7 – Equações de Transporte Simplificadas

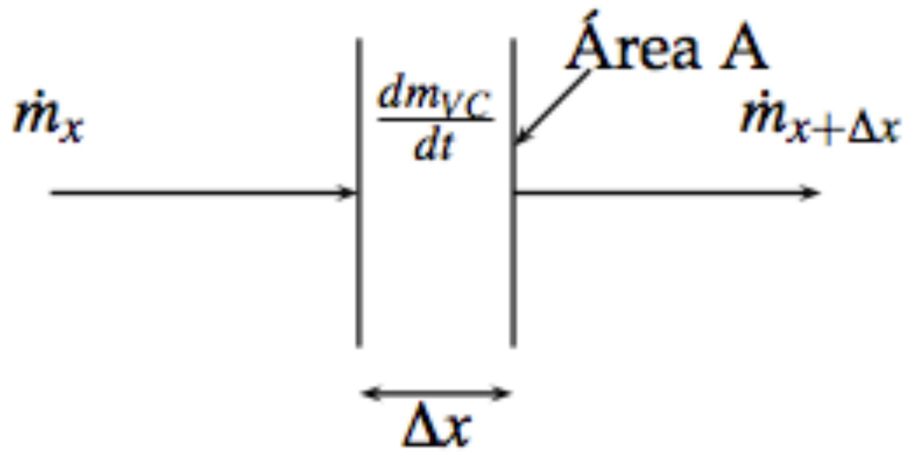
8a Aula

7.1 Introdução

- Modelagem físico-matématica de processos de combustão
- Discussão de simplificações

7.1 Conservação da massa

- Volume de Controle 1D



7.1 Conservação da massa

- Volume de Controle 1D

$$\frac{dm_{VC}}{dt} = \dot{m}_x - \dot{m}_{x+\Delta x}$$

$$\begin{cases} m_{VC} & = & \rho V_{VC} \\ V_{VC} & = & A\Delta x \\ \dot{m} & = & \rho V_x A \end{cases}$$

$$\frac{d(\rho A \Delta_x)}{dt} = [\rho V_x A]_x - [\rho V_x A]_{x+\Delta x}$$

$\div\, A\Delta x$ e $\lim_{\Delta x \to 0}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}$$

7.1 Conservação da massa

- Volume de Controle 1D

Regime permanente:

$$\frac{d(\rho V_x)}{dx} = 0$$

ou

$$\rho V_x = cte$$

generalizando:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \vec{V}) = 0$$

7.1 Conservação das espécies

Hipóteses:

- Só difusão ordinária
- Mistura binária
- Regime permanente

7.1 Conservação das espécies

$$\frac{d}{dx}(\dot{m}''Y_A) \quad - \quad \frac{d}{dx}\left(\rho D_{AB}\frac{dY_A}{dx}\right) \quad = \quad \dot{m}_A'''$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

Fluxo mássico de A devido à advecção por unidade de volume $(kg/s-m^3)$

Fluxo mássico de A devido à difusão molecular por unidade de volume$(kg/s-m^3)$

Taxa de produção líquida de A devido às reações químicas por unidade de volume $(kg/s-m^3)$

Ou na forma geral para a especie "i"

$$\frac{d\dot{m}_i''}{dx} = \dot{m}_i'''$$

7.1 Conservação das espécies

Generalizando:

$$\frac{\partial(\rho Y_i)}{dt} + \nabla \cdot \dot{m}_i'' = \dot{m}_i'''$$

Fluxo liquido de "i"
por difusão e por convecção
por unidade de volume

$$\dot{m}_i'' \equiv \rho Y_i v_i$$

velocidade da espécie:
Difusão ordinária,

$$\dot{m}'' = \sum_i \dot{m}_i'' = \sum_i \rho Y_i v_i$$

mas $\dot{m}'' \equiv \rho V$ onde $V \rightarrow$ Velocidade da mistura
então:

$$V = \sum Y_i v_i$$

7.1 Conservação das espécies

Velocidade de difusão:

$$\underbrace{v_{diff}}_{} = \underset{\text{Espécie}}{\underset{\downarrow}{v_i}} - \underset{\text{Mistura}}{\underset{\downarrow}{V}}$$

então:

$$\dot{m}''_{i,diff} \equiv \rho Y_i (v_i - V)$$

e como

$$\dot{m}''_i = \underset{\text{Bulk}}{\underset{\downarrow}{\dot{m}'' Y_i}} + \underset{\text{Difusão}}{\underset{\downarrow}{\dot{m}''_{i,diff}}}$$

então:

$$\rho Y_i v_i = \rho V Y_i + \rho Y_i (v_i - V)$$

Para difusão ordinária com a Lei de Fick, o fluxo da espécie "A" é

$$\dot{m}''_A = \dot{m}'' Y_A - \rho D_{AB} \nabla Y_A$$

7.1 Conservação das espécies

- Expressar a conservação das espécies para:
  - sistema de coordenadas esférico;
  - sistema de coordenadas cilíndricas com simetria axial.

7.1 Difusão Multicomponente

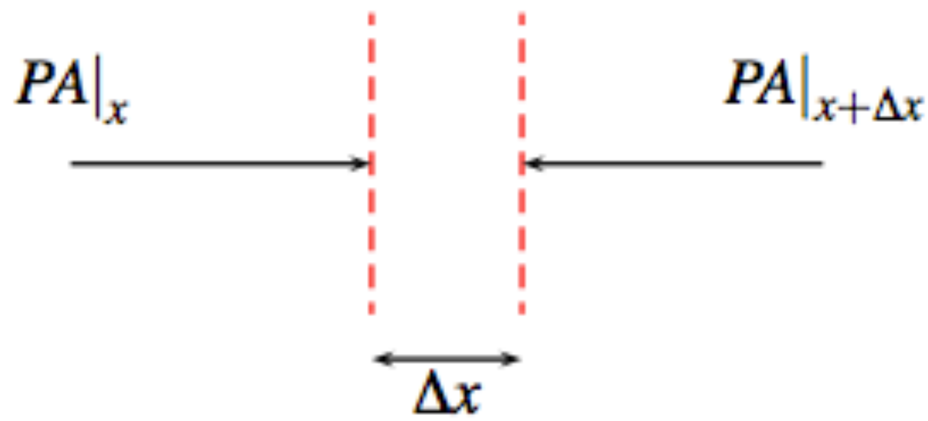
- Misturas binárias podem não ser representativas em chamas laminares;
- Formulação mais completa envolve Soret, Duffort e Gradiente de Pressão

7.1 Conservação de momento linear

- Regime permanente

$$\sum \vec{F} = \dot{m}\vec{V}_{out} - \dot{m}\vec{V}_{in}$$

sistema 1D, negligenciando forças viscosas e gravit.



7.1 Conservação de momento linear

$$PA|_x - PA|_{x+\Delta x} = \dot{m}v_{x+\Delta x} - \dot{m}v_x$$

$\div\, A\Delta x \lim_{\Delta x \to 0}$:

$$-\frac{dP}{dx} = \dot{m}''\frac{dv_x}{dx}$$

mas $\dot{m}'' = \rho v_x$ então:

$$-\frac{dP}{dx} = \rho v_x \frac{dv_x}{dx}$$

Eq. de Euler 1D

7.1 Conservação de momento linear

Para variação de energia cinética desprezível:

$$\frac{d(v_x^2/2)}{dx} \approx 0 \Longrightarrow v_x \frac{dv_x}{dx} \approx 0$$

