Matemática Aplicada à Administração – LISTA 05

1. Calcule a derivada das funções abaixo:

1) $f(x) = 6x^{5/3}$	$f'(x) = 10x^{2/3}$
2) $f(x) = 8x^{3/2}$	$f'(x) = 12x^{1/2}$
3) $f(x) = 15 - x + 4x^2 - 5x^4$	$f'(x) = -20x^3 + 8x - 1$
4) $f(x) = 3x^2 + \sqrt[3]{x^2}$	$f'(x) = 6x + \dfrac{2\sqrt[3]{x^2}}{3x}$
5) $f(x) = x^4 - \sqrt[4]{x^3}$	$f'(x) = 4x^3 - \dfrac{3\sqrt[4]{x^3}}{4x}$
6) $f(x) = \dfrac{4x-5}{3x+2}$	$f'(x) = \dfrac{23}{(3x+2)^2}$
7) $f(x) = \dfrac{8 - x + 3x^2}{2 - 9x}$	$f'(x) = \dfrac{-27x^2 + 12x + 70}{(2-9x)^2}$
8) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$	$f'(x) = \dfrac{6x^2}{(x^3+1)^2}$

9) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{3x-5}$ $\quad$ $f'(x)=\dfrac{-(3x+10)}{3\sqrt[3]{x}(3x-5)^2}$ ou $f'(x)=\dfrac{-(3x+10)\sqrt[3]{x^2}}{3x(3x-5)^2}$

10) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2x^2-4x+8}$ $\quad$ $f'(x)=\dfrac{-3x^2+2x+4}{\sqrt{x}(2x^2-4x+8)^2}$

11) $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$ $\quad$ $f'(x)=\dfrac{-(1+2x+3x^2)}{(1+x+x^2+x^3)^2}$

12) $f(x)=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$ $\quad$ $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}$

13) $f(x)=\dfrac{7}{x^2+5}$ $\quad$ $f'(x)=\dfrac{-(14x)}{(x^2+5)^2}$

14) $f(x)=\dfrac{6}{x^2+x-1}$ $\quad$ $f'(x)=\dfrac{-6(2x+1)}{(x^2+x-1)^2}$

15) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3}$

16) $f(x) = (3x)^{-4}$ $\quad$ $f'(x) = -\dfrac{4x^{-5}}{81}$

17) $f(x) = (5x-4)^2$ $\quad$ $f'(x) = 10(5x-4)$

18) $f(x) = (5x-4)^{-2}$ $\quad$ $f'(x) = \dfrac{-10}{(5x-4)^3}$

19) $f(x) = \dfrac{\dfrac{3}{5x} - 1}{\dfrac{2}{x^2} + 7}$ $\quad$ $f'(x) = \dfrac{-21x^2 - 20x + 6}{5(2+7x^2)^2}$

20) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 7x^2 + 4x + 3}{x^2}$ $\quad$ $f'(x) = 2 - \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}$

21) $f(x)=e^x(6x^2-ax+b), a$ e b constantes $\quad f'(x)=e^x(6x^2-ax+12x+b-a)$

22) $f(x)=3\ln x+5 \quad f'(x)=\dfrac{3}{x}$

23) $f(x)=10\ln x-3x+6 \quad f'(x)=\dfrac{10}{x}-3$

24) $f(x)=x^2.\ln x \quad f'(x)=x(2.\ln x+1)$

25) $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x^{3/2}}$

26) $f(x)=3\sqrt{x}+5\sqrt[3]{x}+10 \quad f'(x)=\dfrac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

27) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{3x-2}} \quad f'(x)=-\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{x+1}{3x-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{1}{(3x-2)^2}$

28) $f(x)=\left(\dfrac{8x^2-4}{1-9x^3}\right)^4 \quad f'(x)=\dfrac{1024x(2x^2-1)^3(18x^3-27x+4)}{(1-9x^3)^5}$

29) $f(x)=e^{x^2-2x+1} \quad f'(x)=(2x-2)e^{x^2-2x+1}$

30) $f(x)=\ln(3x^2-2x)$ $\qquad f'(x)=\dfrac{6x-2}{3x^2-2x}$

31) $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-3x-2)^5}$ $\qquad f'(x)=\dfrac{-5(2x-3)}{(x^2-3x-2)^6}$

32) $f(x)=\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1\right)^3$ $\qquad f'(x)=3\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1\right)^3\left(-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

33) $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}^2+5\mathrm{x}+2}$ $\qquad \mathrm{f}'(\mathrm{x})=(-4\mathbf{x}+5)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}^2+5\mathrm{x}+2}$

34) $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+1}$ $\qquad \mathrm{f}'(\mathrm{x})=\dfrac{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+1)^2}$

35) $\mathrm{f}(\mathrm{x})=5^{\mathrm{x}^2}$ $\qquad \mathrm{f}'(\mathrm{x})=2\,\mathrm{x}\,5^{\mathrm{x}^2}\,\ln 5$

36) $\mathrm{y}=\ln(\mathrm{ax}+\mathrm{b})$, a, b constantes $\qquad \mathrm{y}'=\dfrac{\mathrm{a}}{\ln(\mathrm{ax}+\mathrm{b})}$

37) $y = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ $\qquad y' = \frac{4x}{1-x^4}$

38) $y = x \ln x$ $\qquad y' = \ln x + 1$

39) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$ $\qquad f' = \frac{1}{1+e^x}$

40) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

41) $f(x) = \cos\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$ $\qquad f'(x) = -\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)\operatorname{sen}\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$

