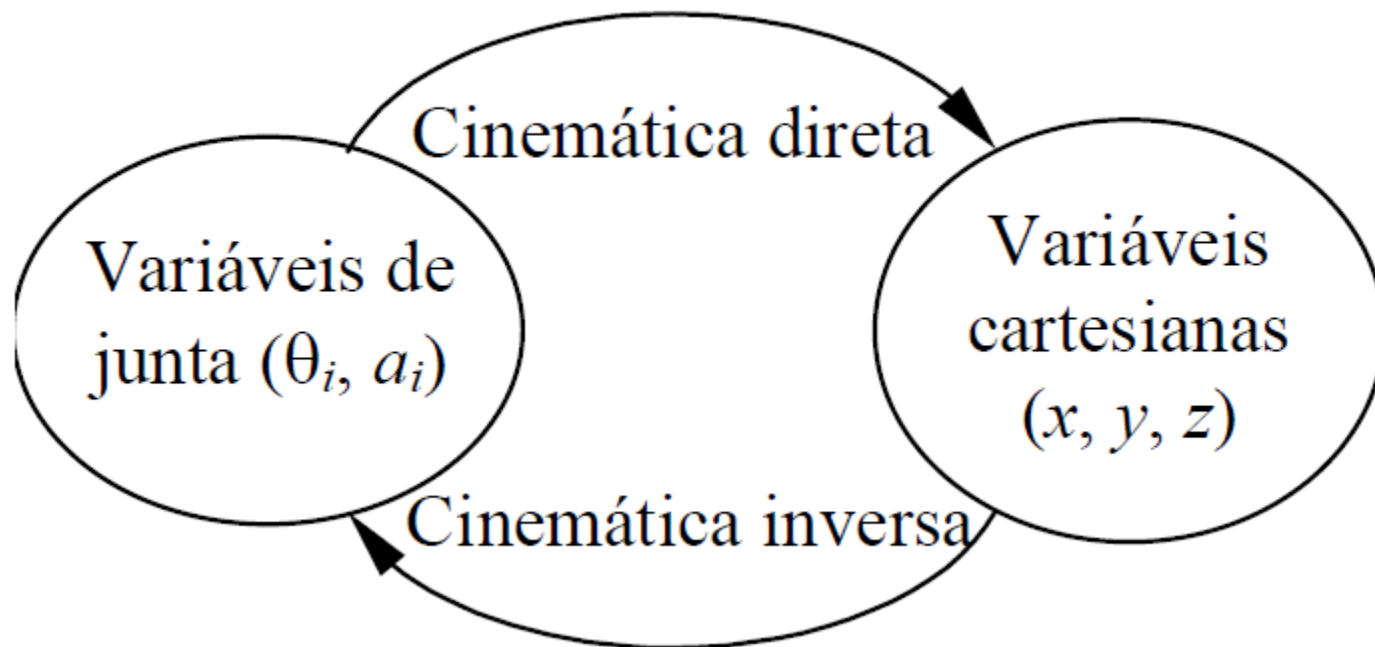


Modelagem Cinemática de Robôs Industriais

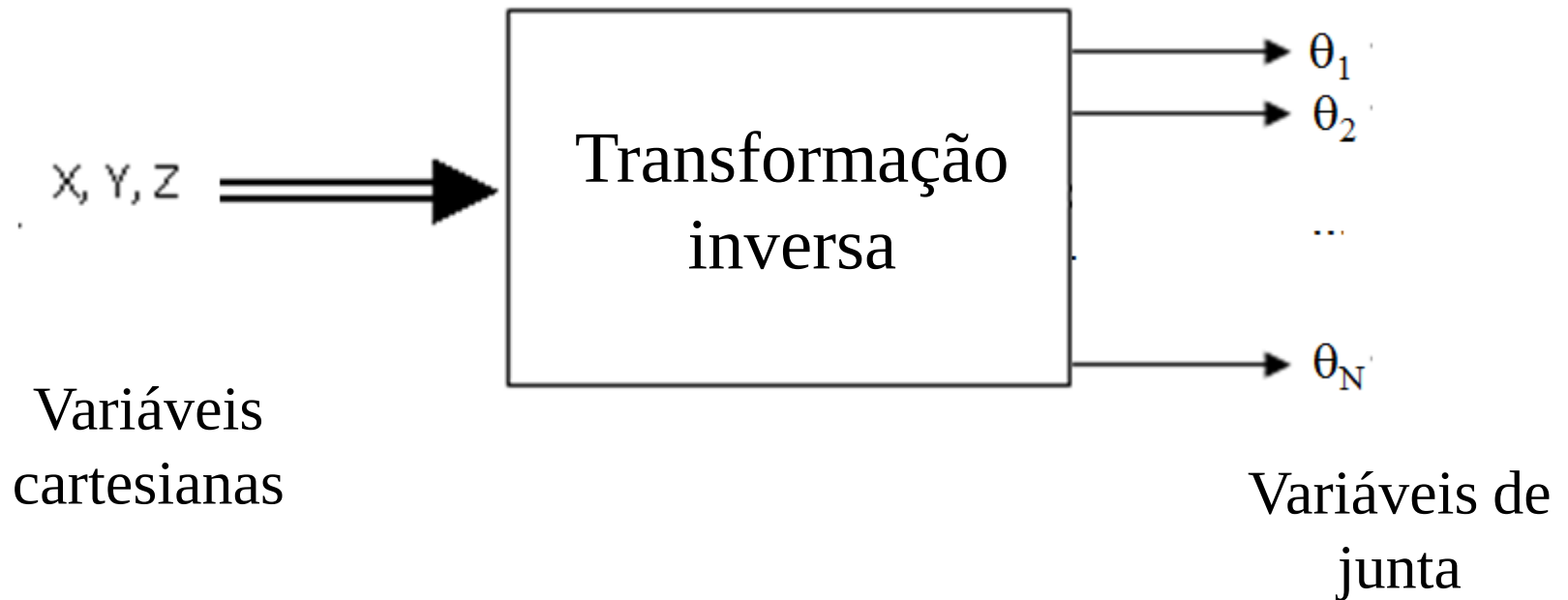
Prof. Assoc. Mário Luiz Tronco



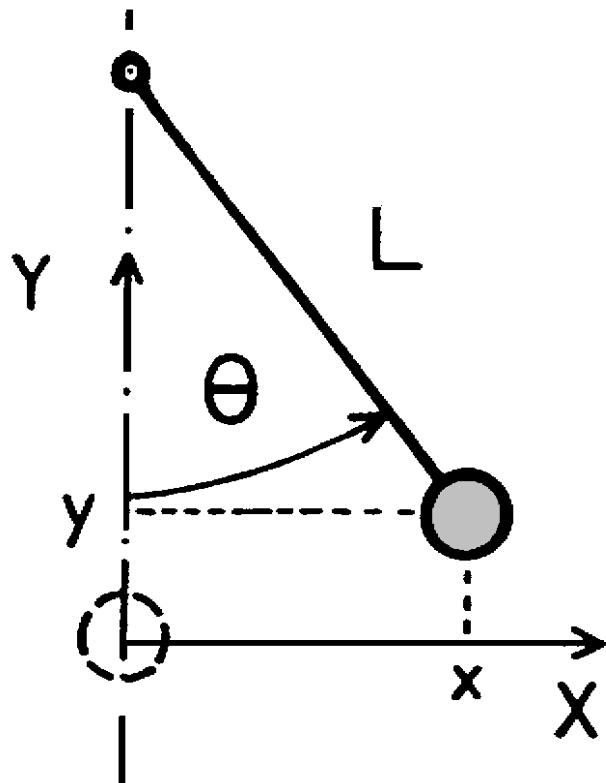
Transformação direta de coordenadas



Transformação inversa de coordenadas



Robô Elementar (1 Grau de Liberdade) – pêndulo simples



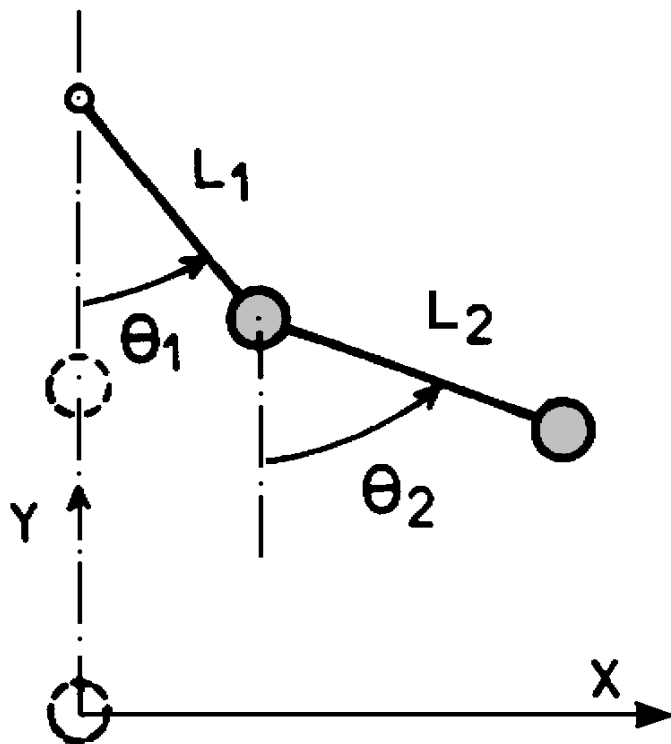
Modelo Matemático associado:

$$X = L \cdot \sin \theta$$

$$Y = L \cdot (1 - \cos \theta)$$

Para deslocarmos a extremidade do segmento L do robô para uma posição desejada $M = (X_o, Y_o)^T$ basta utilizarmos a coordenada θ , ou seja, $\theta = \arcsin (X_o/L)$, com $Y_o \leq L$.

Robô com 2 Graus de Liberdade – pêndulo duplo

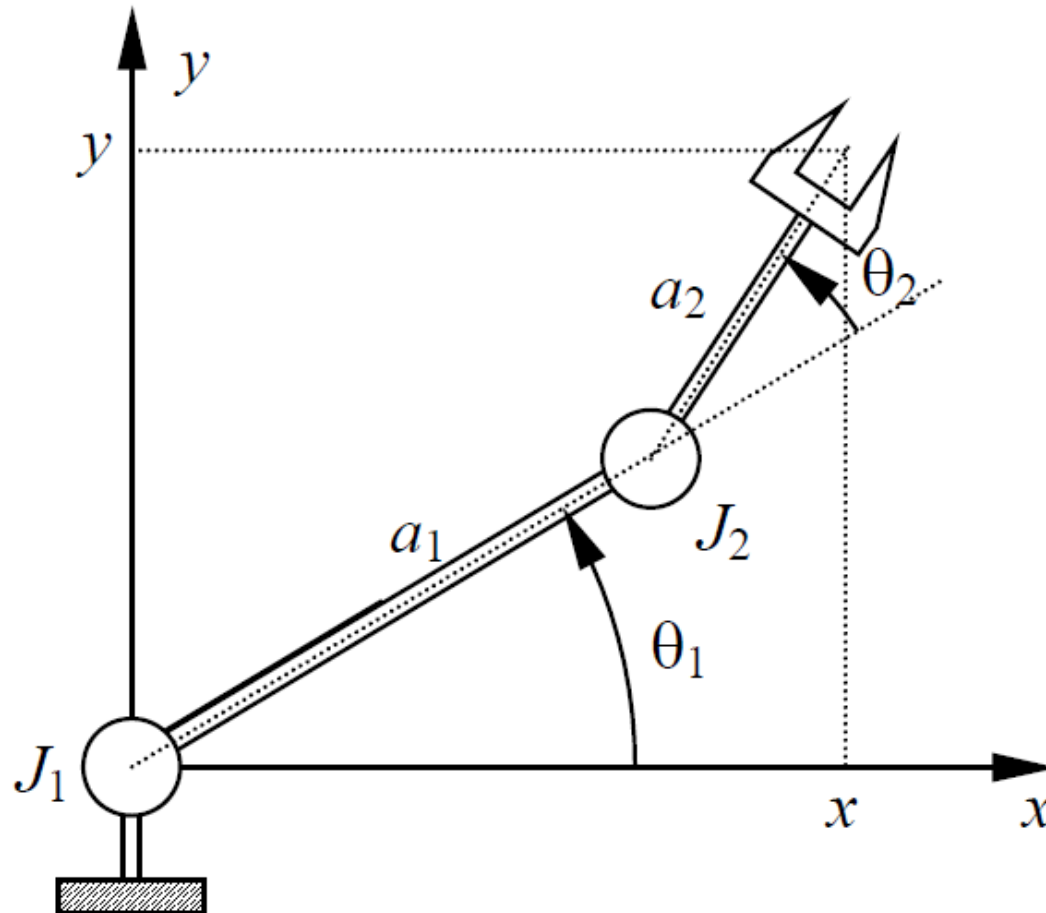


Modelo Matemático associado:

$$X = L_1 \cdot \sin \theta_1 + L_2 \cdot \sin \theta_2$$

$$Y = L_1 \cdot (1 - \cos \theta_1) + L_2 \cdot (1 - \cos \theta_2)$$

A transformação inversa de coordenadas consistirá na definição de um vetor $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T$, a partir do posicionamento do robô num determinado ponto $M(X_o, Y_o)^T$, a partir da obtenção dos valores θ_1 e θ_2 expressos em função de X_o e Y_o .

