

Matemática Aplicada à Administração – LISTA 05

1. Calcule a derivada das funções abaixo:

$$1) f(x) = 6x^{5/3}$$

$$2) f(x) = 8x^{3/2}$$

$$3) f(x) = 15 - x + 4x^2 - 5x^4$$

$$4) f(x) = 3x^2 + \sqrt[3]{x^2}$$

$$5) f(x) = x^4 - \sqrt[4]{x^3}$$

$$6) f(x) = \frac{4x-5}{3x+2}$$

$$7) f(x) = \frac{8-x+3x^2}{2-9x}$$

$$8) f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1}$$

$$9) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x-5}$$

$$10) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2-4x+8}$$

$$11) f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$$

$$12) f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

$$13) f(x) = \frac{7}{x^2+5}$$

$$14) f(x) = \frac{6}{x^2+x-1}$$

$$f'(x) = 10x^{2/3}$$

$$f'(x) = 12x^{1/2}$$

$$f'(x) = -20x^3 + 8x - 1$$

$$f'(x) = 6x + \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3x}$$

$$f'(x) = 4x^3 - \frac{3\sqrt[4]{x^3}}{4x}$$

$$f'(x) = \frac{23}{(3x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-27x^2 + 12x + 70}{(2-9x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(3x+10)}{3\sqrt[3]{x}(3x-5)^2} \text{ ou } f'(x) = \frac{-(3x+10)\sqrt[3]{x^2}}{3x(3x-5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2 + 2x + 4}{\sqrt{x}(2x^2 - 4x + 8)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(1+2x+3x^2)}{(1+x+x^2+x^3)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-(14x)}{(x^2+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6(2x+1)}{(x^2+x-1)^2}$$

$$15) f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$$

$$16) f(x) = (3x)^{-4}$$

$$f'(x) = -\frac{4x^{-5}}{81}$$

$$17) f(x) = (5x - 4)^2$$

$$f'(x) = 10(5x - 4)$$

$$18) f(x) = (5x - 4)^{-2}$$

$$f'(x) = \frac{-10}{(5x - 4)^3}$$

$$19) f(x) = \frac{\frac{3}{5x} - 1}{\frac{2}{x^2} + 7}$$

$$f'(x) = \frac{-21x^2 - 20x + 6}{5(2 + 7x^2)^2}$$

$$20) f(x) = \frac{2x^3 - 7x^2 + 4x + 3}{x^2}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{4}{x^2} - \frac{6}{x^3}$$

$$21) f(x) = e^x(6x^2 - ax + b), a \text{ e } b \text{ constantes}$$

$$f'(x) = e^x(6x^2 - ax + 12x + b - a)$$

$$22) f(x) = 3 \ln x + 5$$

$$f'(x) = \frac{3}{x}$$

$$23) f(x) = 10 \ln x - 3x + 6$$

$$f'(x) = \frac{10}{x} - 3$$

$$24) f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

$$f'(x) = x(2 \cdot \ln x + 1)$$

$$25) f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{3/2}}$$

$$26) f(x) = 3\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x} + 10$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$27) f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{3x-2}}$$

$$f'(x) = -\frac{5}{2} \left(\frac{x+1}{3x-2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{(3x-2)^2}$$

$$28) f(x) = \left(\frac{8x^2 - 4}{1 - 9x^3} \right)^4$$

$$f'(x) = \frac{1024x(2x^2 - 1)^3(18x^3 - 27x + 4)}{(1 - 9x^3)^5}$$

$$29) f(x) = e^{x^2 - 2x + 1}$$

$$f'(x) = (2x - 2)e^{x^2 - 2x + 1}$$

$$30) f(x) = \ln(3x^2 - 2x)$$

$$f'(x) = \frac{6x - 2}{3x^2 - 2x}$$

$$31) f(x) = \frac{1}{(x^2 - 3x - 2)^5}$$

$$f'(x) = \frac{-5(2x - 3)}{(x^2 - 3x - 2)^6}$$

$$32) f(x) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 \right)^3$$

$$f'(x) = 3 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 \right)^2 \left(-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$33) f(x) = e^{-2x^2 + 5x + 2}$$

$$f'(x) = (-4x + 5)e^{-2x^2 + 5x + 2}$$

$$34) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \qquad f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$35) f(x) = 5^{x^2} \qquad f'(x) = 2x 5^{x^2} \ln 5$$

$$36) y = \ln(ax + b), a, b \text{ constantes} \qquad y' = \frac{a}{\ln(ax + b)}$$

$$37) y = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) \qquad y' = \frac{4x}{1-x^4}$$

$$38) y = x \ln x \qquad y' = \ln x + 1$$

$$39) f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) \qquad f' = \frac{1}{1+e^x}$$

$$40) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}) \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$41) f(x) = \cos(x + \sqrt{x^2 + 2}) \qquad f'(x) = -\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}\right) \sin(x + \sqrt{x^2 + 2})$$

$$42) f(x) = \ln(\cos x) \qquad f'(x) = -\operatorname{tg} x$$

2. A arrecadação mundial total pela exibição de um filme de grande sucesso é aproximada pela função $y = 120x^2 / (x^2 + 4)$, onde y é medido em milhões de dólares e x é o número de meses do filme em cartaz. (a) Qual a arrecadação de bilheteria a pós o primeiro mês de lançamento? E após o segundo mês? E após o terceiro mês? (b) Qual a arrecadação do filme à longo prazo? R: (a) 24 (b) 60 (c) 83,0769 (d) 120

