UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto - FEA-RP

Matemática Financeira

Profa. Dra.Luciana C.Siqueira Ambrozini

Juros Compostos

Matemática Financeira

Juros compostos

Considera que os juros formados em cada período são acrescidos ao capital, formando o montante do período.

Período 1 -> Montante 1 = Capital + Juros 1

Período 2 -> Montante 2 = Capital + Juros 1 *(juros acumulados)* + Juros 2 *(juros sobre juros 1)*

Matemática Financeira

Exemplo:

Aplicação de R$ 1.000 e taxa composta de 10% a.m.

Final mês 1 -> FV = R$ 1.000 x (1 + 0,10) = R$ 1.100

Final mês 2 -> FV = R$ 1.000 x (1 + 0,10) x (1 + 0,10)

FV = R$ 1.000 x $(1 + 0,10)^2$ = R$ 1.210

Matemática Financeira

Exemplo:

Final mês 3 -> FV = R$ 1.000 x (1 + 0,10) x (1 + 0,10) x (1 + 0,10)

FV = R$ 1.000 x $(1 + 0{,}10)^3$ = R$ 1.331

Final mês n -> FV = R$ 1.000 x (1 + 0,10) x (1 + 0,10) ... (1 + 0,10)

FV = R$ 1.000 x $(1 + 0{,}10)^n$

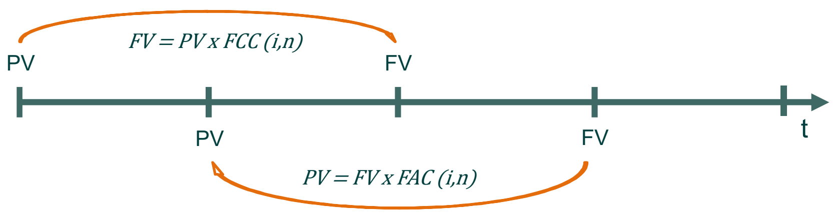
Matemática Financeira

Fórmula:

$$FV = PV\,(1+i)^{n} \qquad PV = \frac{FV}{(1+i)^{n}}$$

$(1 + i)^{n}$ = *fator de capitalização ou FV*

$1/(1 + i)^{n}$ = *fator de atualização ou PV*



Matemática Financeira

Cálculo dos juros:

Juros = FV - PV

$$FV = PV\,(1+i)^{n}$$

$$Juros = PV\,(1+i)^{n} - PV$$

$$Juros = PV\,[(1+i)^{n} - 1]$$

Matemática Financeira

Exemplo:

Se uma pessoa deseja obter R$ 27.500 dentro de um ano, quanto deverá ela depositar hoje numa alternativa de poupança que rende 1,7% a.m.?

$FV = R\$\ 27.500;\ n=1;\ i=1,7\%$

$PV = FV / (1+i)^{n}$

$PV = 27.500 / (1 + 0,017)^{12}$

$PV = 22.463,70$

22.463,70 -> data 0
27.500 -> data futura
São valores equivalentes à uma taxa composta de 1,7%

Matemática Financeira

Exemplo:

Determinar a taxa mensal composta de juros de uma aplicação de R$ 40.000 que produz um montante de R$ 43.894,63 ao final de um quadrimestre.

PV= R$ 40.000; FV = R$ 43.894, 63; n=4; i=?

$FV = PV\,(1+i)^n$

$FV/PV = (1+i)^4$

$43.894{,}63/40.000 = (1+i)^4$

$\sqrt[4]{1{,}097366} = \sqrt[4]{(1+i)^4}$

$1 + i = 1{,}0235 \quad = 0{,}0235 \quad = 2{,}35\%$

Raiz quarta na HP
1,097366 ENTER
4 [1/x]; y^x
= 1,0235

Matemática Financeira

Exemplo:

Determinar a taxa mensal composta de juros de uma aplicação de R$ 40.000 que produz um montante de R$ 43.894,63 ao final de um quadrimestre.

PV= R$ 40.000; FV = R$ 43.894, 63; n=4; i=?

Resolução na HP

40.000 CHS PV

43.894,63 FV

4 n

i = 2,35%

Raiz quarta na HP
1,097366 ENTER
4 [1/x]; y^x
= 1,0235

Matemática Financeira

Em juros compostos, o valor presente (capital) não se refere necessariamente a um valor expresso no momento zero.

O valor presente pode ser apurado em qualquer data focal anterior à data do valor futuro.