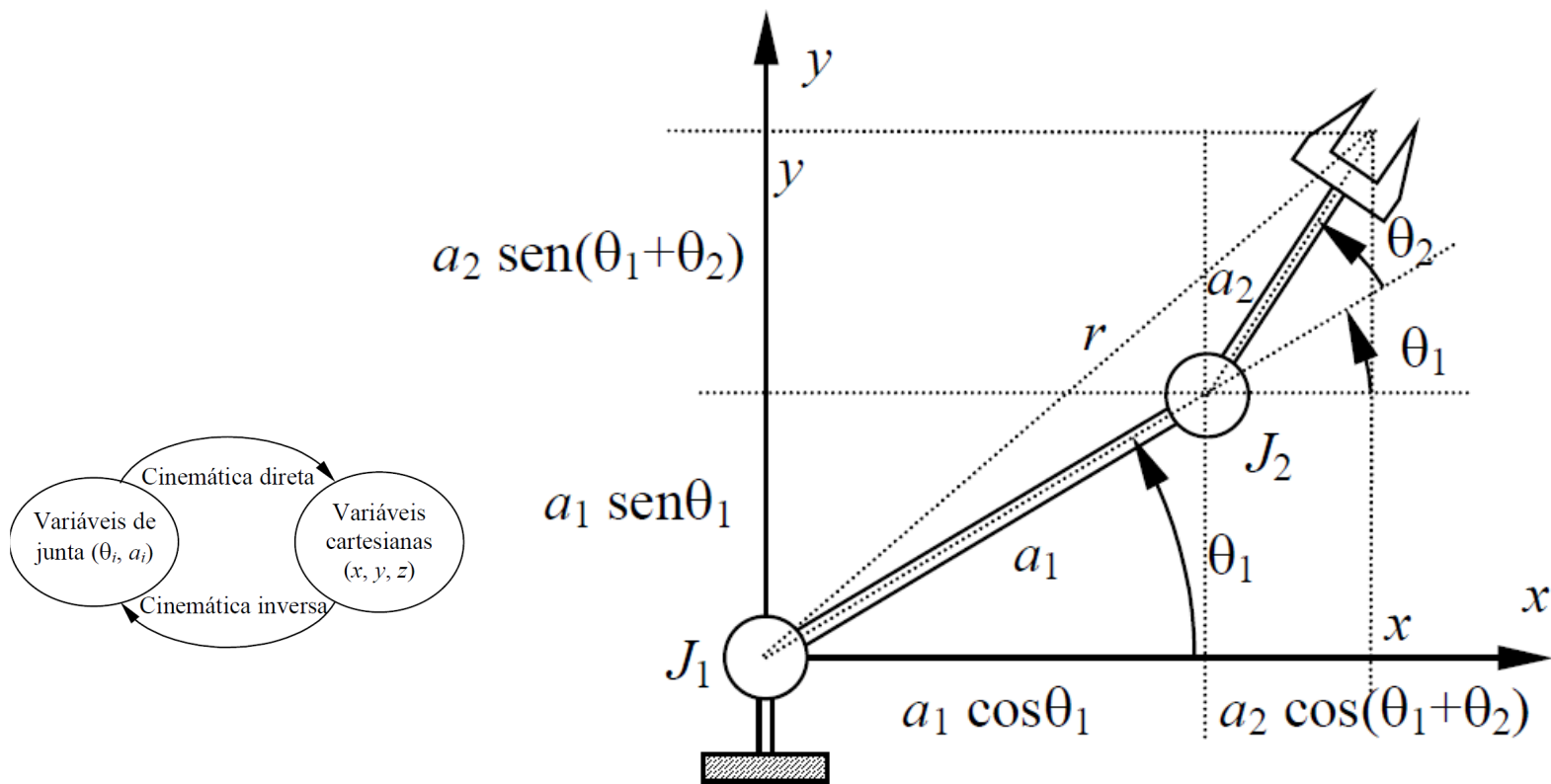


Manipulador *RR* em movimento plano vertical

$$x = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

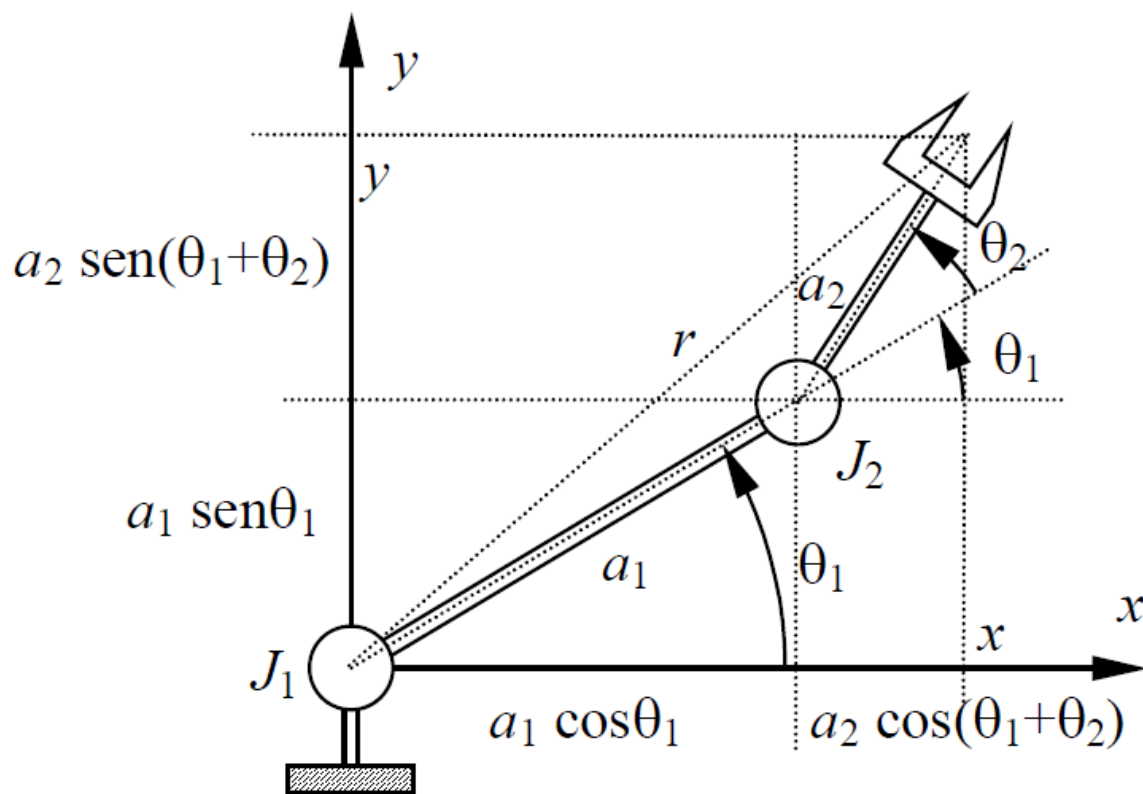
$$y = a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Equações da Cinemática Direta



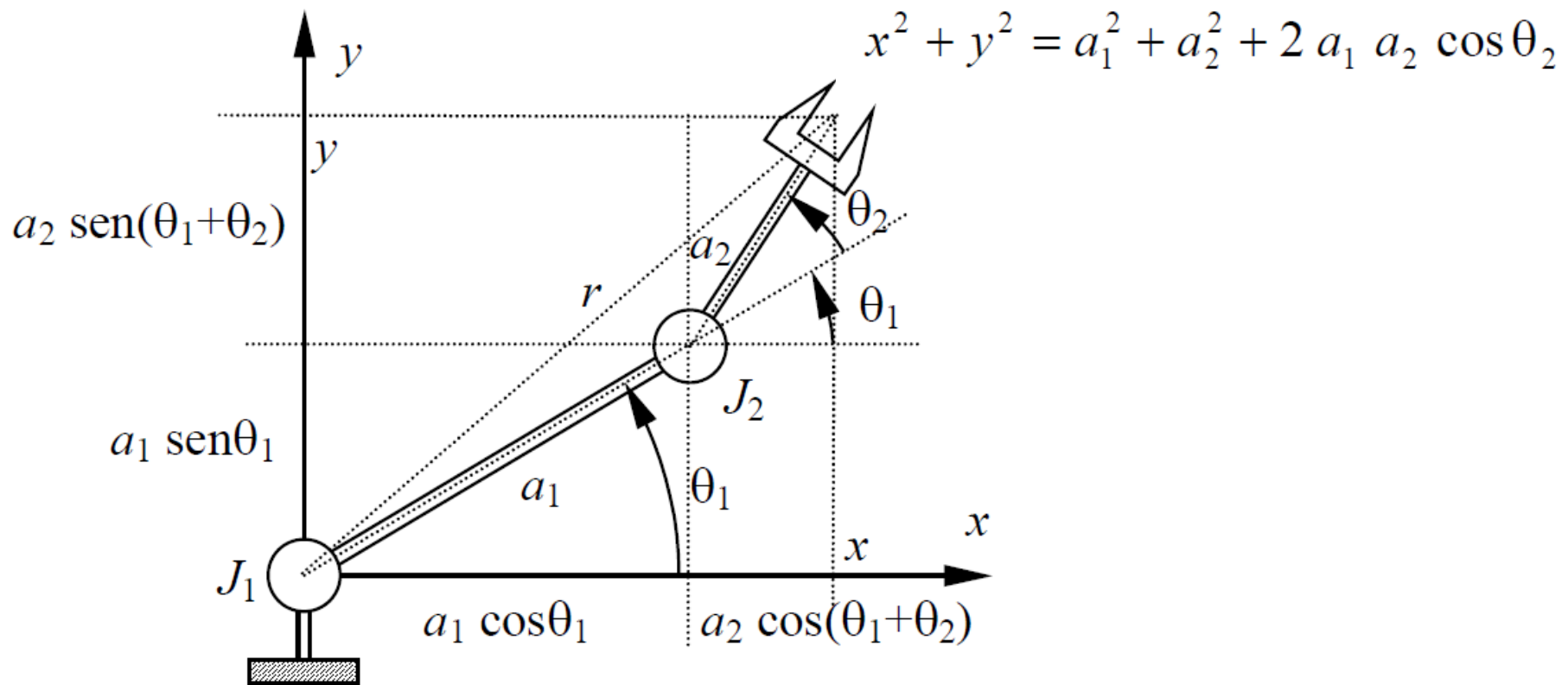
Equações da Cinemática Inversa

$$r^2 = x^2 + y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 [\cos \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$



Equações da Cinemática Inversa

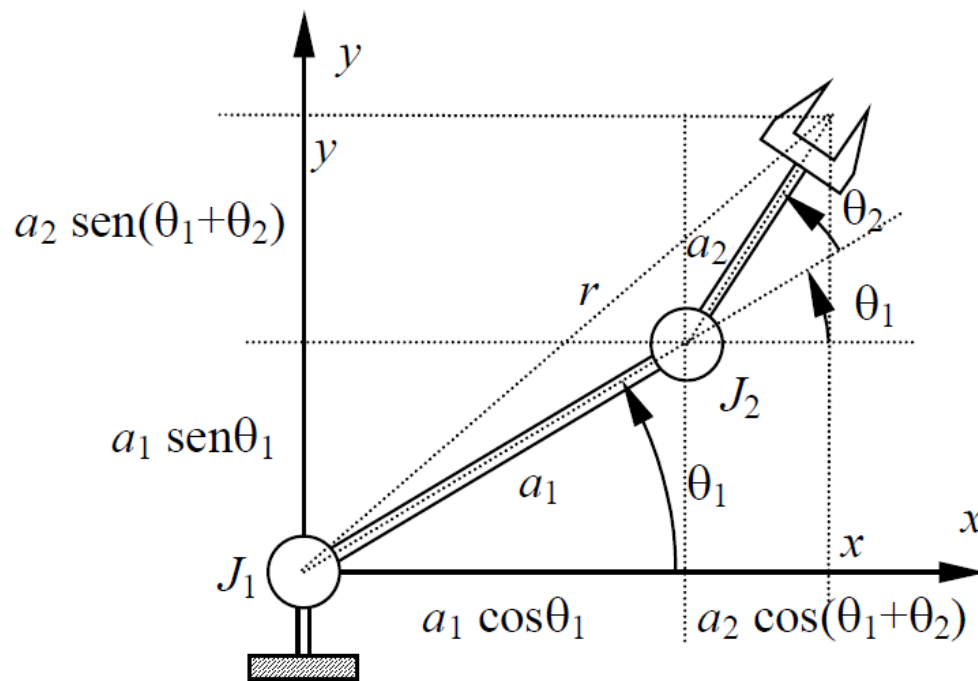
$$r^2 = x^2 + y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 [\cos \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$



Equações da Cinemática Inversa

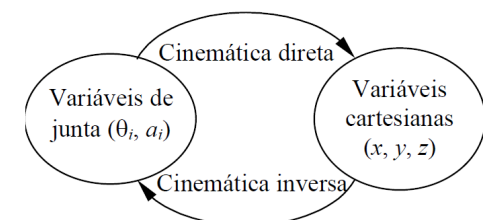
$$r^2 = x^2 + y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 [\cos \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

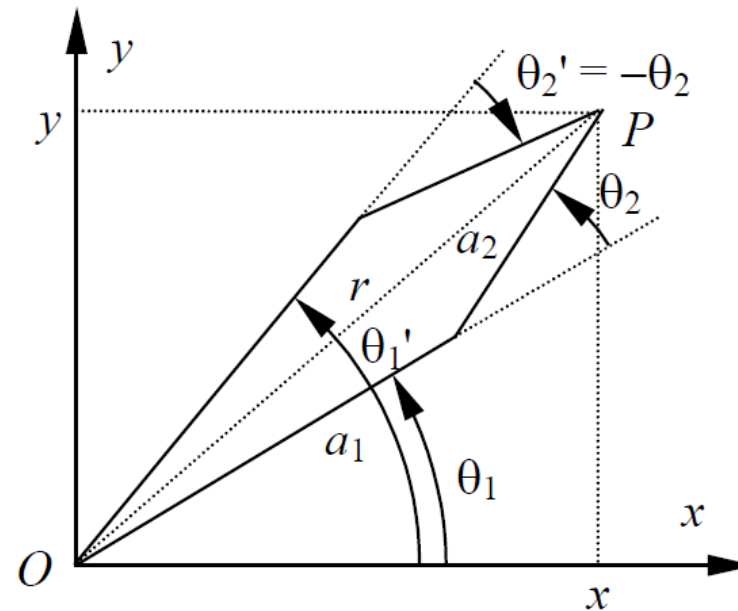
$$x^2 + y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos \theta_2$$



$$\cos \theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2 a_1 a_2}$$

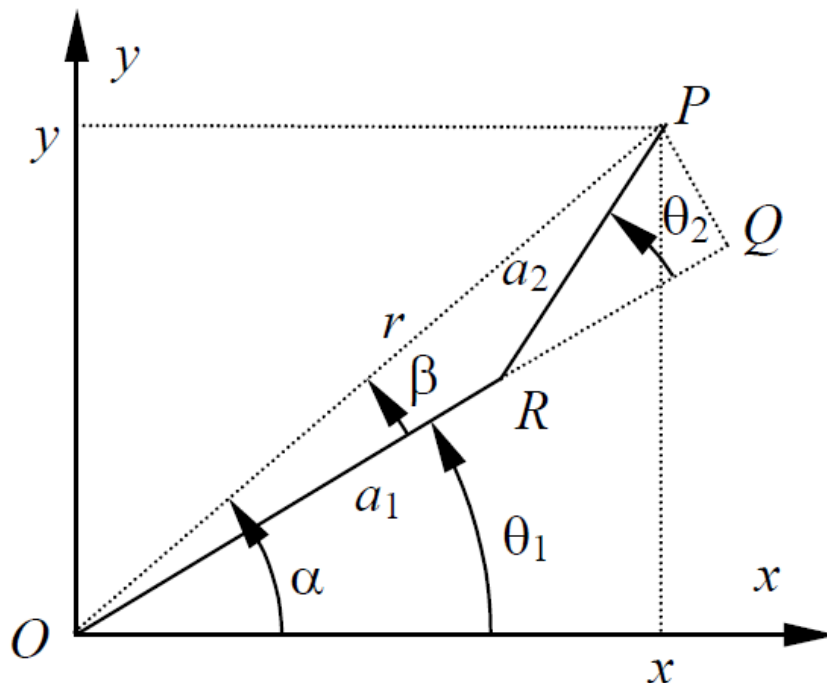
$$\theta_2 = \pm \arccos \left(\frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2 a_1 a_2} \right)$$





As duas soluções possíveis para a cinemática inversa do manipulador RR

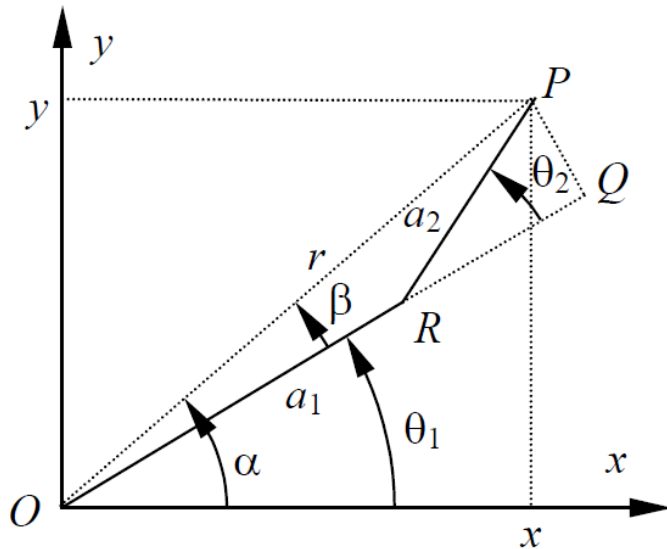
θ_1 será obtido pela tangente da diferença entre ângulos



$$\tan \beta = \frac{PQ}{a_1 + RQ} = \frac{a_2 \sin \theta_2}{a_1 + a_2 \cos \theta_2}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x},$$

Ângulos do manipulador *RR* para a determinação da cinemática inversa

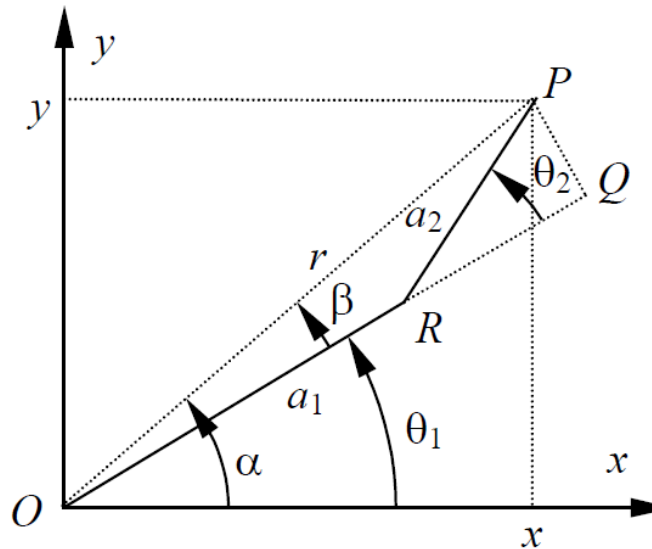


$$\tan \beta = \frac{PQ}{a_1 + RQ} = \frac{a_2 \sin \theta_2}{a_1 + a_2 \cos \theta_2}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x},$$

$\theta_1 = \alpha - \beta$, tem-se então

$$\tan \theta_1 = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\frac{y}{x} - \frac{a_2 \sin \theta_2}{a_1 + a_2 \cos \theta_2}}{1 + \frac{y}{x} \frac{a_2 \sin \theta_2}{a_1 + a_2 \cos \theta_2}}.$$



Reduzindo-se a fração ao denominador comum, resulta

$$\tan \theta_1 = \frac{y(a_1 + a_2 \cos \theta_2) - x a_2 \sin \theta_2}{x(a_1 + a_2 \cos \theta_2) + y a_2 \sin \theta_2}$$

$$\tan \theta_1 = \frac{y(x^2 + y^2 + a_1^2 - a_2^2) - x \sqrt{4 a_1^2 a_2^2 - (x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2)^2}}{x(x^2 + y^2 + a_1^2 - a_2^2) + y \sqrt{4 a_1^2 a_2^2 - (x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2)^2}}$$

As equações da cinemática inversa podem ser também obtidas por manipulação algébrica da cinemática direta. Partindo-se das equações que fornecem x e y em termos das variáveis de junta, então ao aplicar-se a decomposição do seno e do co-seno da soma de ângulos chega-se a

$$x = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - a_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$y = a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + a_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

Agrupando-se os termos em co-seno e seno do ângulo θ_1 tem-se que

$$x = (a_1 + a_2 \cos \theta_2) \cos \theta_1 - a_2 \sin \theta_2 \sin \theta_1$$