3. Determine o valor de a que torna contínua as funções abaixo em $x=0$.

$$(a) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \geq 0 \\ x + a & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 2(x - a) & \text{para } x \geq 0 \\ x^2 + 1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

R: (a) 1 (b) $\frac{1}{2}$

4. Seja $y = x^2 + 4x - 2$ e $y = -5x + 2$. (a) Calcule o valor de x em que a inclinação da reta tangente é a mesma nas duas funções. (b) Calcule o valor das funções neste ponto. R: (a) $-9/2$ (b) $145/4, 49/2$

5. Determine a derivada das funções: (a) $y = (1+3x^2) \cdot (2+x^3)^2$ (b) $y = (1+3x^2)/(2+x^3)^2$

R: (a) $6x(4 + 2x + 10x^3 + x^4 + 4x^6)$ (b) $-\frac{6x(-2 + x + 2x^3)}{(2+x^3)^3}$

6. Um foco de incêndio foi comunicado por um guarda florestal em uma reserva de mata nativa. Esse guarda estimou que o incêndio ocupa nesse momento uma área circular de 200 m de diâmetro e expande-se em todas as direções a uma taxa de 50 m por hora, ou seja, o raio do círculo aumenta 50 m por hora. (a) Expressar a área ocupada pelo incêndio em função do tempo decorrido a partir do momento da descoberta do incêndio pelo guarda. (b) Determine a velocidade (taxa de variação da área em relação ao tempo) com que a área é ocupada pelo incêndio. R: (a) $A(t) = \pi(200+50t)^2$ (b) $A'(t) = 100\pi(200+50t)$
7. Expressar a área de um círculo em função de seu raio r . Determine a taxa de variação da área com relação ao raio.
8. Uma caixa de formato cúbico de lado x deve ser totalmente coberta por um papel. Calcule a taxa de variação da área do papel em relação ao comprimento do lado da caixa. R: $18x^2$
9. A velocidade V de um corpo é a derivada da posição do corpo em relação ao tempo. A posição, em metros, de um carro t segundos após sua partida é dada por $S = -t^3 + 8t^2 + 20$, $0 \leq t \leq 6$ s. (a) Determine a velocidade do carro em função do tempo. (b) Determine a velocidade nos instantes $t=1$ s e $t=5$ s. R: (a) $v = -3t^2 + 16t$ (b) 13m/s, 5m/s
10. O número de telespectadores de um seriado de tv lançados há alguns anos é dado aproximadamente pela função $N(x) = (60 + 2x)^{2/3}$, $1 \leq x \leq 26$, com N em milhões denotando o número de espectadores do seriado na x -ésima semana. (a) Quantos espectadores assistiram ao seriado na segunda semana? (2) Determine a taxa de crescimento da audiência semanal na segunda semana. R: (a) 16 (b) $1/3$
11. Um supermercado determina que seu volume diário de negócios V (em milhares de dólares) e o número de horas t que a loja permanece aberta em cada dia estão, de forma aproximada, relacionados pela fórmula

$$V = 20 \left(1 - \frac{100}{100 + t^2} \right), \quad 0 \leq t \leq 24.$$

- (a) Qual o volume as 10:00 h? (b) qual a taxa de variação do volume? (c) qual a taxa de variação do volume diário as 10:00 h? R: (a) 10 (b) $\frac{4000x}{(100+x^2)^2}$ (c) 1

Em Economia o adjetivo “marginal” é sinônimo de “derivada de...”. Por exemplo, se temos uma função custo $C(x)$, onde x é o número de unidades produzidas, o custo marginal é a taxa de variação do custo por unidade produzida, ou seja, o custo marginal é a derivada de $C(x)$ em relação a x . Assim, $C'(x)$ é o custo marginal. O custo médio $\bar{C}(x)$ é o custo dividido pelo número de unidades, ou seja, $\bar{C}(x) = C(x)/x$. E podemos definir o custo médio marginal como $\bar{C}'(x)$, que mede a taxa de variação da função custo médio.

A função receita $R(x) = p \cdot x$, onde p é o preço unitário de certo bem e x é o número de unidades vendidas. Geralmente o preço p é relacionado à quantidade vendida x , isto é, o preço é uma função da quantidade vendida, ou seja, $p=f(x)$ (equação de demanda). A taxa de variação da receita, R' , é chamada função receita marginal. A função lucro $L(x) = R(x) - C(x)$. A taxa de variação do lucro $L'(x)$ é chamada de função lucro marginal.

12. A companhia Custom Office fabrica uma linha de mesas executivas. Estima-se que o custo total para fabricar x unidades é dado por $C(x) = 100x + 200.000$ dólares por ano. (a) determine a função custo médio. (b) Determine a função custo médio marginal. (c) O que acontece com o custo médio quando x cresce muito? (d) determine a função custo marginal.

R: (a) $\bar{C}(x) = 100 + \frac{200\,000}{x}$ (b) $\bar{C}'(x) = -\frac{200\,000}{x^2}$ (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{C}(x) = 100$ (d) $C'(x) = 100$

13. A quantidade demandada mensal de relógios de pulso pontual está relacionada com o preço unitário pela equação $p = 5000/(x^2 + 100)$, $0 \leq x \leq 20$. (a) Determine a função receita marginal. (b) Calcule $R'(2)$.

(a) $R'(x) = -5000(x^2 - 100)/(x^2 + 100)^2$ (b) 44,3787