primeira prova- Acionamentos

Nome: ______________________________

Considere um motor com seu campo do estator e do rotor. O motor é trifásico de dois pólos. As fases A, B e C são defasadas no espaço de 120°. Abaixo, θ é a posição angular no entreferro onde se mede a intensidade de campo magnético, conforme a figura 1.

As intensidades de campo magnético devido a cada fase do estator são dadas por $B_{S,A}(\theta) = B_{S,1}(t)\cos(\theta)$, $B_{S,B}(\theta) = B_{S,2}(t)\cos(\theta - 2\pi/3)$, $B_{S,C}(\theta) = B_{S,3}(t)\cos(\theta - 4\pi/3)$.

1. Supondo $B_{S,1}(t) = B_S\cos(\omega t)$, $B_{S,2}(t) = B_S\cos(\omega t - 2\pi/3)$, $B_{S,3}(t) = B_S\cos(\omega t - 4\pi/3)$, mostre que

$$B_S(t,\theta) = \frac{3}{2}B_S\cos(\omega t - \theta).$$

Fazendo as mesmas contas, o campo do rotor $B_R B_R(t,\theta,\delta)$ é dado por

$$B_R(t,\theta,\delta) = \frac{3}{2}B_R\cos(\omega t - (\theta - \delta)).$$

2. Teremos a situação geométrica mostrada na figura 2. Determine B^2_{Total} (só o módulo). Verifique que ele vale

$$B^2_{Total} = \frac{9}{4}\left(B_S^2 + B_R^2 + 2B_S B_R\cos(\delta)\right)$$

3. Supondo que o raio médio do entreferro é R, que o entreferro tem espessura g e que a profundidade do motor é L, mostre que a energia magnética armazenada na máquina é dada por

$$W = \frac{\pi}{2}\frac{RgL}{\mu_0}B^2_{Total}.$$

4. Finalmente, determine a fórmula do torque da máquina em função de δ.

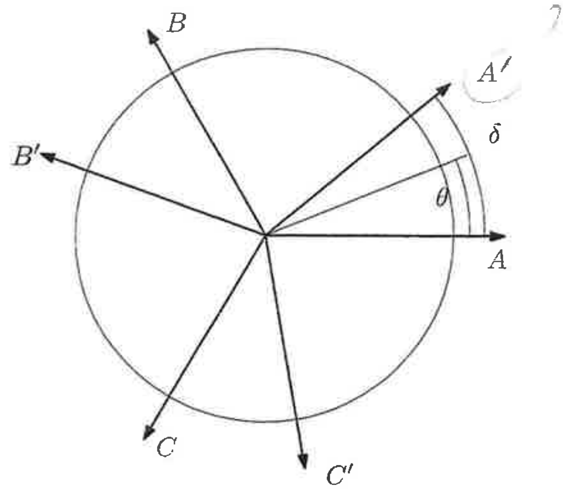


Figura 1: Fases e posição angular θ.

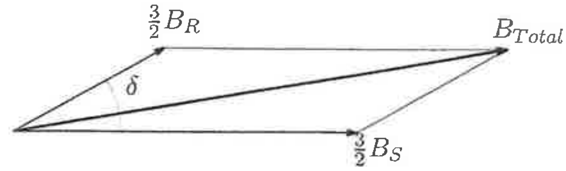


Figura 2: Fasores dos campos do rotor e estator.

Solução da Primeira Prova do ano passado

1) Dado que:

$$B_s(t,\theta) = B_{s,A}(\theta) + B_{s,B}(\theta) + B_{s,c}(\theta)$$

a) $$\left\{\begin{aligned} &= B_{s,1}(t)\cos\theta + \\ &+ B_{s,2}(t)\cos\left(\theta - \tfrac{2\pi}{3}\right) + \\ &+ B_{s,3}(t)\cos\left(\theta - \tfrac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}\right.$$

Também, supondo, a variação com o tempo.

b) $$\left\{\begin{aligned} B_{s,1}(t) &= B_s\cos(\omega t) \\ B_{s,2}(t) &= B_s\cos\left(\omega t - \tfrac{2\pi}{3}\right) \\ B_{s,3}(t) &= B_s\cos\left(\omega t - \tfrac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}\right.$$

Substituindo b em a, temos:

$$\begin{aligned} B_s(t,\theta) = &\; B_s\cos(\omega t)\cos\theta + \\ &+ B_s\cos\left(\omega t - \tfrac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\theta - \tfrac{2\pi}{3}\right) + \\ &+ B_s\cos\left(\omega t - \tfrac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\theta - \tfrac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Usando a relação trigonométrica

$$\boxed{\cos x\cos y = \tfrac{1}{2}\cos(x+y) + \tfrac{1}{2}\cos(x-y)}$$

$$\begin{aligned} B_s(t,\theta) = &\left(\frac{B_s}{2}\cos(\omega t - \theta) + \frac{B_s}{2}\cos(\omega t + \theta)\right) + \\ &+ \left(\frac{B_s}{2}\cos(\omega t - \theta) + \frac{B_s}{2}\cos\left((\omega t + \theta) - \tfrac{4\pi}{3}\right)\right) + \\ &+ \left(\frac{B_s}{2}\cos(\omega t - \theta) + \frac{B_s}{2}\cos\left((\omega t + \theta) - \tfrac{8\pi}{3}\right)\right) \end{aligned}$$