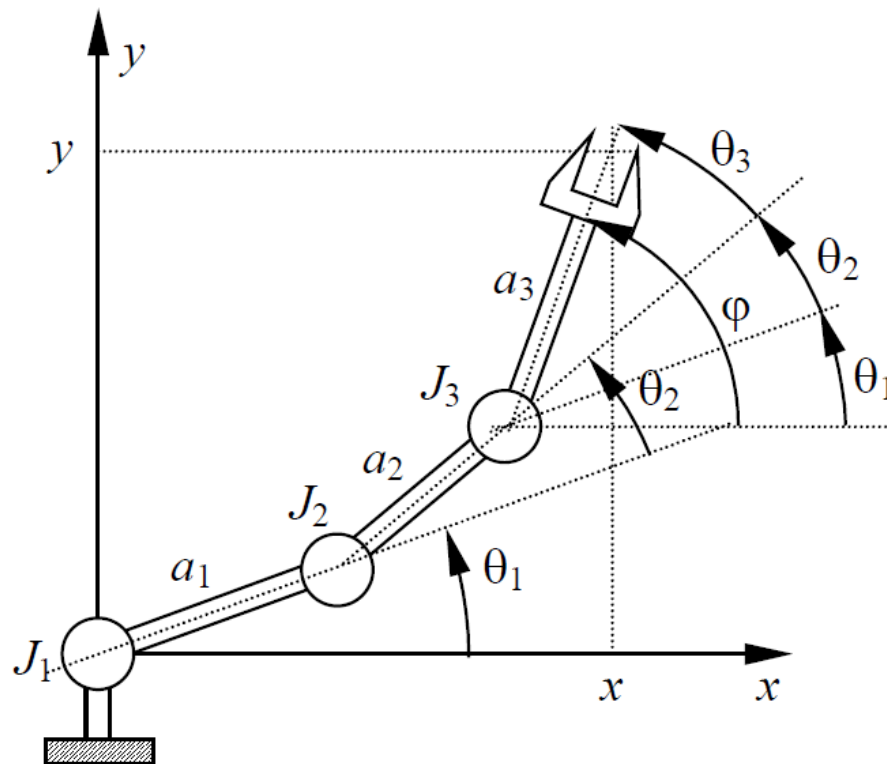
$$y = (a_1 + a_2 \cos \theta_2) \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2 \cos \theta_1$$

Tem-se agora um sistema linear composto por duas equações e duas incógnitas que são o seno e co-seno de θ_1 , pois se considera que θ_2 seja conhecido. Este sistema pode ser resolvido facilmente por substituição ou qualquer outro método, e obtém-se o resultado

$$\cos \theta_1 = \frac{x(a_1 + a_2 \cos \theta_2) + y a_2 \sin \theta_2}{(a_1 + a_2 \cos \theta_2)^2 + a_2^2 \sin^2 \theta_2},$$

e

$$\sin \theta_1 = \frac{y(a_1 + a_2 \cos \theta_2) - x a_2 \sin \theta_2}{(a_1 + a_2 \cos \theta_2)^2 + a_2^2 \sin^2 \theta_2},$$

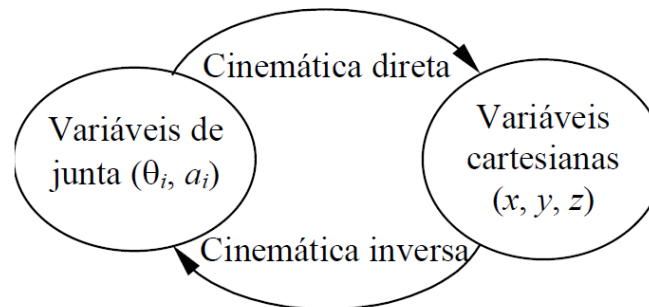


Manipulador *RRR* em movimento plano vertical

As equações da cinemática direta são obtidas de maneira semelhante ao exemplo anterior, ou seja, pela adição das projeções das juntas nos eixos cartesianos. Com isso tem-se que

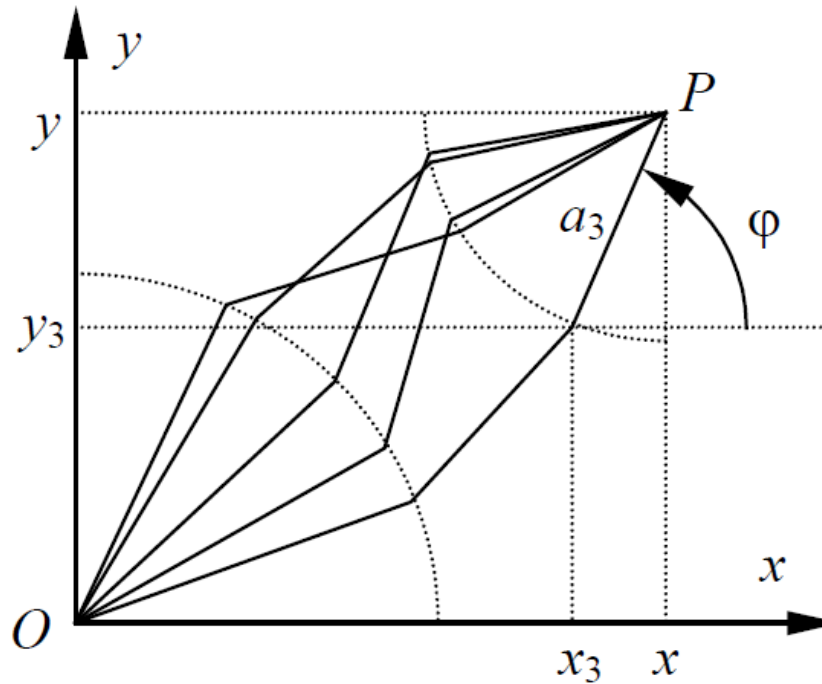
Equações da Cinemática Direta

$$x = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$
$$y = a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$



A cinemática inversa não pode ser resolvida, pois há apenas duas equações e 3 incógnitas (os três ângulos de juntas).

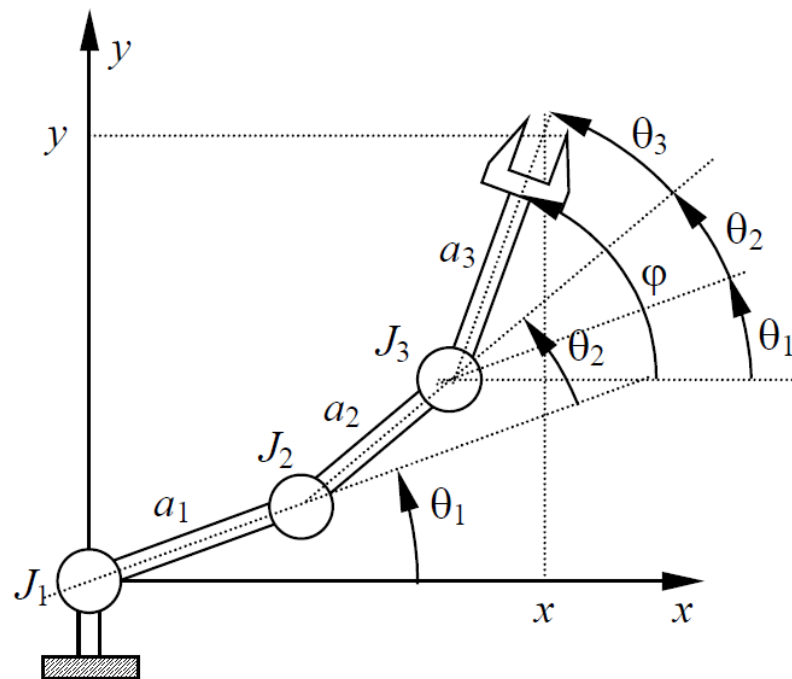
Existem infinitas soluções de ângulos que satisfazem a condição do órgão terminal atingir um dado ponto no plano.



Algumas das infinitas configurações possíveis do braço *RRR* na cinemática inversa.

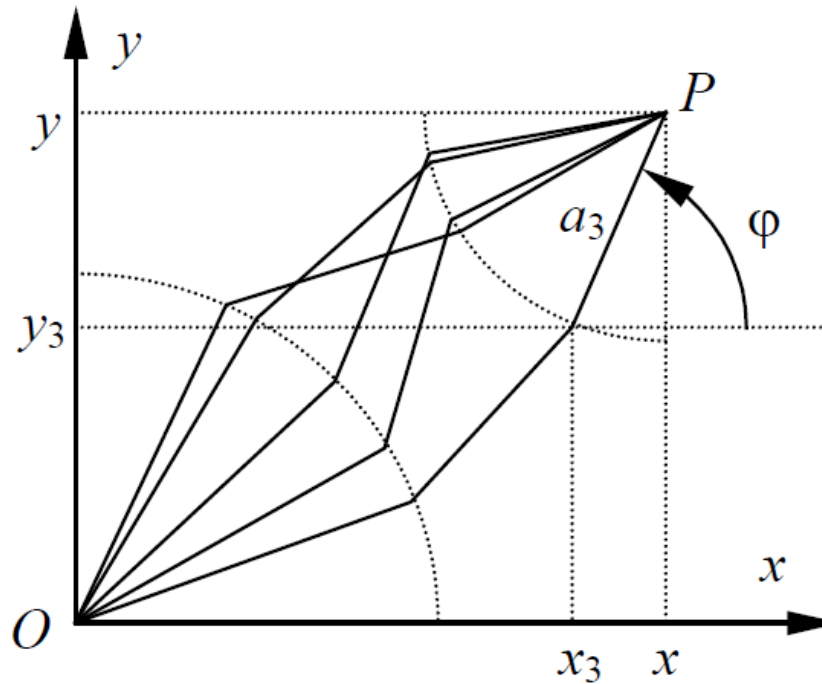
Fixando a orientação da junta J3 com ângulo φ (com relação à horizontal)

A posição de J3, denotada por x_3 e y_3 vale:



$$x_3 = x - a_3 \cos \varphi$$

$$y_3 = y - a_3 \sin \varphi$$



Algumas das infinitas configurações possíveis do braço *RRR* na cinemática inversa.

O problema agora é reduzido a se encontrar os valores dos ângulos θ_1 e θ_2 . A geometria deste braço reduzido é idêntica àquela apresentada no exemplo anterior, composta por duas juntas RR , com a única modificação de que os valores de x e y são substituídos por x_3 e y_3 . A solução é, portanto, dada por:

$$\theta_2 = \pm \arccos \left[\frac{(x - a_3 \cos \varphi)^2 + (y - a_3 \sin \varphi)^2 - a_1^2 - a_2^2}{2 a_1 a_2} \right],$$

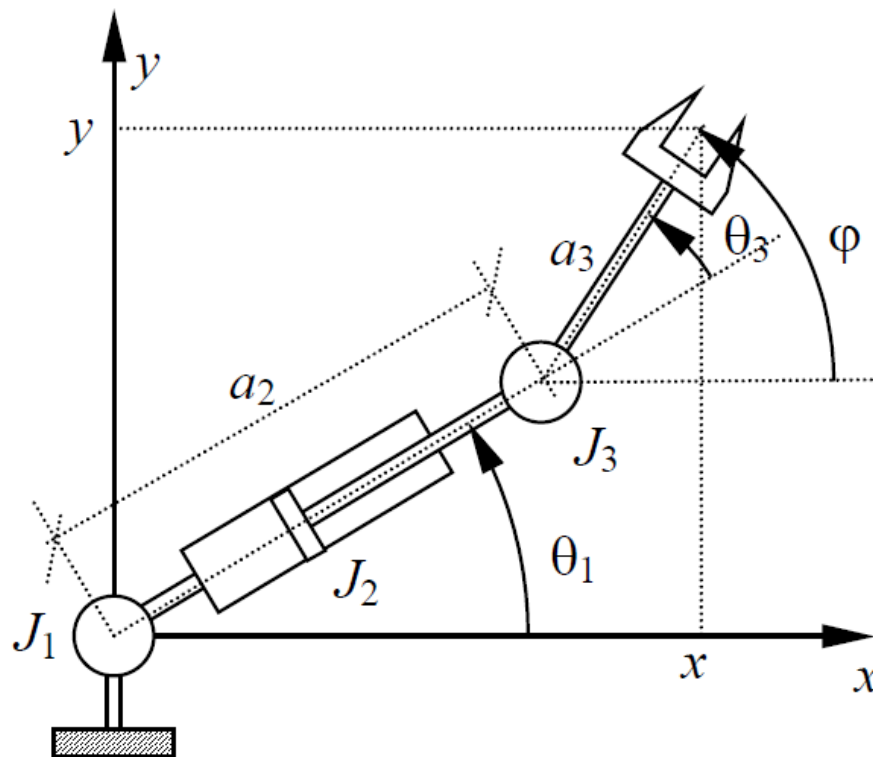
e

$$\theta_1 = \arctan \left[\frac{(y - a_3 \sin \varphi) (a_1 + a_2 \cos \theta_2) - (x - a_3 \cos \varphi) a_2 \sin \theta_2}{(x - a_3 \cos \varphi) (a_1 + a_2 \cos \theta_2) + (y - a_3 \sin \varphi) a_2 \sin \theta_2} \right],$$

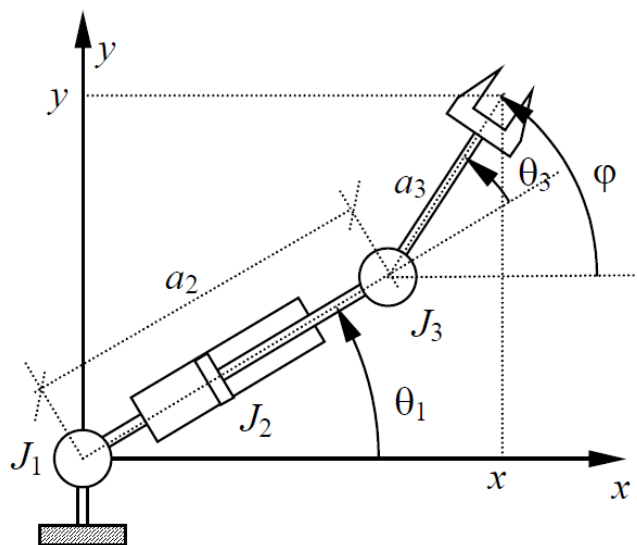
Finalmente para o cálculo do terceiro ângulo percebe-se que o ângulo φ é igual à soma dos ângulos das juntas, ou seja, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$. Logo, como φ é conhecido e θ_1 e θ_2 já foram determinados, então

$$\theta_3 = \varphi - \theta_1 - \theta_2$$

Manipulador RPR em movimento plano



Cinemática Direta: idêntica à do primeiro exemplo

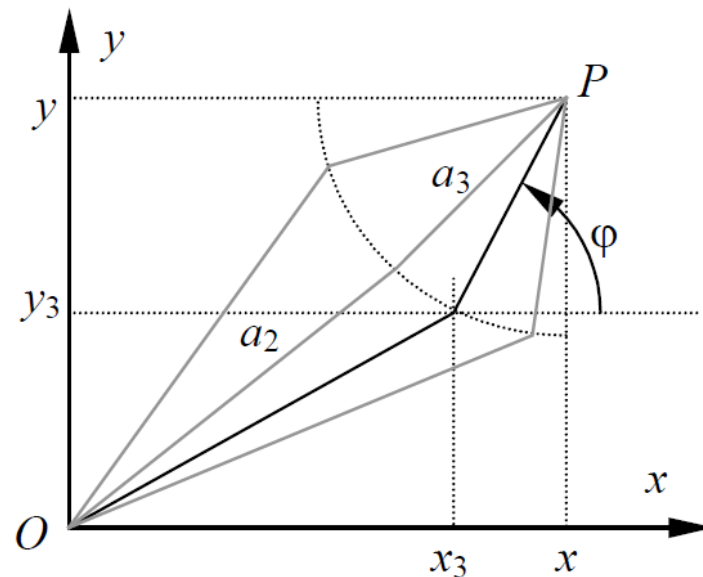


$$x = a_2 \cos \theta_1 + a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y = a_2 \sin \theta_1 + a_3 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

O braço apresenta três variáveis de junta (Θ_1, a_2 e Θ_3) deve-se obter 3 equações para a cinemática inversa.