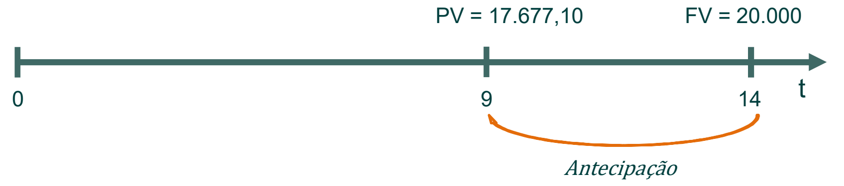
Exemplo:

Calcular quanto será pago por um empréstimo de R$ 20.000, vencível em 14 meses ao se antecipar 5 meses a data de pagamento. A taxa composta é de 2,5% a.m.

Matemática Financeira

Exemplo:

$$PV = 20.000/\ (1 + 0{,}025)^{5} \;= 20.000/\ (1{,}025)^{5} \;= R\$\ 17.677{,}10$$



Matemática Financeira

Taxas equivalentes

Em juros simples

$$\underbrace{1/3}_{Prazos} = \underbrace{3/9}_{Taxas}$$

Taxa de 3% ao mês e 9% ao trimestre

São equivalentes e proporcionais

Em juros compostos

$$i_q = \sqrt[q]{1+i} - 1$$

q = número de períodos de capitalização

Matemática Financeira

Exemplo

Qual a taxa equivalente composta mensal para uma taxa semestral de 1,66%?

$$i_6 = \sqrt[6]{1 + 0{,}103826} - 1$$

$$i = 0{,}0166 \text{ ou } 1{,}66\% \text{ a.m.}$$

Assim ,para um mesmo capital e prazo de aplicação é indiferente (equivalente) o rendimento de 1,66% a.m. ou 10,3826 a.s.

Matemática Financeira

Taxas equivalentes

Suponha um capital de $ 100.000 aplicado por 2 anos.

i = 1,66% a.m.

$FV = 100.000\ (1,0166)^{24} = 148.457,63$

$FV = 100.000\ (1,103826)^{4} = 148.457,63$

Matemática Financeira

Exemplo

Um certo banco divulga a rentabilidade para uma aplicação financeira de 12% a.s. ou 2% a.m.

Assim, uma aplicação de R$ 10.000, ao final de 6 meses, gera um montante de R$ 11.200 (10.000 x 1,12).

12% = Taxa de rentabilidade da operação para um período →

A base da taxa para uma periodicidade diferente, por exemplo, mensal, deve ser expressa em termos de taxa equivalente composta

$i_6 = \sqrt[6]{1,12} - 1 = 1,91\%$ a.m.

Matemática Financeira

Taxa nominal e efetiva

A taxa efetiva de juros é a taxa dos juros apurada durante todo o prazo n, sendo formada através dos períodos de capitalização.

$$\text{Taxa efetiva } (i_f) = (1 + i)^q - 1$$

q = número de períodos de capitalização

A taxa nominal admite que o prazo de capitalização dos juros não é o mesmo daquele definido para a taxa de juros.

Por exemplo: taxa nominal de 36% a.a. capitalizada mensalmente

36% a.a. representa uma taxa nominal expressa para o período inteiro.

Matemática Financeira

Taxa nominal e efetiva

Quando se trata de taxa nominal, é comum admitir-se que a capitalização ocorre por juros simples.

Ao se capitalizar esta taxa nominal, apura-se a taxa efetiva superior àquela declarada na transação.

Exemplo: taxa nominal de 36% a.a.

Taxa proporcional simples definida para o período de capitalização = 3% a.m.

Taxa efetiva de juros: $i_f = [1 + (0{,}36/12)]^{12} - 1 = 42{,}6\%$ a.a.

Para juros capitalizados mensalmente

Matemática Financeira

Conversão de taxa efetiva em nominal

Para efeitos de comparação de custos de para operações financeiras, faz-se necessário que as taxa sejam referenciadas segundo o mesmo critério de apuração de juros.

Exemplo: O banco A oferece crédito pessoal ao custo de 4,2% a.m. O banco B diz que cobra uma taxa nominal somente de 4,12%.

Os juros da operação são calculados diariamente.

Com qual banco a operação é mais vantajosa?

Matemática Financeira

Conversão de taxa efetiva em nominal

Banco A

- Taxa efetiva: 4,2% a.m.
- Conversão em taxa nominal: $\sqrt[30]{1+0,042} - 1$ = 0,137234% a.d. x 30 = 4,12% a.m.