---

somando, $$B_s(t,\theta) = \frac{3B_s}{2}\cos(\omega t - \theta) + \text{"zero"}$$

usando $$\boxed{\cos(x-y) = \cos x\cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$$

$$\text{"zero"} = \frac{B_s}{2}\cos(\omega t+\theta) +$$
$$+ \frac{B_s}{2}\left[(\cos(\omega t+\theta))\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}(\omega t+\theta)\operatorname{sen}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right] +$$
$$+ \frac{B_s}{2}\left[\cos(\omega t+\theta)\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}(\omega t+\theta)\operatorname{sen}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

Somand 2π aos ângulos $-\frac{4\pi}{3}$ e $-\frac{8\pi}{3}$ não alterarará os valores. Também, $\boxed{\cos(-\theta) = \cos\theta \text{ e } \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta}$.

$$\therefore \text{"zero"} = \frac{B_s}{2}\cos(\omega t+\theta) +$$
$$+ \frac{B_s}{2}\left[(\cos(\omega t+\theta))\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + (\operatorname{sen}(\omega t+\theta))\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$+ \frac{B_s}{2}\left[\cos(\omega t+\theta)\cos\left(+\frac{2\pi}{3}\right) \mp (\operatorname{sen}(\omega t+\theta))\operatorname{sen}\left(+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{B_s}{2}\cos(\omega t+\theta) + \frac{\cancel{2}B_s}{\cancel{2}}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(\omega t+\theta) + 0$$

mas $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$,

$$\therefore \text{"zero"} = 0 + 0 \quad \text{(qed.)}$$

$$\therefore \boxed{B_s(t,\theta) = \frac{3}{2} B_s \cos(\omega t-\theta)}$$

2) Usando a lei de coseno,

$$B^2_{total} = \left(\frac{3}{2}\right)^2\left[B_s^2 + B_R^2 - 2B_sB_R\cos(180^\circ-\delta)\right]$$

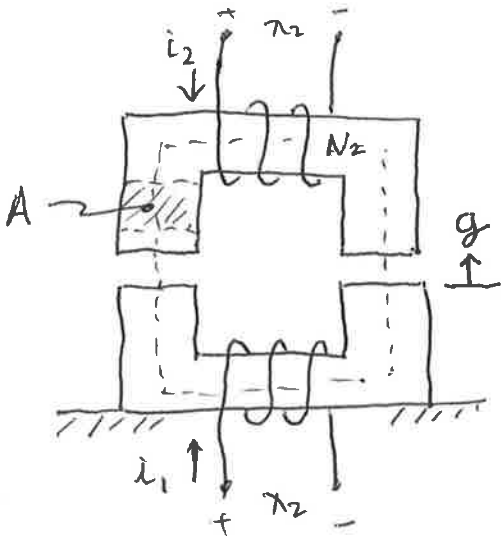
mas $\boxed{\cos(180-\delta) = -\cos(\delta)}$

$$\therefore B^2_{total} = \frac{9}{4}\left[B_s^2 + B_R^2 + 2B_sB_R\cos\delta\right]$$

3) A variação espacial (em θ) ao redor da máquina varia de acordo com $\cos^2(\theta)$. [ver explicação dada por Fitzgerald e Kingsley, 6ª ed. pg. 219]. Portanto o valor médio de $\cos^2\theta$ é $\frac{1}{2}$ e portanto, $(vol) = (2\pi R g L)$

$$W = \frac{(vol)\,B^2_{total}}{2\cdot 2\mu_0} = \frac{2\pi R g L}{4\mu_0}B^2_{total} = \boxed{\frac{\pi R g L}{2\mu_0}B^2_{total}}$$

4) $$T_{fld} = \frac{dW}{d\delta} = -\frac{\pi R g L}{2\mu_0}2B_sB_R\operatorname{sen}\delta = \boxed{-\frac{\pi R g L}{\mu_0}B_sB_R\operatorname{sen}\delta}$$



Dado o sistema da figura. Provar que a força, f_g, é negativa sempre. Ache esta força.

$$\mathcal{R}_{total} = \frac{2g}{\mu_0 A}$$

Pela lei de Ampere,

$$\mathcal{F}_m = N_1 i_1 + N_2 i_2$$

$$\phi = \frac{\mathcal{F}_m}{\mathcal{R}_{total}} = \frac{(N_1 i_1 + N_2 i_2)}{\mathcal{R}_{total}}$$

$$\phi = \frac{N_1 \mu_0 A}{2g} i_1 + \frac{N_2 \mu_0 A}{2g} i_2$$

$$\therefore \quad \lambda_1 = N_1 \phi = \frac{N_1^2 \mu_0 A}{2g} i_1 + \frac{N_1 N_2 \mu_0 A}{2g} i_2$$

$$\lambda_2 = N_2 \phi = \frac{N_1 N_2 \mu_0 A}{2g} i_1 + \frac{N_2^2 \mu_0 A}{2g} i_2$$

$$\lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2$$

$$\lambda_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2$$

$$\boxed{W' = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + L_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2}$$

$$W' = \frac{\mu_0 A}{4g} \left[N_1^2 i_1^2 + 2 N_1 N_2 i_1 i_2 + N_2^2 i_2 \right]$$

$$W' = \frac{\mu_0 A}{4g} (N_1 i_1 + N_2 i_2)^2$$

$$f_g = 2 \frac{\partial W'}{\partial g} \Bigg|_{i_1, i_2 \text{ const.}} = 2 \frac{\mu_0 A}{4} (N_1 i_1 + N_2 i_2)^2 \left(-\frac{1}{g^2}\right)$$

$$\boxed{f_g = -\frac{\mu_0 A}{2 g^2} (N_1 i_1 + N_2 i_2)^2}$$

Como $(N_1 i_1 + N_2 i_2)^2$ é sempre positivo f_g será sempre negativo (i.e. atrativo)