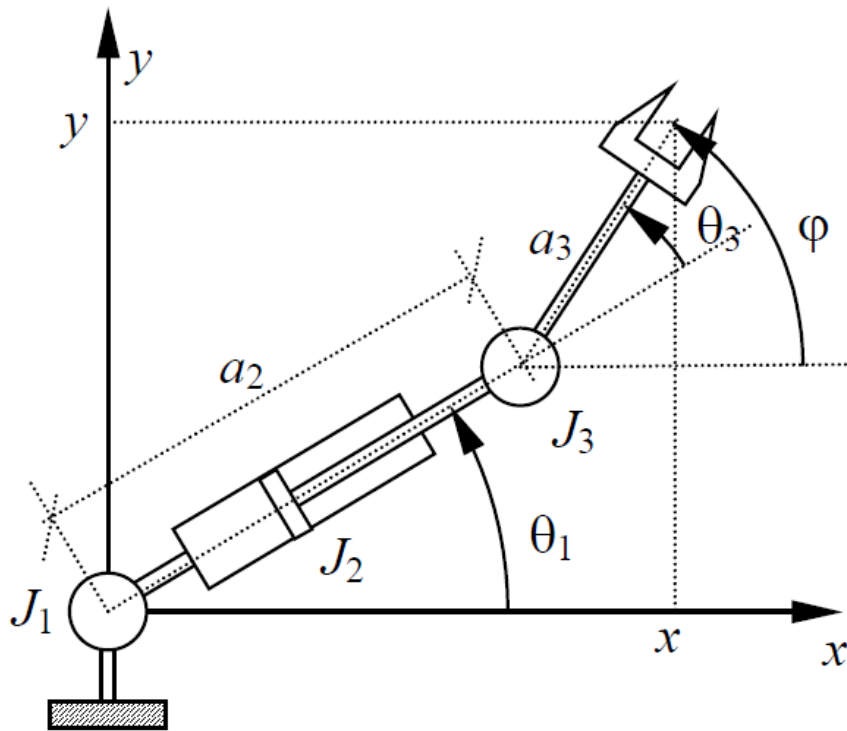
A cinemática direta fornece apenas duas equações

Infinitas soluções possíveis



Algumas soluções possíveis para a cinemática inversa

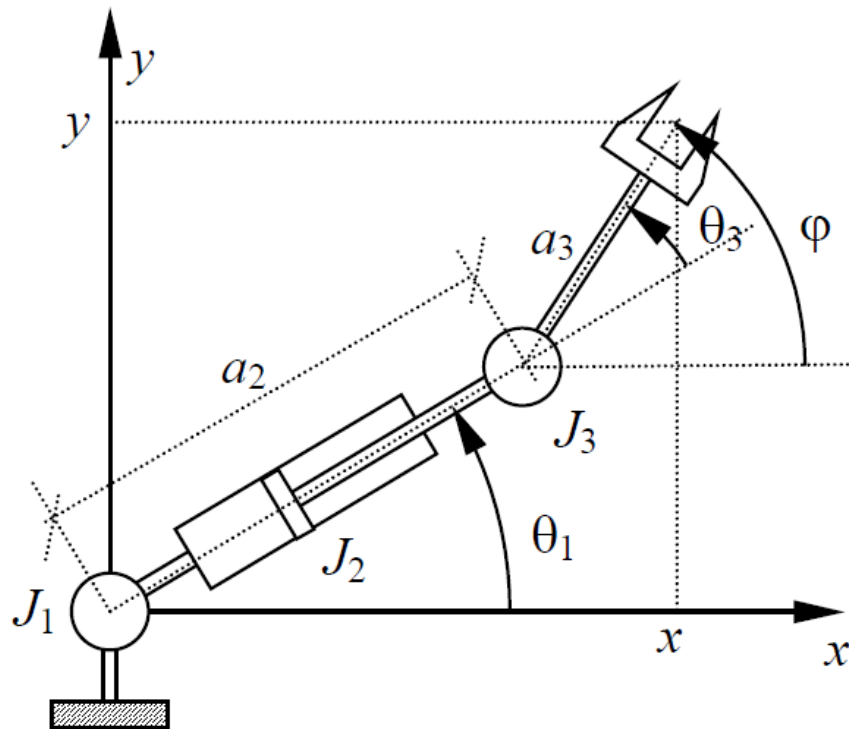
A posição x_3, y_3 da junta J_3 é fixada se o ponto $P = (x, y)$ e o ângulo φ forem conhecidos:



$$x_3 = x - a_3 \cos \varphi$$

$$y_3 = y - a_3 \sin \varphi$$

Isto permite escrever a cinemática direta para a posição desta junta, ou seja:



$$x_3 = a_2 \cos \theta_1$$
$$y_3 = a_2 \sin \theta_1$$

Como x_3 e y_3 são conhecidos, pode-se resolver este sistema para as variáveis de junta θ_1 e a_2 . Dividindo-se a segunda pela primeira, tem-se:

$$\tan \theta_1 = \frac{y_3}{x_3} = \frac{x - a_3 \sin \varphi}{y - a_3 \cos \varphi},$$

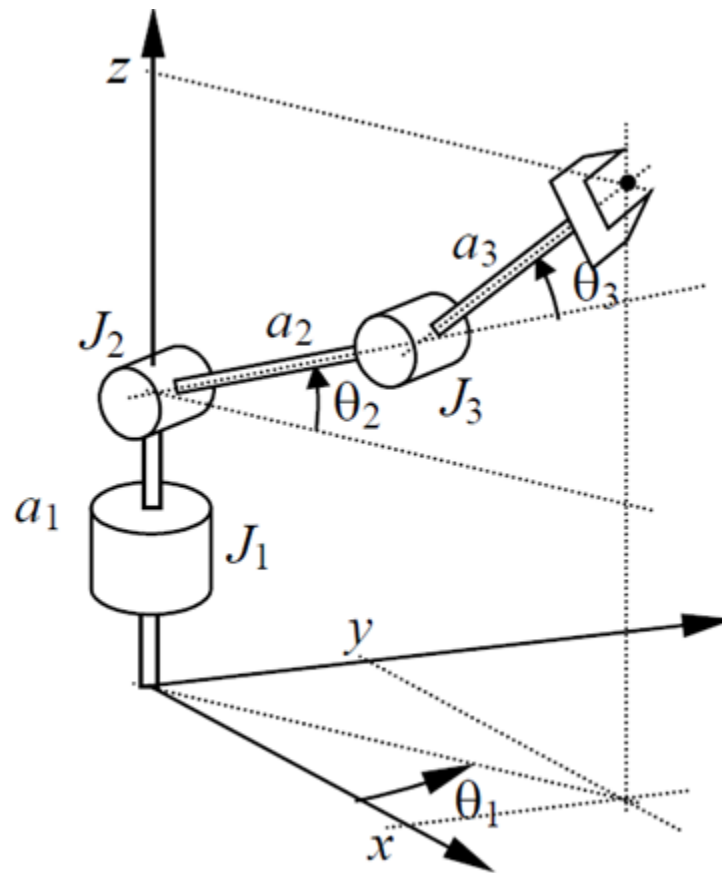
e adicionando-se o quadrado de ambas resulta:

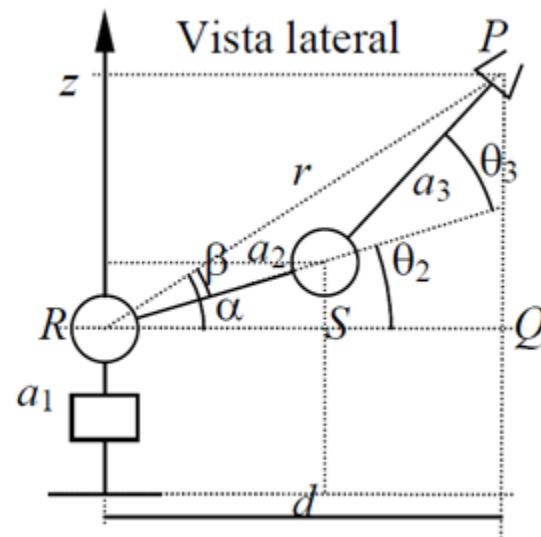
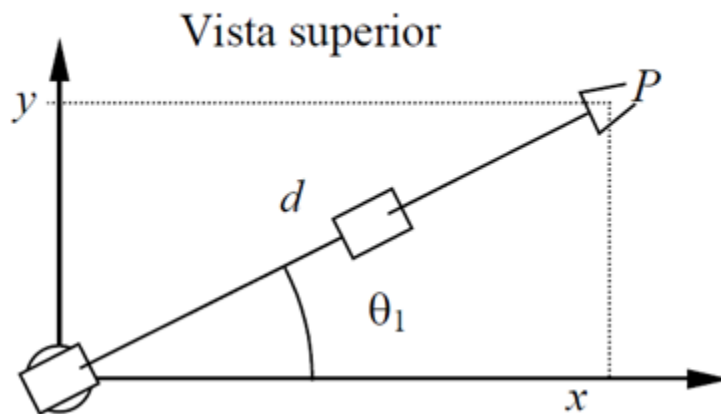
$$a_2 = \sqrt{(x - a_3 \sin \varphi)^2 + (y - a_3 \cos \varphi)^2},$$

e finalmente

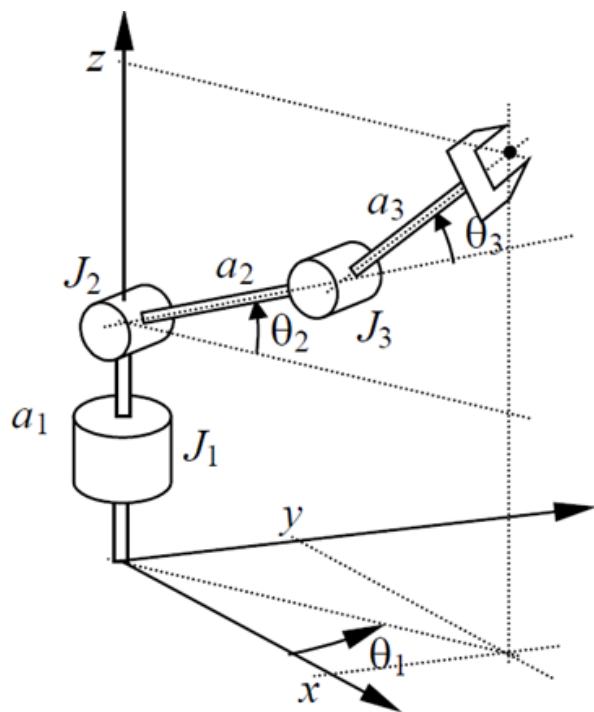
$$\theta_3 = \varphi - \theta_1.$$

Manipulador PRR em movimento no espaço



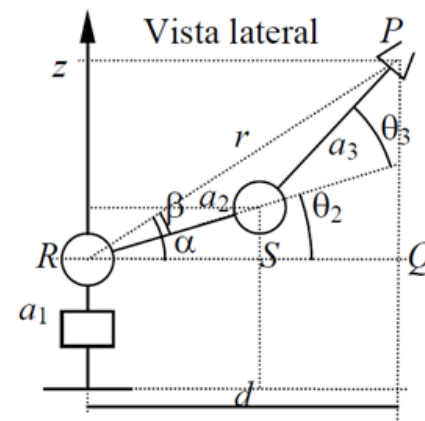
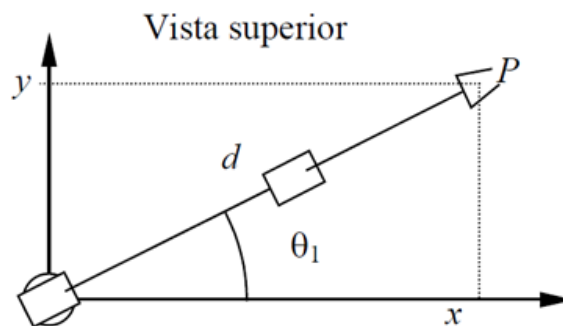


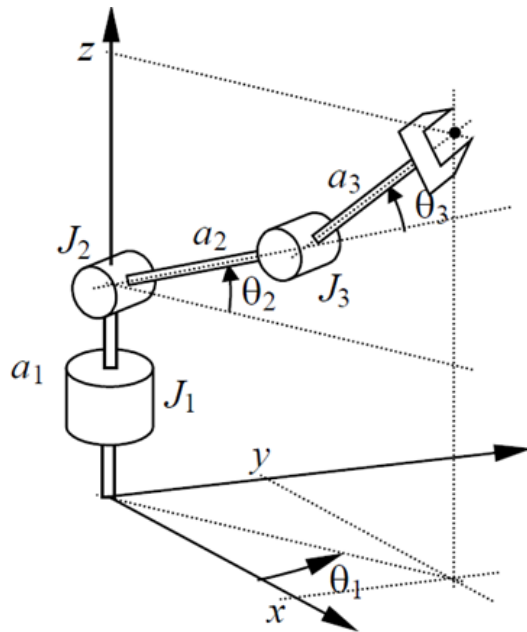
Manipulador PRR em movimento no espaço



A projeção do ponto P (órgão terminal) sobre o plano xy fornece a distância horizontal d:

$$d = a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)$$





Cinemática Direta

$$\begin{aligned}x &= d \cos \theta_1 = [a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \cos \theta_1 \\y &= d \sin \theta_1 = [a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \sin \theta_1 \\z &= a_1 + a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)\end{aligned}$$

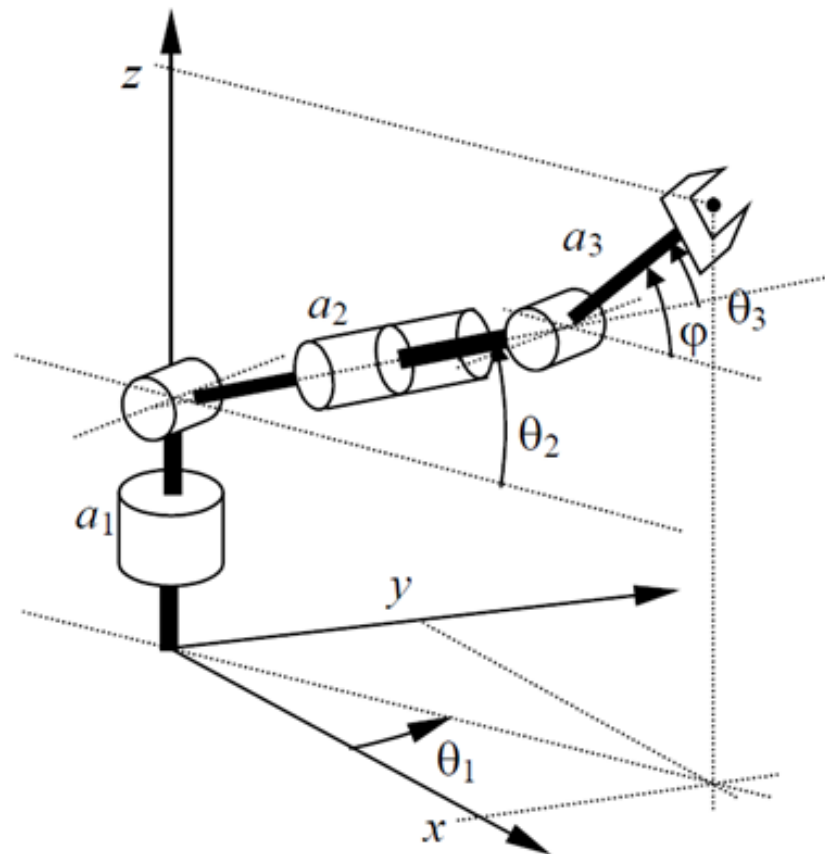
Cinemática Inversa

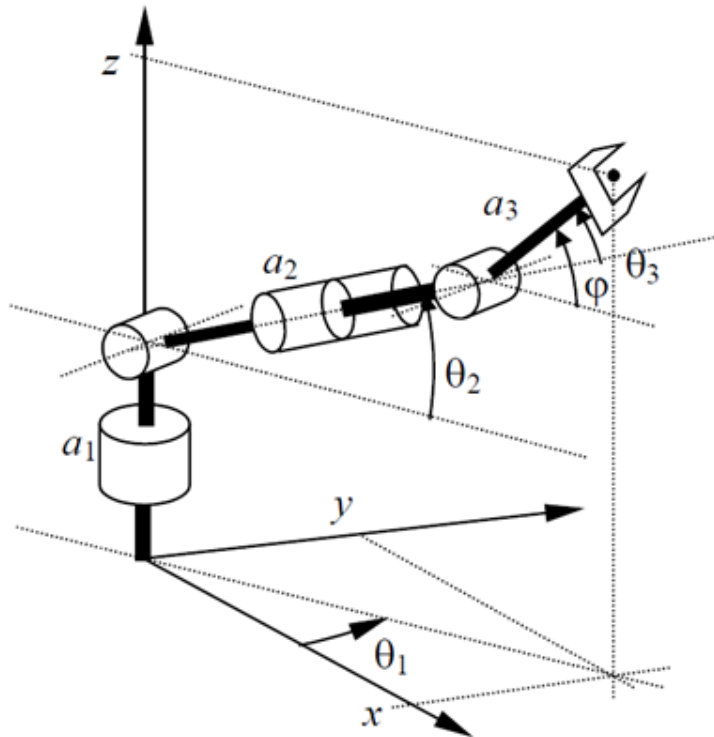
$$\theta_3 = \pm \arccos \left(\frac{x^2 + y^2 + (z - a_1)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2 a_2 a_3} \right),$$

$$\theta_2 = \arctan \left[\frac{(z - a_1) (a_2 + a_3 \cos \theta_3) - \sqrt{x^2 + y^2} a_3 \sin \theta_3}{\sqrt{x^2 + y^2} (a_2 + a_3 \cos \theta_3) + (z - a_1) a_3 \sin \theta_3} \right]$$

$$\theta_1 = \arctan \frac{y}{x}$$

Manipulador com 4 graus de liberdade



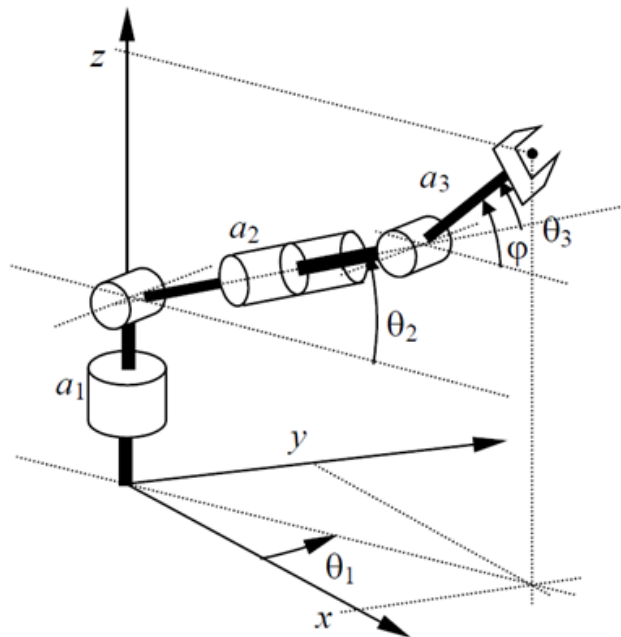


cinemática direta

$$\begin{aligned} x &= d \cos \theta_1 = [a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \cos \theta_1 \\ y &= d \sin \theta_1 = [a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \sin \theta_1 \\ z &= a_1 + a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \end{aligned}$$