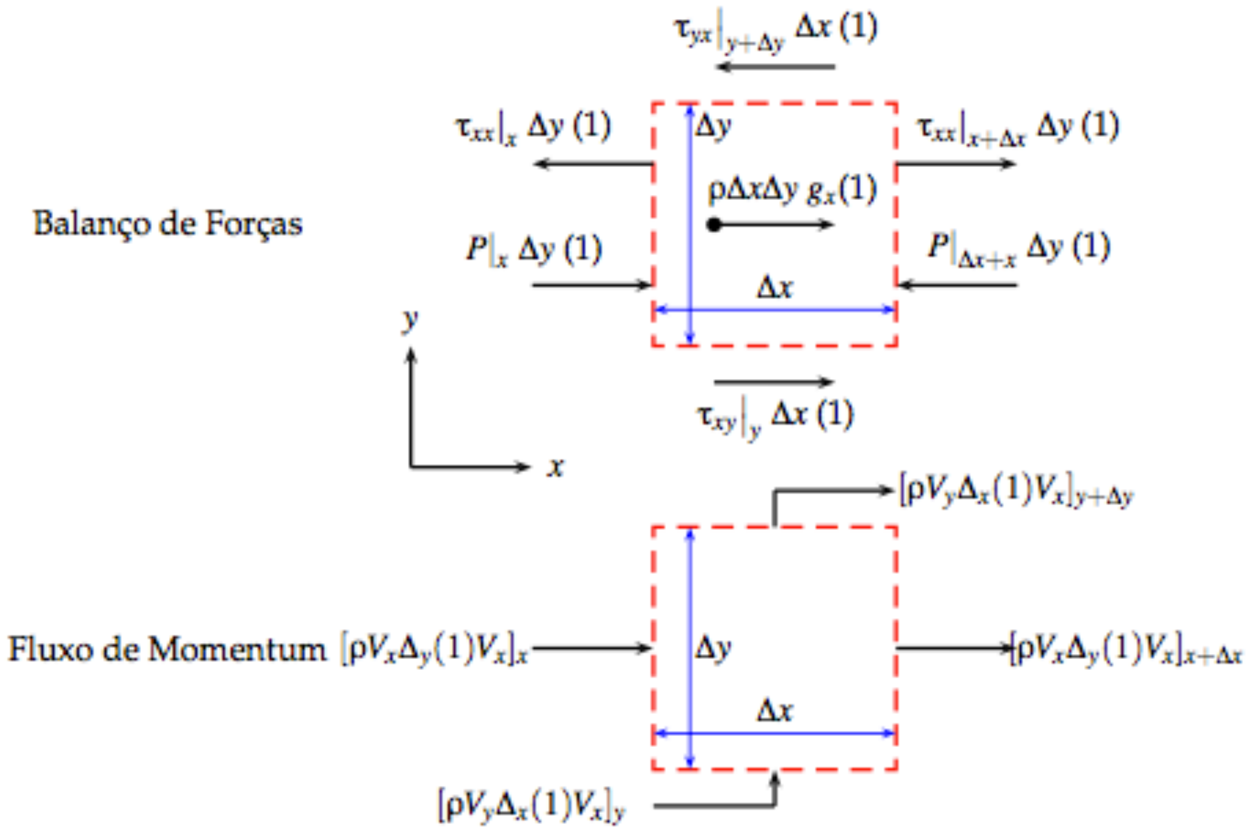
$$\frac{dP}{dx} = cte$$

ou

$$P = cte$$

7.1 Conservação de momento linear

2D, comprimento unitário em z, direção x:



7.1 Conservação de momento linear

Balanço de forças externas:

$$
\begin{aligned}
&\left(\tau_{xx}|_{x+\Delta x} - \tau_{xx}|_{x}\right)\Delta y(1) + \left(\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_{y}\right)\Delta x(1) \\
&+ \left(P|_{x} - P|_{x+\Delta x}\right)\Delta y(1) + \rho g_x \Delta x \Delta y(1) = \\
&\left(\rho V_x V_x|_{x+\Delta x} - \rho V_x V_x|_{x}\right)\Delta y(1) \\
&+ \left(\rho V_y V_x|_{y+\Delta y} - \rho V_y V_x|_{y}\right)\Delta x(1)
\end{aligned}
$$