Banco B

- Conversão em taxa efetiva: 4,12/30 = 0,137333% a.d. $(1 + 0,137333)^{30} - 1$ = 4,2% a.m.
- Taxa nominal: 4,12% a.m.

Matemática Financeira

Conversão de taxa efetiva em nominal

Exemplo: Transformar a taxa efetiva de 48% a.a. em taxa nominal com capitalização mensal.

$$\sqrt[12]{1 + 0{,}48} - 1 = 3{,}3210\%\ \text{a.m.} \times 12 = 39{,}852\%\ \text{a.a.}$$

Matemática Financeira

Taxa efetiva e número de períodos de capitalização

O que acontece com a taxa efetiva à medida que o número de período de capitalização de uma taxa de juros nominal aumenta?

+ frequência de capitalização de uma mesma taxa nominal -> + rendimento acumulado

Exemplo: taxa nominal de 18% a.a.

Período de capitalização	Nº de períodos	Tx Efetiva anual
Anual	1	18%
Semestral	2	18,81%
Quadrimestral	3	19,10%
Trimestral	4	19,25%
Mensal	12	19,56%
Diário	360	19,72%

Matemática Financeira

Convenção linear e exponencial para períodos não inteiros

Capitalização descontínua: os juros são formados somente ao final de cada período de capitalização. Os rendimentos passam a ocorrer descontinuamente, somente um único momento do prazo da taxa (final do mês) e não distribuidamente pelo mês.

↓

Nestes casos, não poderia haver a incorrência de juros no intervalo de tempo fracionário, somente ao final do período completo.

Como proceder quando a formação de juros e a incorporação ao principal se dá em intervalos de tempo inferiores a um período inteiro?

Matemática Financeira

Convenção linear

Admite a formação de juros compostos para a parte inteira do prazo e de juros simples para a parte fracionária.

$$FV = PV\ (1 + i\ )^{n} \times [1 + i \times (m/k)]$$

Onde: m/k corresponde à parte fracionária do prazo

O uso deste critério na prática é bastante reduzido.

Matemática Financeira

Convenção linear

Exemplo: considere o capital de R$ 100.000 emprestados à taxa de 18% ao ano pelo prazo de 4 anos e 9 meses. Calcular o montante deste empréstimo pela convenção linear.

$$FV = PV\,(1 + i)^{n} \times [1 + i \times (m/k)]$$

Na HP:
tirar o "c" STO EEX
100.000 CHS PV
4,75 n
18 i
FV 220.051,30

$FV = 100.000 \times (1 + 0,18)^{4} \times [1 + 0,18 \times (9/12)]$

$FV = 100.000 \times 1,938778 \times 1,135 =$

$FV = R\$\ 220.051,30$

Matemática Financeira

Convenção exponencial

Adota o mesmo regime de capitalização para todo o período, ou seja, utiliza capitalização composta para a parte inteira e fracionada.

$$FV = PV\,(1 + i)^{n + m/k}$$

$FV = 100.000 \times (1 + 0,18)^{4 + 9/12}$

$FV = 100.000 \times (1,18)^{4 + 0,75}$

$FV = R\$\ 219.502,50$

Na HP:
deixa o "c" STO EEX
100.000 CHS PV
4,75 n
18 i
FV 220..502,53

Matemática Financeira

Capitalização contínua

Usualmente, as operações financeiras são capitalizadas de forma finita e discreta, podendo chegar a uma capitalização de frequência diária.

Por outro lado, pela capitalização contínua pode-se prever uma capitalização infinitamente frequente.

$$FV = PV \times e^{I \cdot n}$$

e = número constante, base dos logarítimos neperianos (e=2,7182818284...)

I = taxa de juro periódica, taxa instantânea

Matemática Financeira

Capitalização contínua

Exemplo: admita uma aplicação de R$ 1.000 por dois anos, à taxa de 10% com capitalização contínua. Qual o montante apurado ao final desse período com capitalização contínua e nas condições de capitalização discreta de juros compostos?

$FV = PV \times e^{I \cdot n}$	$FV = PV \times (1 + i)^{n}$
$FV = R\$\ 1.000 \times 2{,}7182^{0{,}10 \times 2}$	$FV = R\$\ 1.000 \times (0{,}10)^{2}$
FV = R$ 1.221,40	FV = R$ 1.210,00