Cinemática Inversa – 4 variáveis de junta $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ e a_2

A cinemática direta fornece três equações: necessário utilizar a condição fornecida para o ângulo de punho: $\varphi = \Theta_2 + \Theta_3$



$$d_4 = d - a_3 \cos \varphi$$

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e, portanto,

$$d_4 = \sqrt{x^2 + y^2} - a_3 \cos \varphi$$

Por outro lado, a coordenada z_4 da junta J_4 no eixo z vale

$$z_4 = z - a_3 \sin \varphi$$

Comparando agora o movimento deste braço no plano vertical com o exemplo 3, percebe-se que d_4 corresponde à coordenada x do exemplo 3 e que $z_4 - a_1$ corresponde à coordenada y . A solução de ambos é, portanto, igual, restando apenas efetuar as devidas substituições nas variáveis. Com isto resulta

$$\theta_2 = \arctan \frac{z_4 - a_1}{d_4} = \arctan \frac{z - a_1 - a_3 \sin \varphi}{\sqrt{x^2 + y^2} - a_3 \cos \varphi},$$

e o deslocamento linear da junta J_2 dado por

$$a_2 = \sqrt{(z_4 - a_1)^2 + d_4^2} = \sqrt{(z - a_1 - a_3 \sin \varphi)^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a_3 \cos \varphi\right)^2}.$$

O ângulo θ_1 é facilmente obtido da vista superior e vale

$$\theta_1 = \arctan \frac{y}{x},$$

e finalmente o ângulo θ_3 é calculado com base no cálculo já efetuado de θ_2 :

$$\theta_3 = \varphi - \theta_2,$$

Um vetor de posição, $v = ai + bj + ck$ pode ser representado no espaço tridimensional pela matriz coluna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Onde $a = x/w$, $b=y/w$, $c=z/w$ e w é um fator de escalamento.
Ex.: Qualquer das matrizes abaixo pode ser usada para representar o vetor $v=25i + 10j + 20k$

$$\begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 20 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ 40 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 12,5 \\ 5 \\ 10 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

Tais vetores podem ser usados para definir a posição do órgão terminal de um manipulador

Um vetor pode ser transladado ou girado no espaço por meio de uma transformação. Tal transformação é realizada por uma matriz $\mathbf{H}_{4 \times 4}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{v}$$

O vetor $\mathbf{u}$ é transformado no vetor $\mathbf{v}$ pela operação matricial com a matriz $\mathbf{H}$

A transformação para realizar uma translação de um vetor no espaço numa **distância** a na **direção** x , b na **direção** y e c na **direção** z é dada por:

$$H = Trans(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex.: Para o vetor $y=25i + 10j + 20k$ realizar uma translação numa distância de 8 na direção x, 5 na direção y e 0 na direção z, a transformação é dada por:

$$H = Trans(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O vetor de translação:

$$Hy = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 20 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 15 \\ 20 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotações de um vetor em torno de cada um dos três eixos num ângulo Θ podem ser realizadas por transformações de rotações.

Ao longo do eixo x, a transformação de rotação é dada por:

$$Rot(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ao longo do eixo y , a transformação de rotação é dada por:

$$Rot(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ao longo do eixo z , a transformação de rotação é dada por:

$$Rot(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Equações cinemáticas usando transformações homogêneas

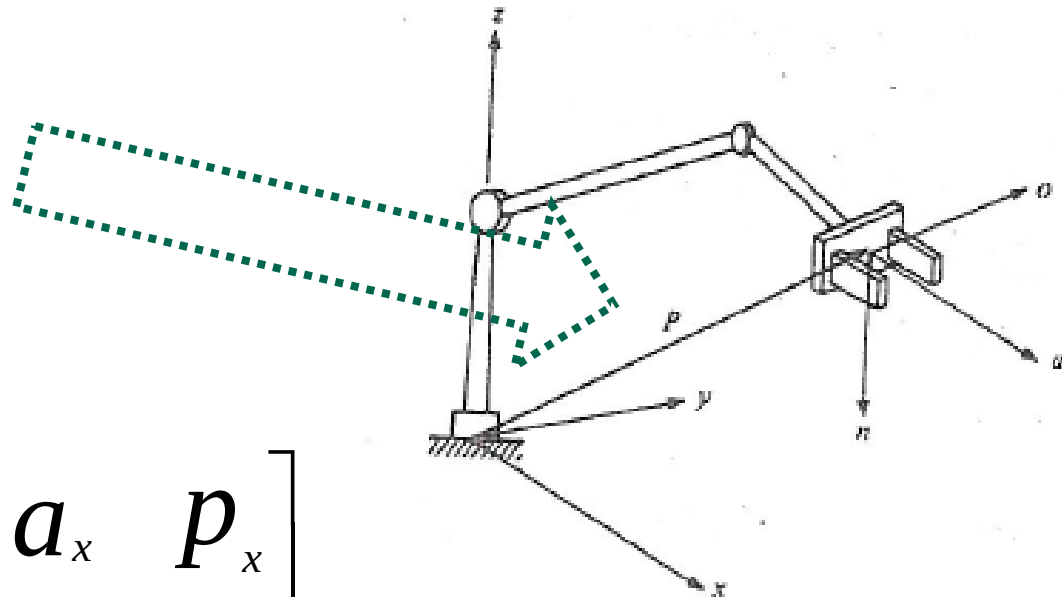
As transformações mostradas anteriormente são da forma:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



4 vetores colunas, os quais podem ser usados para definir a posição e orientação do órgão terminal de um manipulador

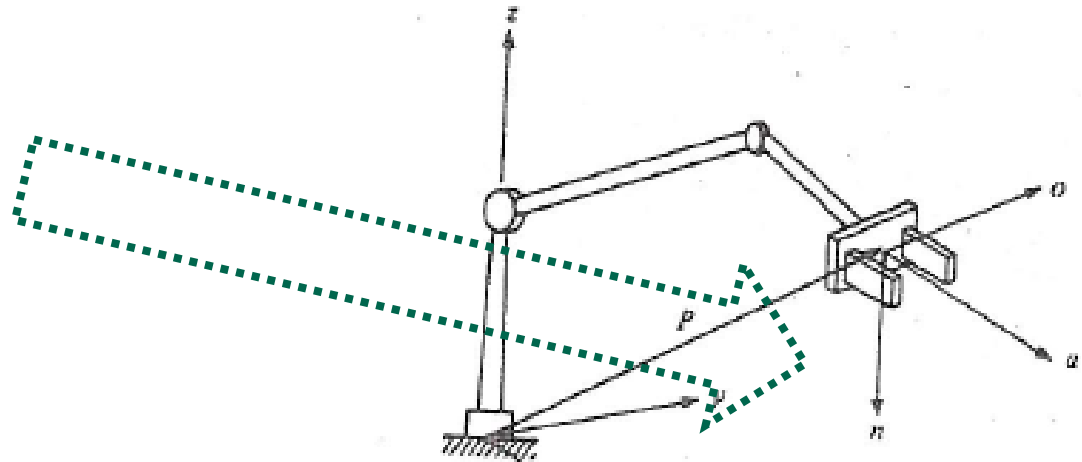
Vetor $\mathbf{p}$ representa a posição do órgão terminal em relação ao sistema de coordenadas da base.



$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os vetores $\mathbf{n}$, $\mathbf{o}$ e $\mathbf{a}$ especificam a orientação do atuador.

Juntos, os três vetores formam um sistema de coordenadas em relação ao sistema de coordenadas da base

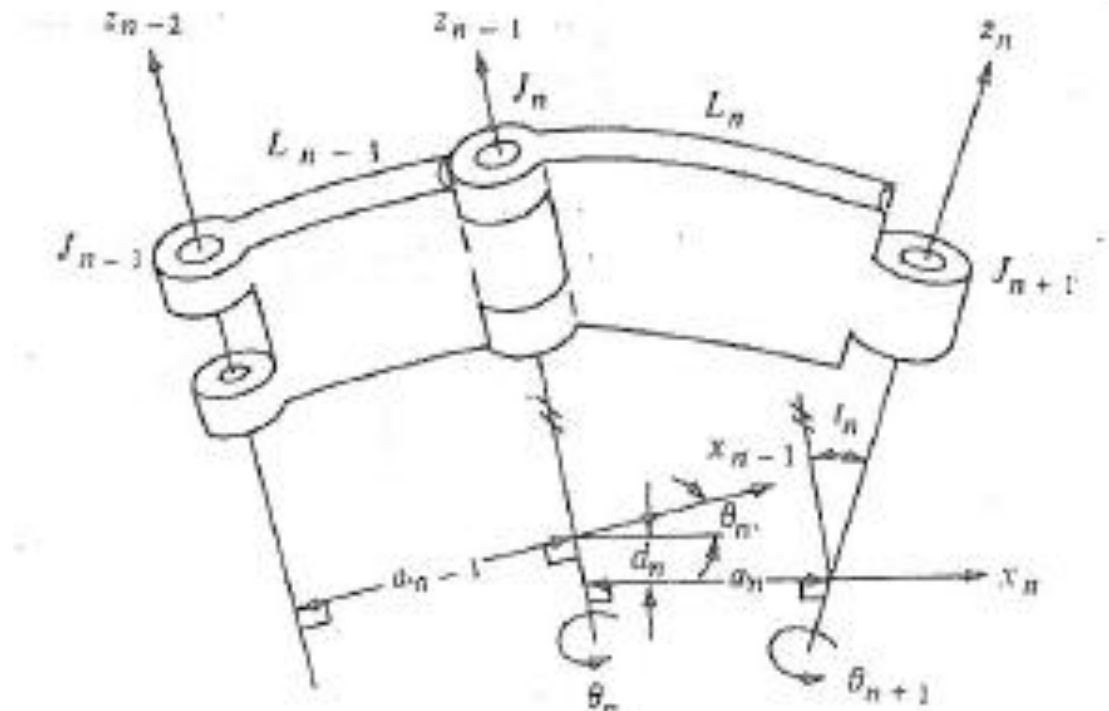


$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

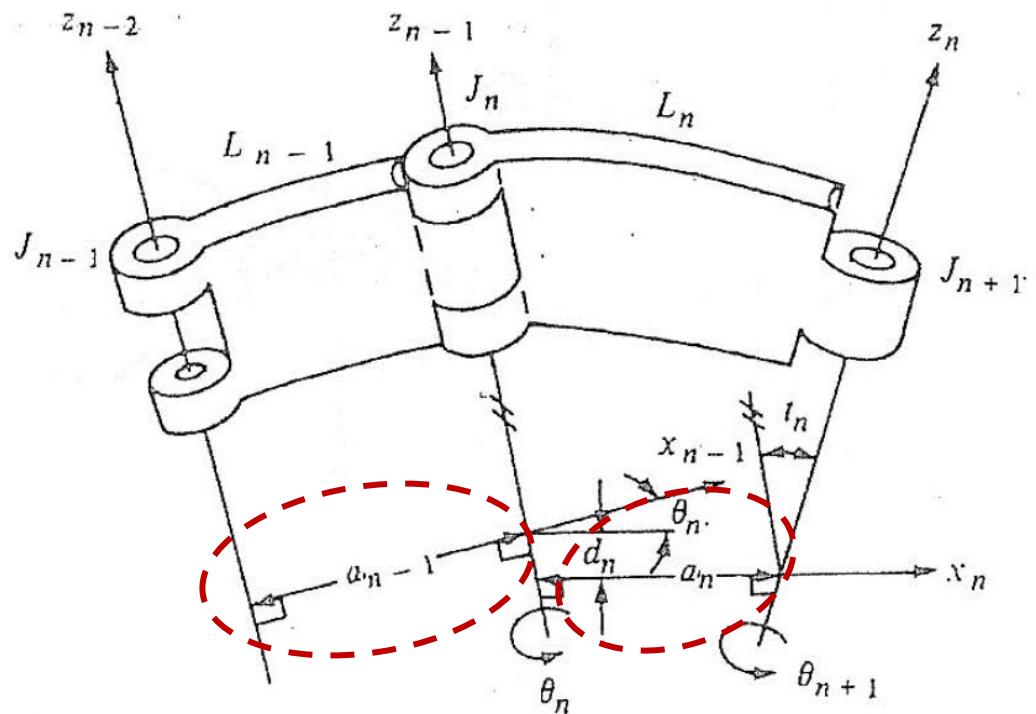
A posição e a orientação do órgão terminal podem ser descritas como o produto de n transformações homogêneas, uma para cada uma das n juntas do manipulador.

De forma similar, a posição de toda e qualquer junta do robô pode ser considerada como o produto de transformações que descrevem as rotações e translações das combinações anteriores junta-elo.

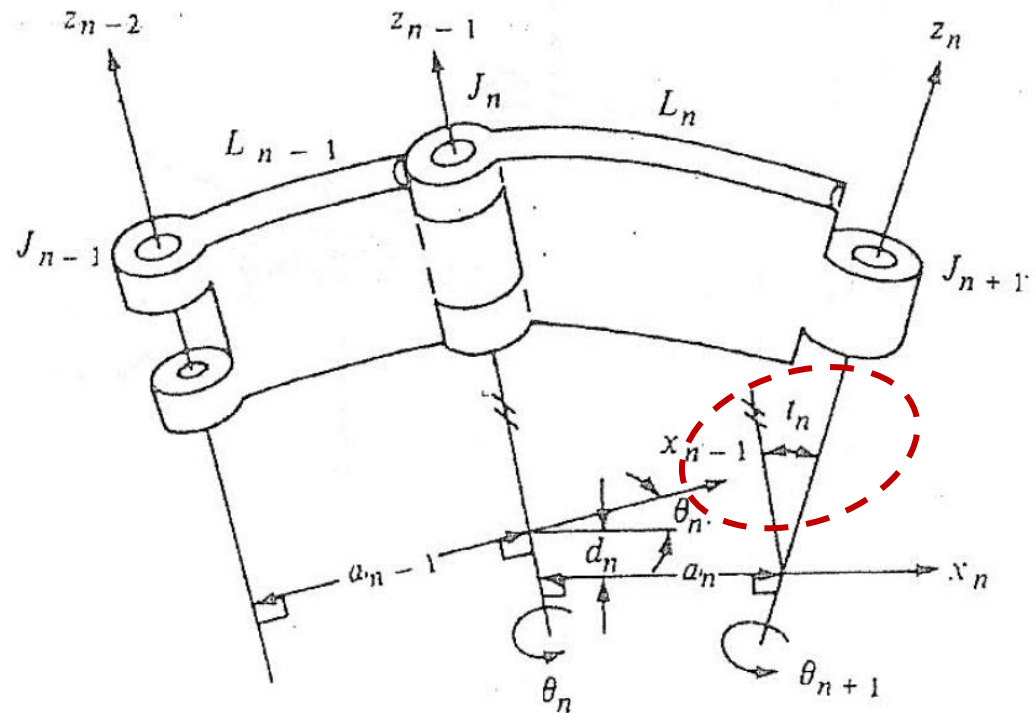
Variáveis afetadas pela combinação junta-elo



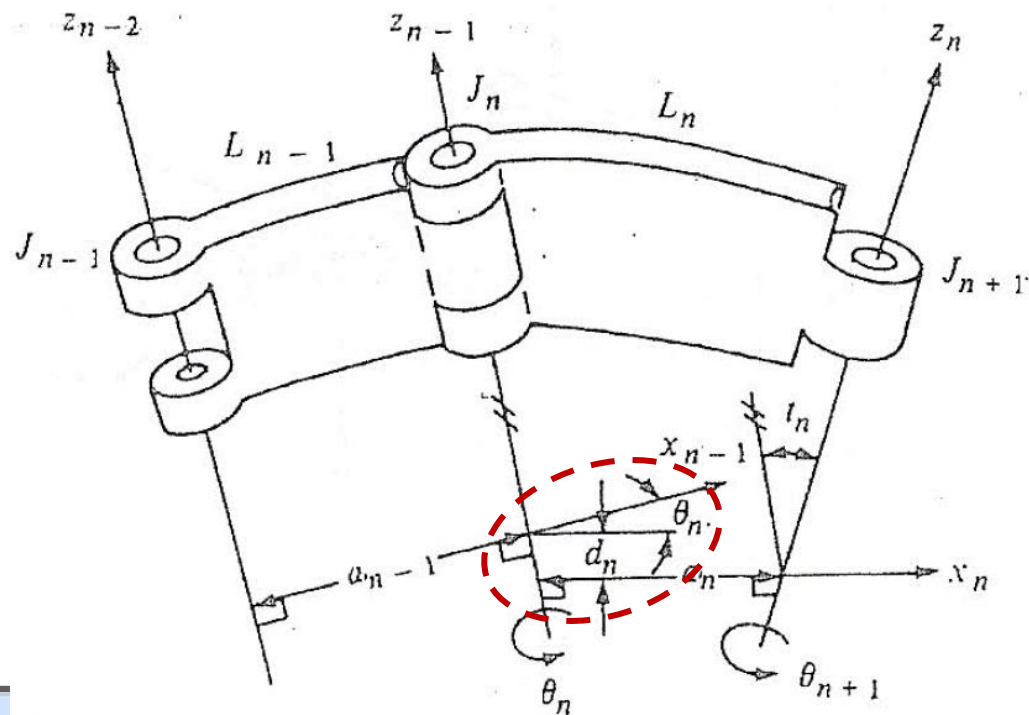
a_n : extensão do elo. Definida como a distância ao longo da linha que é mutuamente perpendicular aos eixos das duas juntas adjacentes.