$\div\ \Delta x \Delta y$ e fazendo $\lim_{\Delta x \to 0}$, $\lim_{\Delta y \to 0}$:

$$
\underbrace{\frac{\partial(\rho V_x V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y V_x)}{\partial y}}_{\text{Momentum}} = \underbrace{\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}}_{\text{Forças}} + \rho g_x
$$

7.1 Conservação de momento linear

Para componente y (Análogo):

$$\frac{\partial(\rho V_x V_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y V_y)}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y$$

7.1 Conservação de momento linear

Para geometria cilíndrica com simetria axial:
componente axial (x)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho r V_x V_x) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_x V_r) = \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rx}) + r\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - r\frac{\partial P}{\partial x} + \rho r g_x$$

componente radial (r)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho r V_r V_x) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r V_r) = \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr}) + r\frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} - r\frac{\partial P}{\partial r}$$

7.1 Conservação de momento linear

$$\text{Fluidos Newtonianos:} \begin{cases} \tau_{xx} &= \mu\left[2\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{2}{3}(\nabla.\vec{V})\right] \\ \tau_{rr} &= \mu\left[2\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{2}{3}(\nabla.\vec{V})\right] \\ \tau_{rx} &= \mu\left[2\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x}\right] \end{cases}$$

onde:

$$(\nabla \cdot \vec{V}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{\partial V_x}{\partial x}$$

7.1 Conservação de momento linear – Jatos livres

$\rightarrow$ Similaridade com C.L. fluido/sólido

- Largura << Comprimento
- $\frac{\partial()}{\partial r} \gg \frac{\partial()}{\partial x}$
- $V_x \gg V_r$

7.1 Conservação de momento linear – Jatos livres

Aplicando nos termos das Eq's de momentum:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rx}) \gg r\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}$$

e

$$\tau_{rx} = \mu\frac{\partial V_x}{\partial r} \qquad \text{pois} \qquad \frac{\partial V_x}{\partial r} \gg \frac{\partial V_r}{\partial x}$$

então, componente <u>axial</u>:

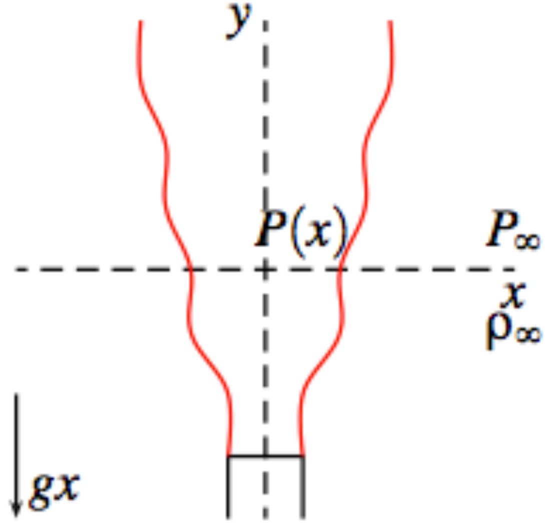
$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho r V_x V_x) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_x V_r) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu\frac{\partial V_x}{\partial r}\right) - r\frac{\partial P}{\partial x} + \rho r g_x$$

7.1 Conservação de momento linear – Jatos livres

Por análise de ordem de grandeza para direção radial conclui-se:

$$\frac{\partial P}{\partial r} \approx 0$$

Para um plano em x, a pressão é praticamente constante.
então:



7.1 Conservação de momento linear – Jatos livres

$$\frac{\partial P}{\partial x} \approx \underbrace{\frac{\partial P_\infty}{\partial x}}_{\text{Fluido em reposo}} = -\rho_\infty g_x$$

Então a equação de momento linear na direção axial torna-se:

7.1 Conservação de momento linear – Jatos livres

$V_x \rightarrow$ (228)
$V_r \rightarrow$ Continuidade (202)
$\rho \rightarrow$ Gás ideal
3 incógnitas, 3 eq's