42) $f(x) = \ln(\cos x)$ $\qquad f'(x) = -\operatorname{tg} x$

2. A arrecadação mundial total pela exibição de um filme de grande sucesso é aproximada pela função $y = 120x^2/(x^2+4)$, onde y é medido em milhões de dólares e x é o número de meses do filme em cartaz. (a) Qual a arrecadação de bilheteria

a pós o primeiro mês de lançamento? E após o segundo mês? E após o terceiro mês? (b) Qual a arrecadação do filme à longo prazo? R: (a) 24 (b) 60 (c) 83,0769 (d) 120

3. Determine o valor de a que torna contínua as funções abaixo em x=0.

(a) $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \geq 0 \\ x + a & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} 2(x - a) & \text{para } x \geq 0 \\ x^2 + 1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

R: (a) 1 (b) ½

4. Seja $y = x^2+4x-2$ e $y = -5x+2$. (a) Calcule o valor de x em que a inclinação da reta tangente é a mesma nas duas funções. (b) Calcule o valor das funções neste ponto. R: (a) -9/2 (b) 145/4, 49/2

5. Determine a derivada das funções: (a) $y = (1+3x^2).(2+x^3)^2$

(b) $y = (1+3x^2)/(2+x^3)^2$

R: (a) $6x\left(4+2x+10x^3+x^4+4x^6\right)$ (b) $-\frac{6x\left(-2+x+2x^3\right)}{\left(2+x^3\right)^3}$

6. Um foco de incêndio foi comunicado por um guarda florestal em uma reserva de mata nativa. Esse guarda estimou que o incêndio ocupa nesse momento uma área circular de 200 m de diâmetro e expande-se em todas as direções a uma taxa de 50 m por hora, ou seja, o raio do círculo aumenta 50 m por hora.

(a) Exprimir a área ocupada pelo incêndio em função do tempo decorrido a partir do momento da descoberta do incêndio pelo guarda. (b) Determine a velocidade (taxa de variação da área em relação ao tempo) com que a área é ocupada pelo incêndio. R: (a) $A(t)= \pi(200+50t)^2$ (b) $A'(t)= 100\pi(200+50t)$

7. Expressar a área de um círculo em função de seu raio r. Determine a taxa de variação da área com relação ao raio.

8. Uma caixa de formato cúbico de lado x deve ser totalmente coberta por um papel. Calcule a taxa de variação da área do papel em relação ao comprimento do lado da caixa. R: $18x^2$

9. A velocidade V de um corpo é a derivada da posição do corpo em relação ao tempo. A posição, em metros, de um carro t segundos após sua partida é dada por $S = -t^3+8t^2+20$, $0 \leq t \leq 6s$. (a) Determine a velocidade do carro em função do tempo. (b) Determine a velocidade nos instantes t=1s e t=5s. R: (a) $v = -3t^2+16t$ (b) 13m/s, 5m/s

10. O número de telespectadores de um seriado de tv lançados há alguns anos é dado aproximadamente pela função $N(x)=(60+2x)^{2/3}$, $1 \leq x \leq 26$, com N em milhões denotando o número de espectadores do seriado na x-ésima semana. (a) Quantos espectadores assistiram ao seriado na segunda semana? (2) Determine a taxa de crescimento da audiência semanal na segunda semana. R: (a) 16 (b) 1/3

11. Um supermercado determina que seu volume diário de negócios *V* (em milhares de dólares) e o número de horas *t* que a loja permanece aberta em cada dia estão, de forma aproximada, relacionados pela fórmula

$$V = 20\left(1 - \frac{100}{100 + t^2}\right), \qquad 0 \le t \le 24.$$

(a) Qual o volume as 10:00 h? (b) qual a taxa de variação do volume? (c) qual a taxa de variação do volume diário as 10:00 h? R: (a) 10 (b) $\frac{4000\,x}{(100 + x^2)^2}$ (c) 1

Em Economia o adjetivo “marginal” é sinônimo de “derivada de...”. Por exemplo, se temos uma função custo C(x), onde x é o número de unidades produzidas, o custo marginal é a taxa de variação do custo por unidade produzida, ou seja, o custo marginal é a derivada de C(x) em relação a x. Assim, C’(x) é o custo marginal. O custo médio $\overline{C}(x)$ é o custo dividido pelo número de unidades, ou seja,

$\overline{C}(x) = C(x)/x$. E podemos definir o custo médio marginal como $\overline{C}'(x)$, que mede a taxa de variação da função custo médio.

A função receita R(x) = p.x, onde p é o preço unitário de certo bem e x é o número de unidades vendidas. Geralmente o preço p é relacionado à quantidade vendida x, isto é, o preço é uma função da quantidade vendida, ou seja, p=f(x) (equação de demanda). A taxa de variação da receita, R', é chamada função receita marginal. A função lucro L(x) = R(x) – C(x). A taxa de variação do lucro L' (x) é chamada de função lucro marginal.

12. A companhia Custom Office fabrica uma linha de mesas executivas. Estima-se que o custo total para fabricar x unidades é dado por C(x)= 100.x+200.000 dólares por ano. (a) determine a função custo médio. (b) Determine a função custo médio marginal. (c) O que acontece com o custo médio quando x cresce muito? (d) determine a função custo marginal.

R: (a) $\bar{C}(x) = 100 + \dfrac{200\,000}{x}$ (b) $\bar{C}'(x) = -\dfrac{200\,000}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \bar{C}(x) = 100$ (d) C´(x) =100

13. A quantidade demandada mensal de relógios de pulso pontual está relacionada com o preço unitário pela equação $p=5000/(x^2+100)$, $0 \le x \le 20$. (a) Determine a função receita marginal. (b) Calcule R'(2).

(a) $R'(x) = -5000(x^2 - 100)/(x^2+100)^2$ (b) 44,3787