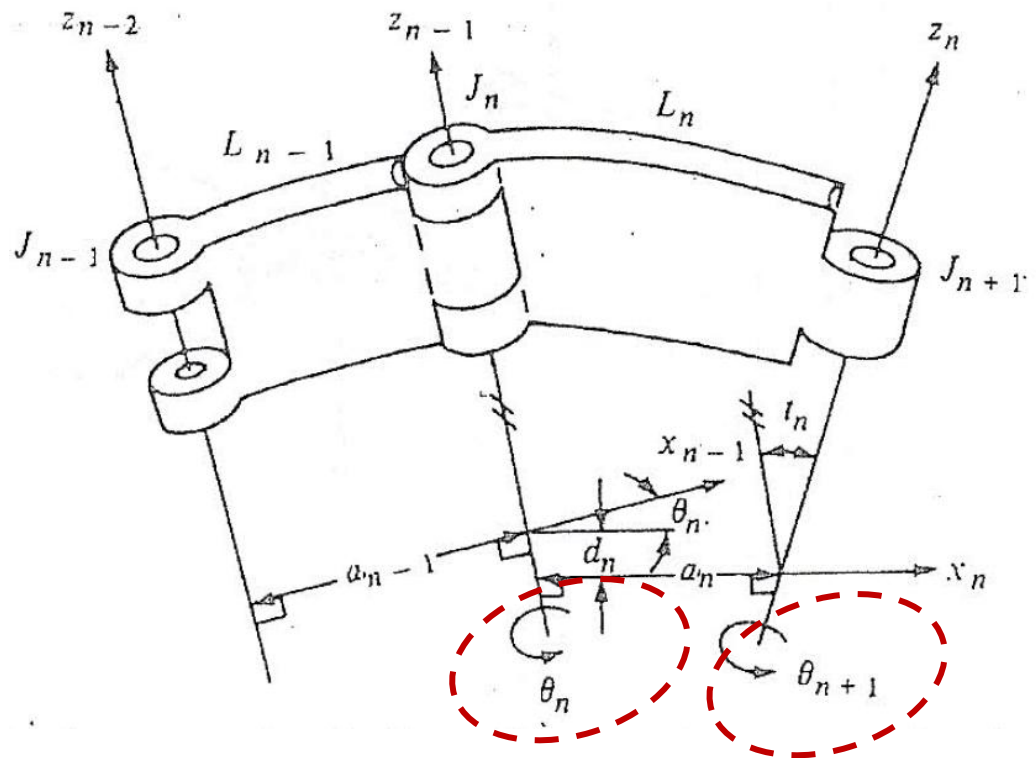
Ângulo t_n : torção entre os eixos das juntas num plano perpendicular a a_n .



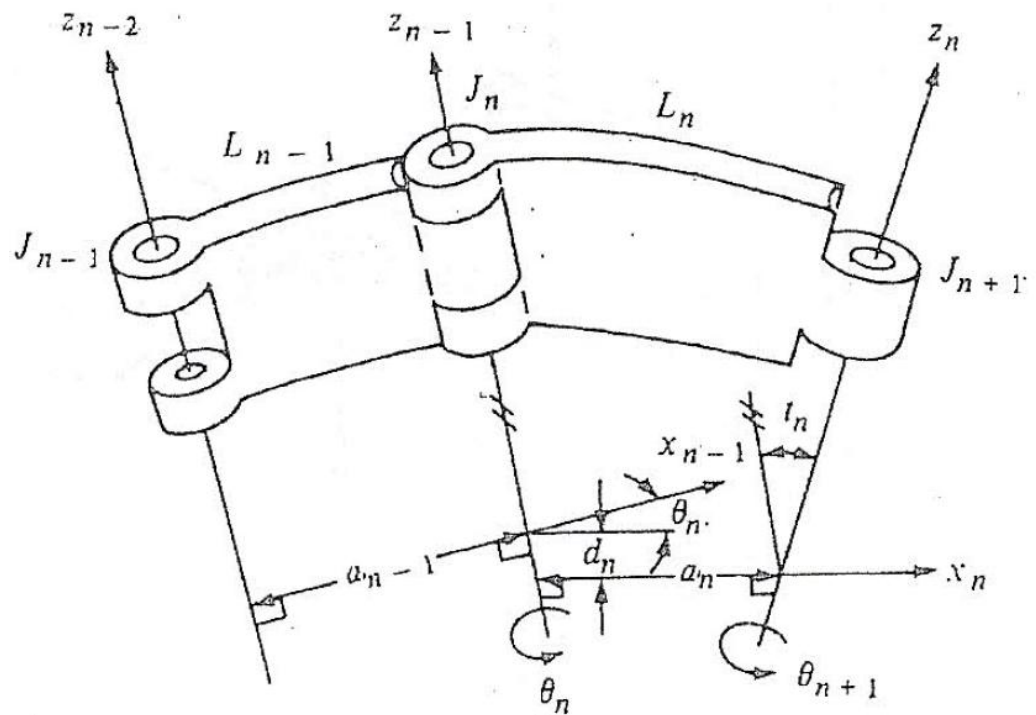
d_n : distância entre a normal a_n e a_{n-1} dos dois elos (denominado deslocamento de junta). Para uma junta prismática, é a variável de junta



Ângulo Θ : ângulo entre os elos, medido como ângulo entre as normais a_n e a_{n-1} e no plano normal ao eixo da junta.



A posição e orientação da junta n são definidas completamente em relação à junta $n-1$ pelos quatro parâmetros a_n, t_n, θ_n, d_n .



Podemos atribuir um sistema de coordenadas para cada elo e estabelecer as relações entre elos subsequentes, usando transformações para cada uma das quatro variáveis.

A origem do sistema de coordenadas para o elo n está embutida na intersecção do eixo, z_n .

Para a junta $n-1$ e a normal comum a_n da junta n para a junta $+ 1$. Ou seja, o sistema de coordenadas está embutido na extremidade do elo na junta sucessiva.

Isto é obtido usando-se:

- Uma rotação do ângulo Θ_n ao redor do eixo z_{n-1} ;
- Uma translação da distância d_n ao longo de z_{n-1} ;
- Uma translação ao longo de x_n por uma extensão a_n ;
- Uma rotação em torno de x_n num ângulo de torção t_n ;

Usando as transformações obtidas anteriormente para rotação e translação, pode-se desenvolver a transformação que relaciona o sistema de coordenadas do elo n com o elo $n-1$.

Exemplo: A transformação homogênea A_2 , descrevendo a posição e a orientação do sistema de coordenadas do segundo elo em relação ao sistema de coordenadas do primeiro elo é:

$$A_n = \text{Rot}(z_1, \theta_2) \text{Trans}(0, 0, d_2) \text{Trans}(a_2, 0, 0) \text{Rot}(x_2, t_2)$$

Em geral essa transformação é denominada matriz A. Na prática, os índices na equação anterior são geralmente suprimidos; e a equação para a matriz A é:

$$A_2 = \text{Rot}(z_1, \theta_2) \text{Trans}(0, 0, d_2) \text{Trans}(a_2, 0, 0) \text{Rot}(x_2, t_2)$$

Para uma junta rotativa, essa transformação reduz-se ao seguinte:

$$A_n = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \cos t & \sin \theta \sin t & a \cos \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \cos t & -\cos \theta \sin t & a \sin \theta \\ 0 & \sin t & \cos t & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para uma junta prismática, o valor de $a = 0$

A descrição da extremidade de um elo em relação ao sistema de coordenadas de referência do manipulador pode ser descrito como o sistema de coordenadas do elo T_n , onde:

$$T_n = A_1 A_2 \dots A_n$$

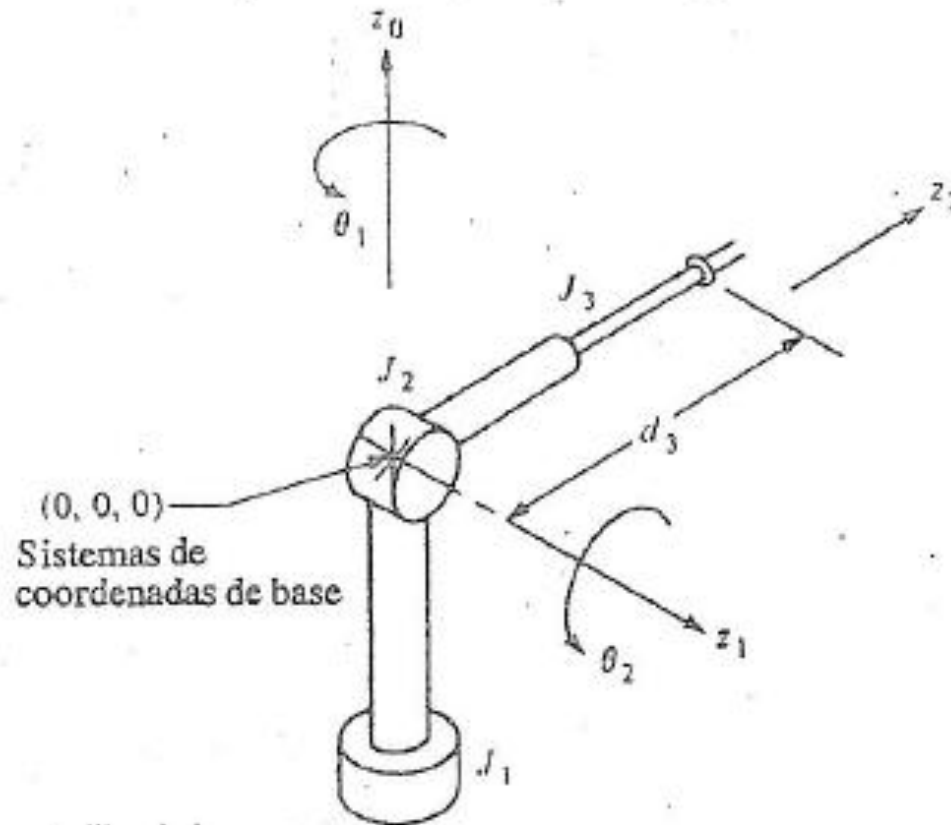
Para calcular a matriz T, deve-se primeiro calcular as n A matrizes.

Para tal, deve-se substituir os valores de a, Θ , d e t na equação 1:

(equação 1)

$$A_n = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \cos t & \sin \theta \sin t & a \cos \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \cos t & -\cos \theta \sin t & a \sin \theta \\ 0 & \sin t & \cos t & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Braço de três juntas



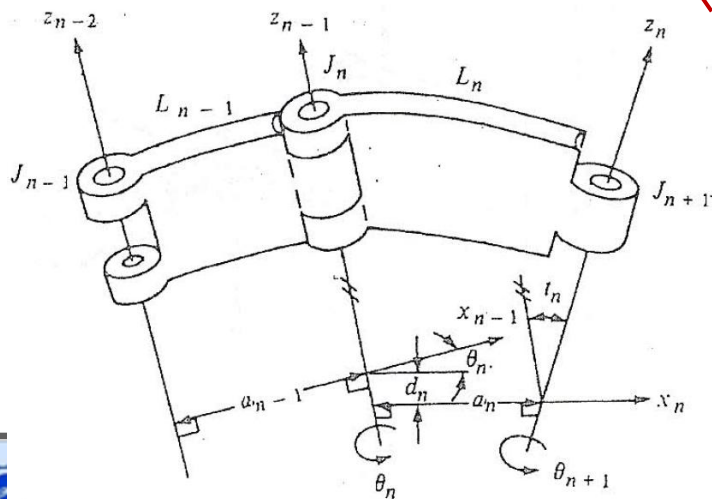
Um manipulador com 3 graus de liberdade.

Exemplo: Braço de três juntas

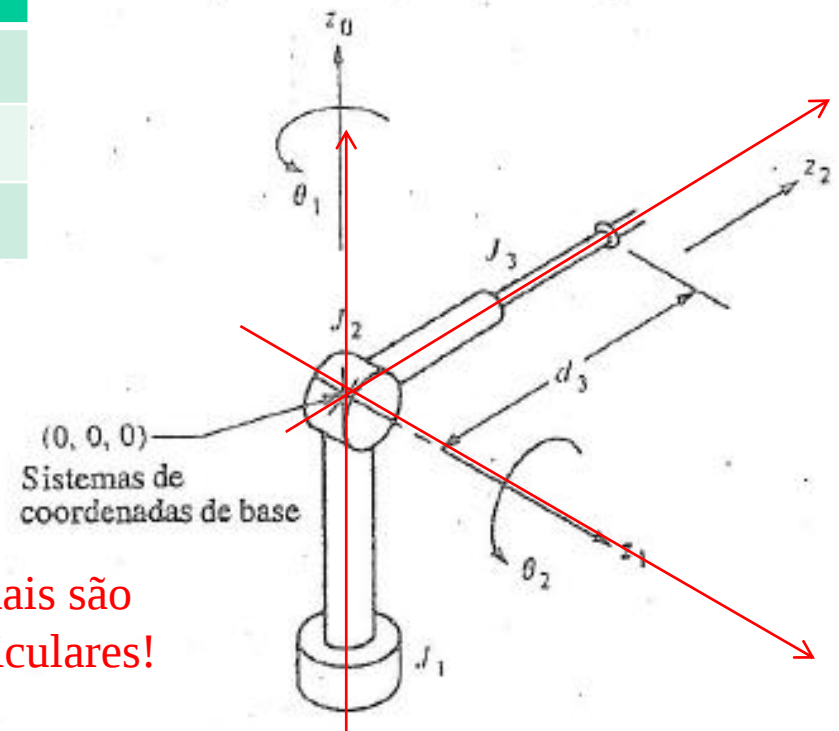
Parâmetros dos elos:

Elo	Θ	t	a	d
1	Θ_1	-90°	0	0
2	Θ_2	90°	0	0
3	Θ_3	0	0	d_3

an: extensão do elo. Definida como a distância ao longo da linha que é mutuamente perpendicular aos eixos das duas juntas adjacentes.



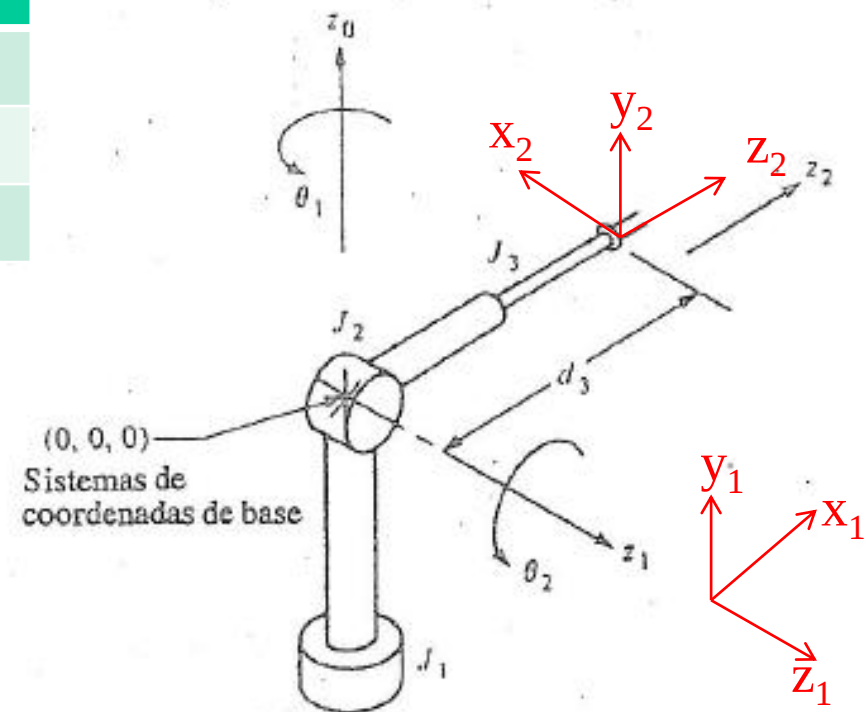
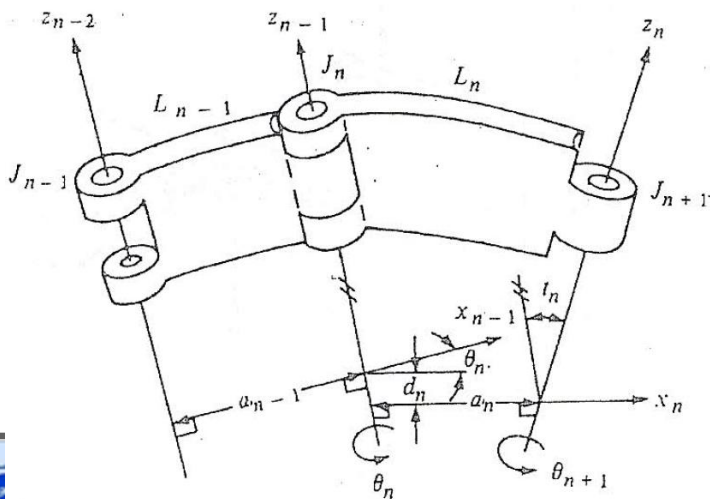
As normais são perpendiculares!



- t_i = ângulo entre z_{i-1} e z_i medido em torno de x_i

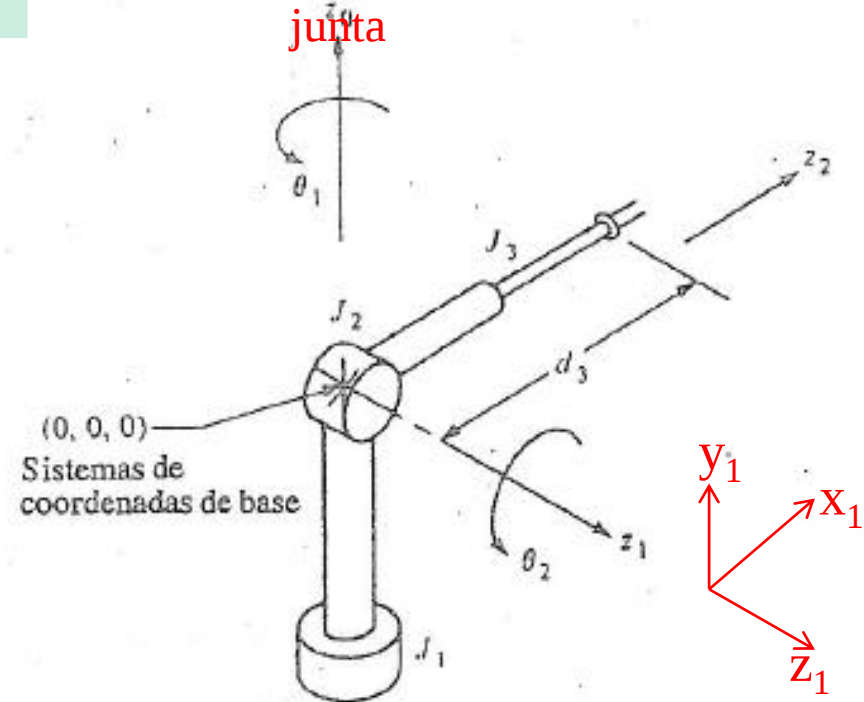
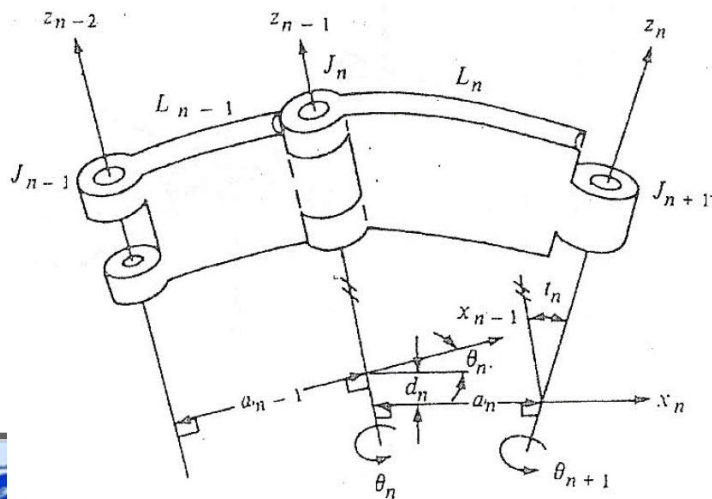
Ângulo t_n : torção entre os eixos das juntas num plano perpendicular a a_n .

Elo	Θ	t	a	d
1	Θ_1	-90°	0	0
2	Θ_2	90°	0	0
3	Θ_3	0	0	d_3



Elo	θ	t	a	d
1	θ_1	-90°	0	0
2	θ_2	90°	0	0
3	θ_3	0	0	d3

dn: distância entre a normal an e an-1 dos dois elos (denominado deslocamento de junta). Para uma junta prismática, é a variável de junta



As matrizes são

(equação 1)

Elo	Θ	t	a	d
1	Θ_1	-90°	0	0
2	Θ_2	90°	0	0
3	Θ_3	0	0	d_3

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \cos t & \sin \theta \sin t & a \cos \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \cos t & -\cos \theta \sin t & a \sin \theta \\ 0 & \sin t & \cos t & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

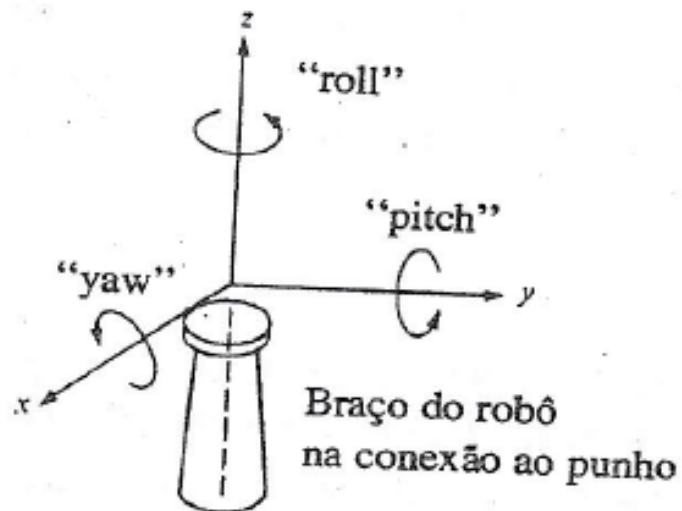
$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De maneira similar, pode-se definir o sistema de coordenadas de um elo n em relação a qualquer outro elo precedente m :

$${}^mT_n = A_{m+1} \cdots A_{n-1}A_n$$



$$\text{"Roll"} = \arctg \frac{n_y}{n_x}$$

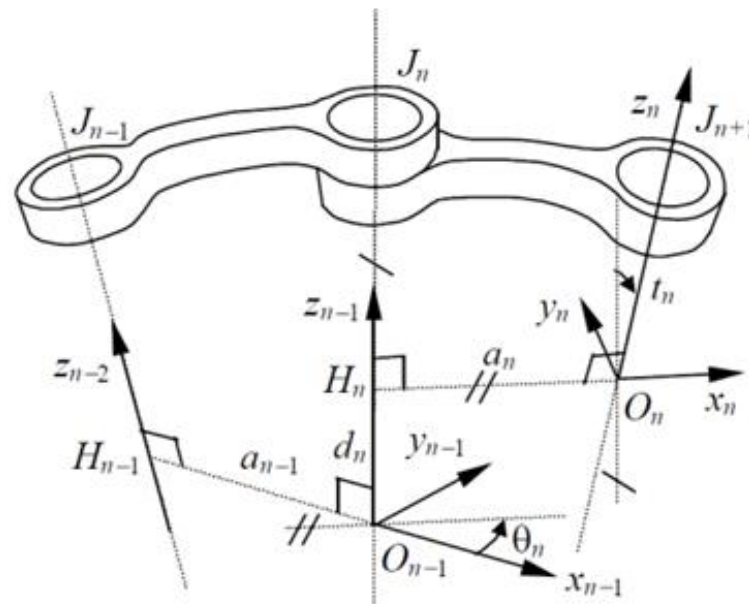
$$\text{"Pitch"} = \arctg \frac{-n_z}{n_x \cos(\text{roll}) + n_y \sin(\text{roll})}$$

$$\text{"Yaw"} = \arctg \frac{a_x \sin(\text{roll}) + a_y \cos(\text{roll})}{o_y \cos(\text{roll}) + o_x \sin(\text{roll})}$$

Notação de Denavit-Hartenberg

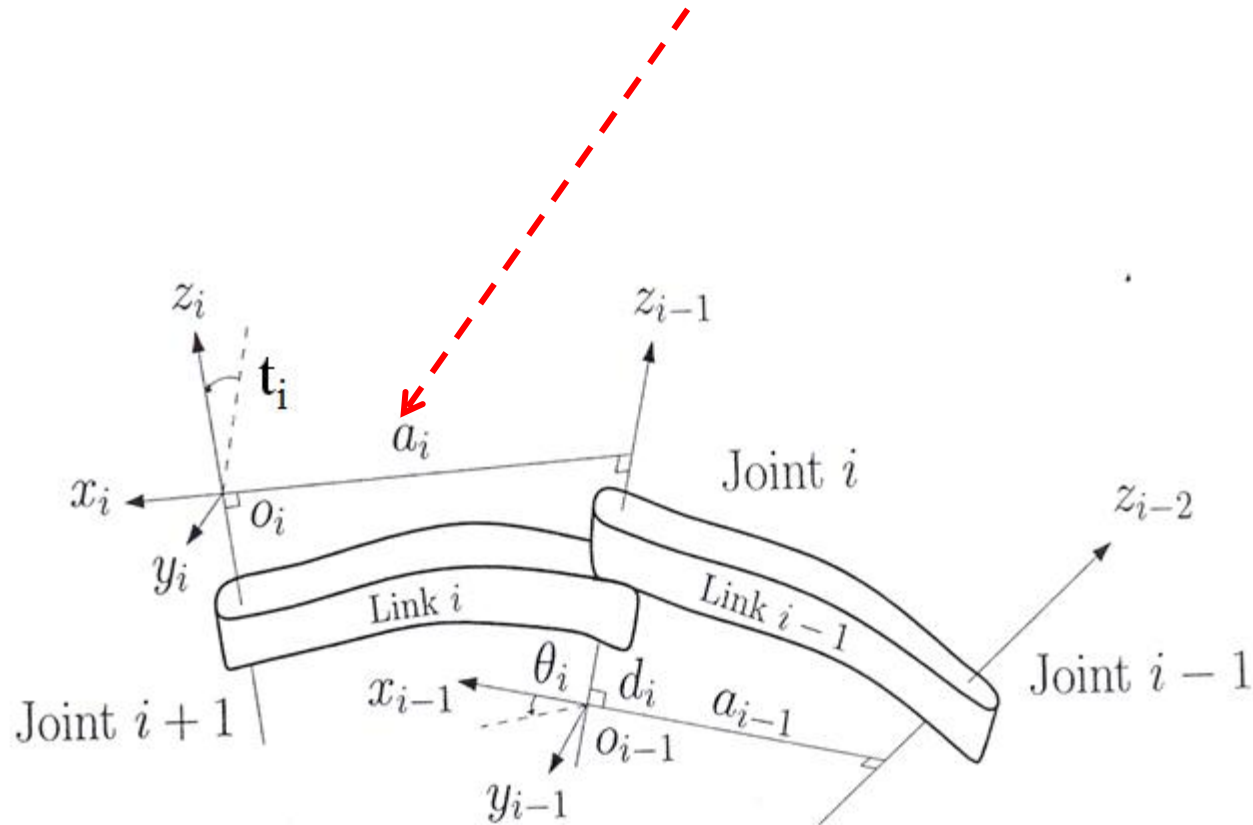
Parâmetros de Denavit-Hartenberg

Permitem obter o conjunto de equações que descrevem a cinemática de uma junta com relação à junta seguinte na cadeia cinemática, e vice-versa;

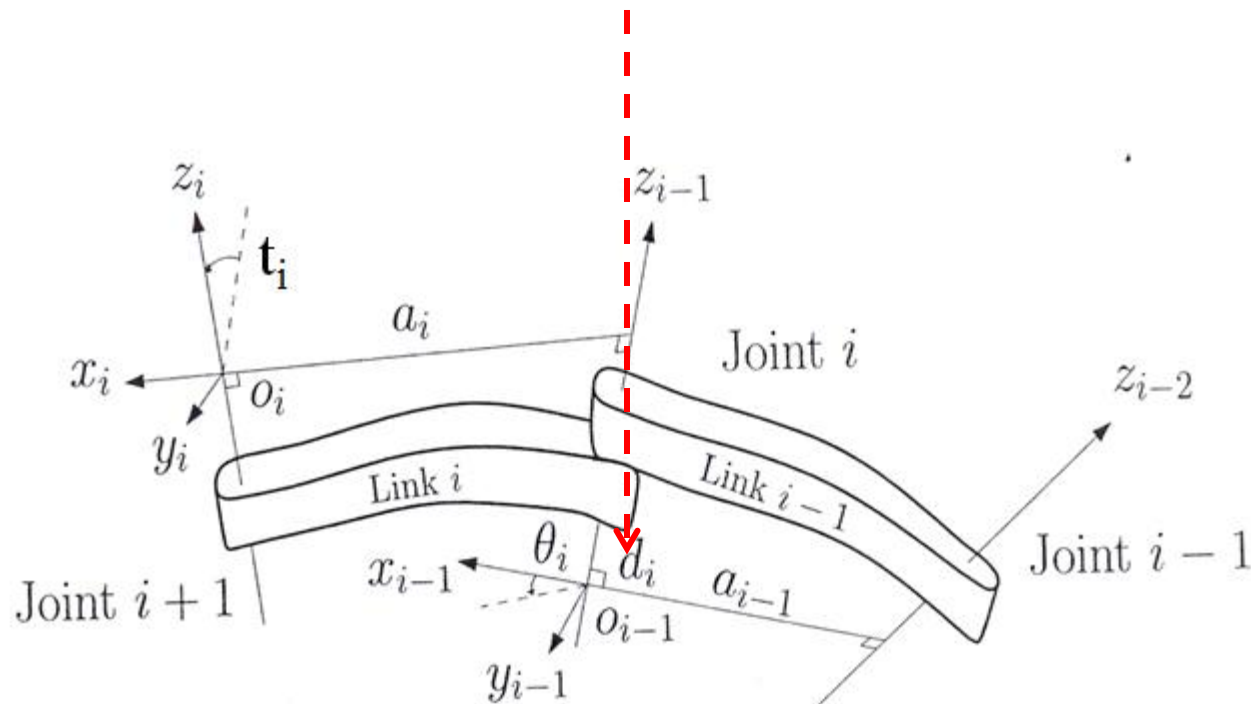


Geometria de juntas rotativas e parâmetros das juntas.

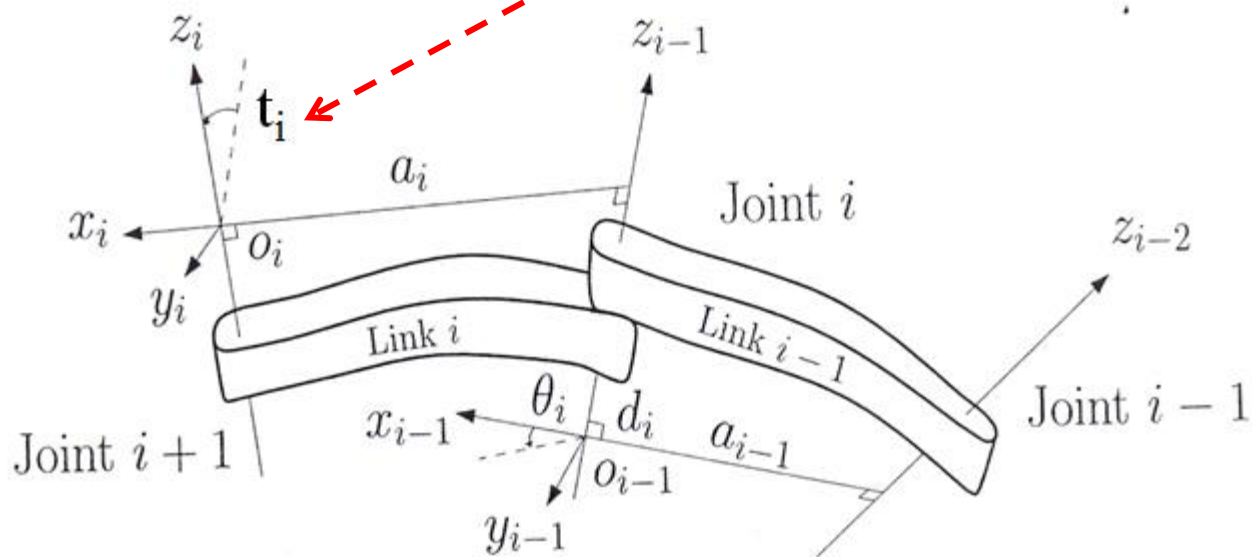
- a_i = distância ao longo de x_i da intersecção dos eixos x_i e z_{i-1} até O_i



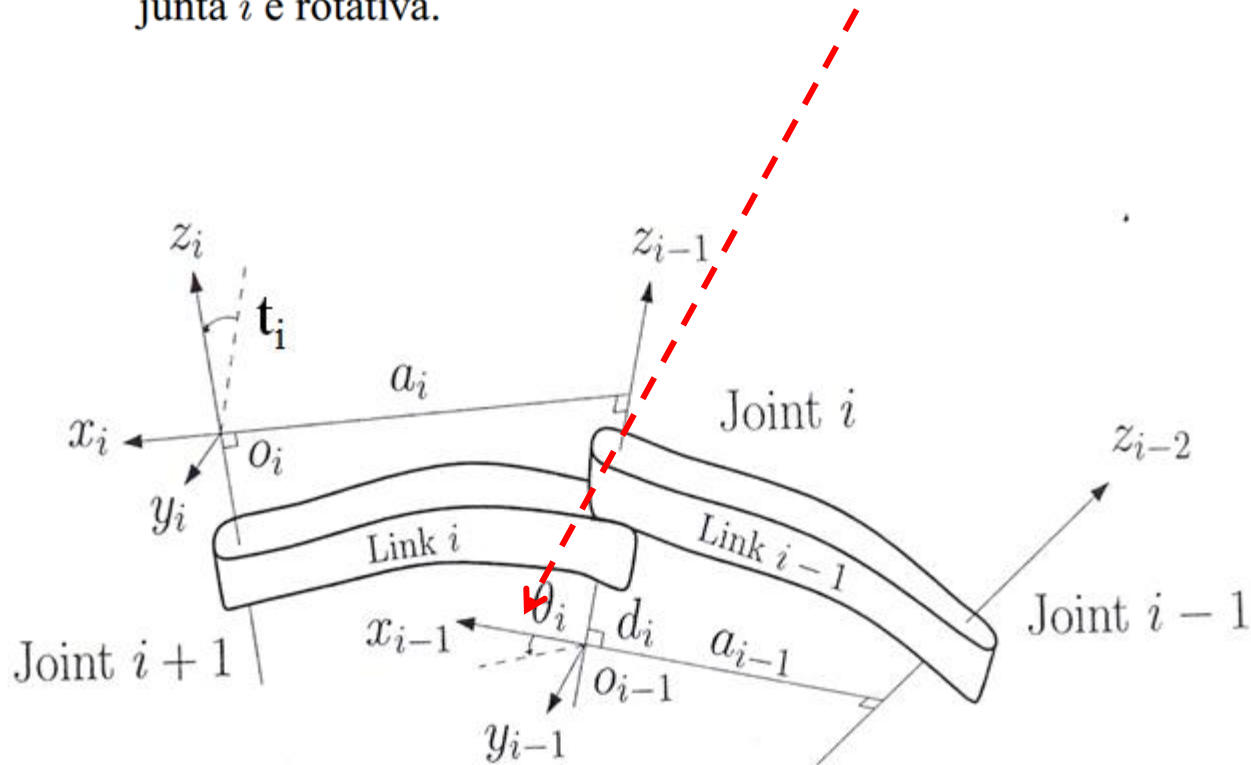
- d_i = distância ao longo z_{i-1} de O_{i-1} até a intersecção dos eixos x_i e z_{i-1} . d_i é variável se a junta i é prismática.



- t_i = ângulo entre z_{i-1} e z_i medido em torno de x_i



- θ_i = o ângulo entre x_{i-1} e x_i medido em torno de z_{i-1} . θ_i é variável se a junta i é rotativa.



Usando as transformações de rotação e translação de um ponto, pode-se descrever a transformação que relaciona o sistema de coordenadas do elo n como elo $n-1$:

$$A_n = \text{Rot}(z_{n-1}, \Theta_n) \text{Transl}(0, 0, d_n) \text{Transl}(a_n, 0, 0) \text{Rot}(x_n, t_n)$$

Para junta rotativa:

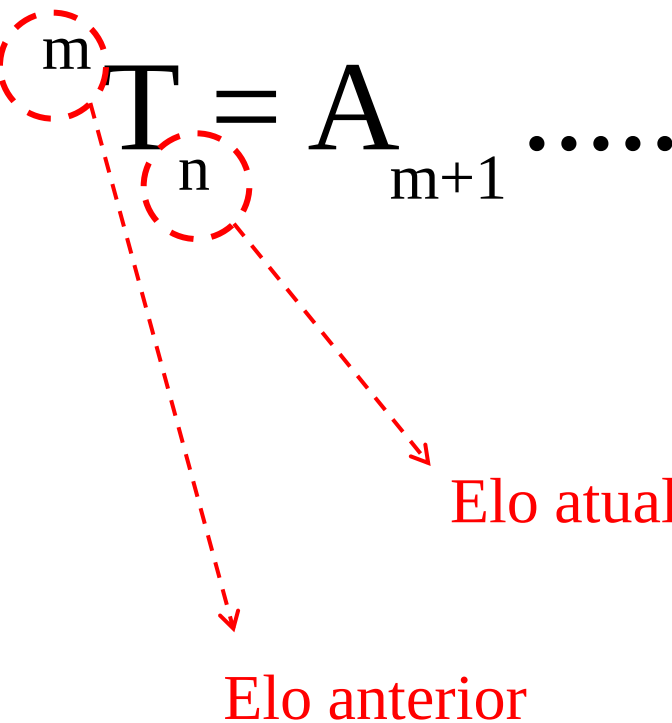
$$A_n = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\text{sen}\Theta \text{cost} & \text{sen}\Theta \text{cost} & a \cos\Theta \\ \text{sen}\Theta & \cos\Theta \text{cost} & -\cos\Theta \text{sent} & a \text{sen}\Theta \\ 0 & \text{sent} & \text{cost} & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para junta prismática:

$$A_n = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \cos t & \sin\theta \cos t & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta \cos t & -\cos\theta \sin t & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A descrição da extremidade de um elo em relação seu predecessor pode ser descrito em função das matrizes A:

$${}^m T_n = A_{m+1} \dots A_{n-1} A_n$$



Elo atual

Elo anterior

Exemplo:

$${}^0 T_1 = A_1$$

$${}^0 T_2 = A_1 A_2$$

$${}^0 T_3 = A_1 A_2 A_3$$

A descrição da extremidade de um elo em relação seu predecessor pode ser descrito em função das matrizes A:

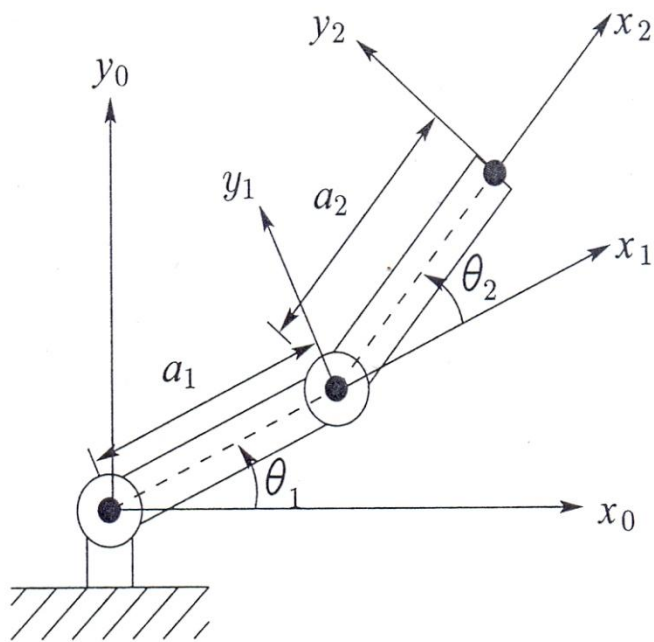
$${}^m T_n = A_{m+1} \dots A_{n-1} A_n$$

Diagram illustrating the relationship between the current link (Elo atual) and the previous link (Elo anterior) in a kinematic chain. The diagram shows a sequence of links represented by dashed lines. The current link is labeled "Elo atual" and the previous link is labeled "Elo anterior". The transformation matrix T_n is shown as a product of matrices $A_{m+1}, \dots, A_{n-1}, A_n$. The index m is circled in red, and the index n is also circled in red. Red dashed arrows point from the circled m to "Elo anterior" and from the circled n to "Elo atual".

Exemplo:

$${}^3 T_6 = A_4 A_5 A_6$$

$$\begin{aligned} {}^0 T_6 &= {}^0 T_3 {}^3 T_6 \\ &= A_1 A_2 A_3 {}^3 T_6 \end{aligned}$$



DH parameters for 2-link planar manipulator.

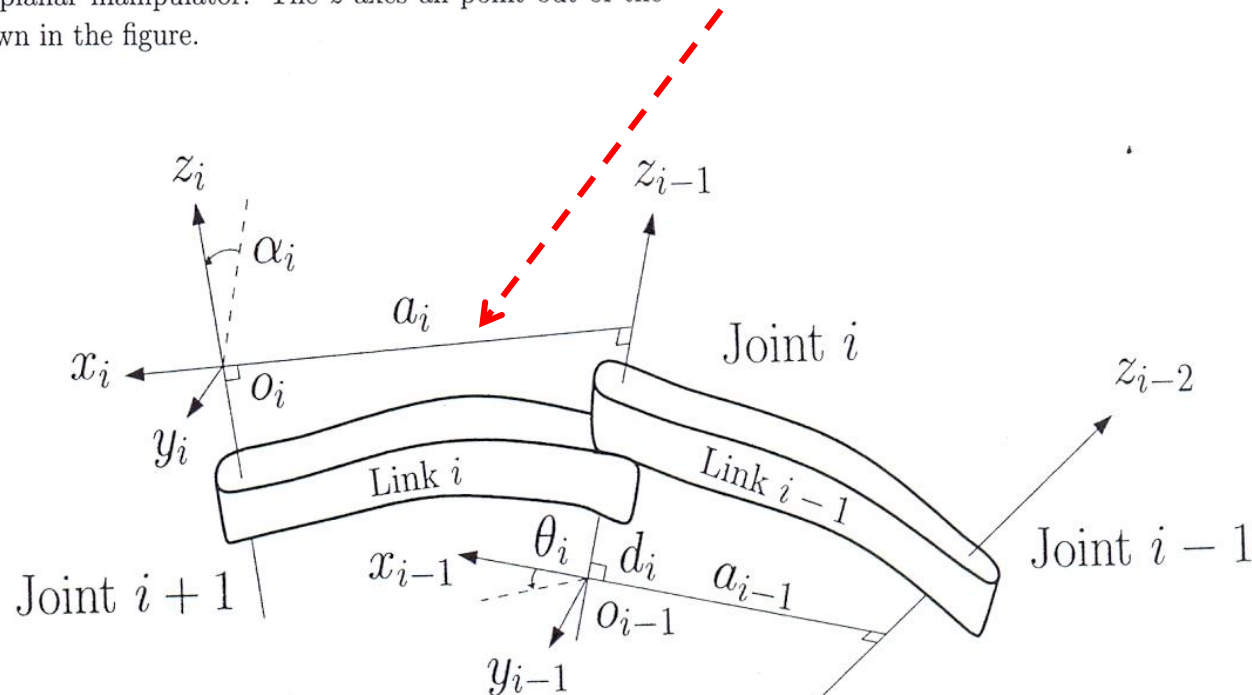
Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1^*
2	a_2	0	0	θ_2^*

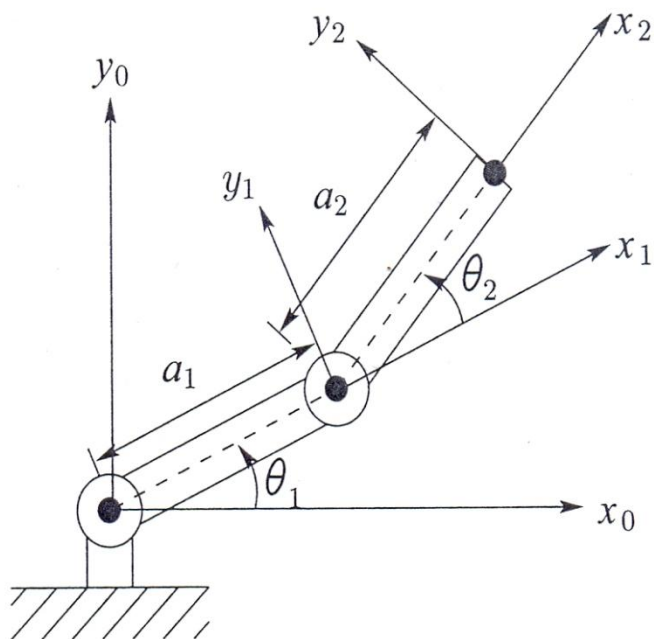
* variable

a_1 = Distância ao longo de x_1 da intersecção dos eixos x_1 e z_0 até O_1

a_2 = Distância ao longo de x_2 da intersecção dos eixos x_2 e z_1 até O_2

Two-link planar manipulator. The z -axes all point out of the page, and are not shown in the figure.





DH parameters for 2-link planar manipulator.

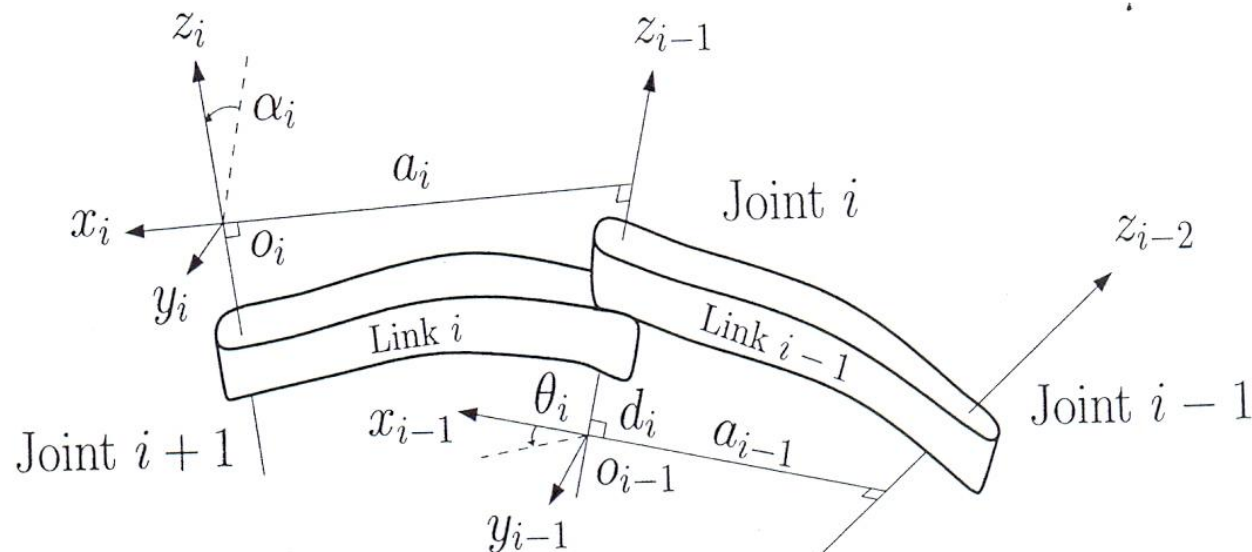
Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1^*
2	a_2	0	0	θ_2^*

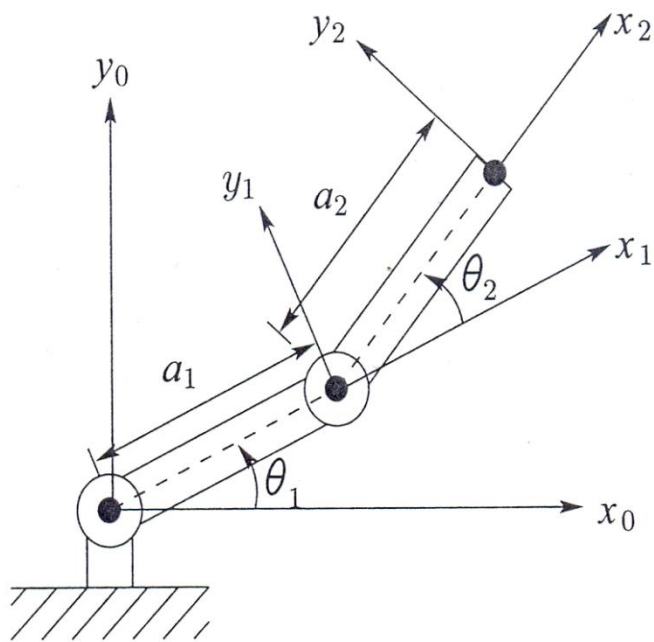
* variable

d_1 = Distância ao longo de z_0 de O_0 até a intersecção dos eixos x_1 e z_0 .

d_2 = Distância ao longo de z_1 de O_1 até a intersecção dos eixos x_2 e z_1 .

Two-link planar manipulator. The z -axes all point out of the page, and are not shown in the figure.





DH parameters for 2-link planar manipulator.

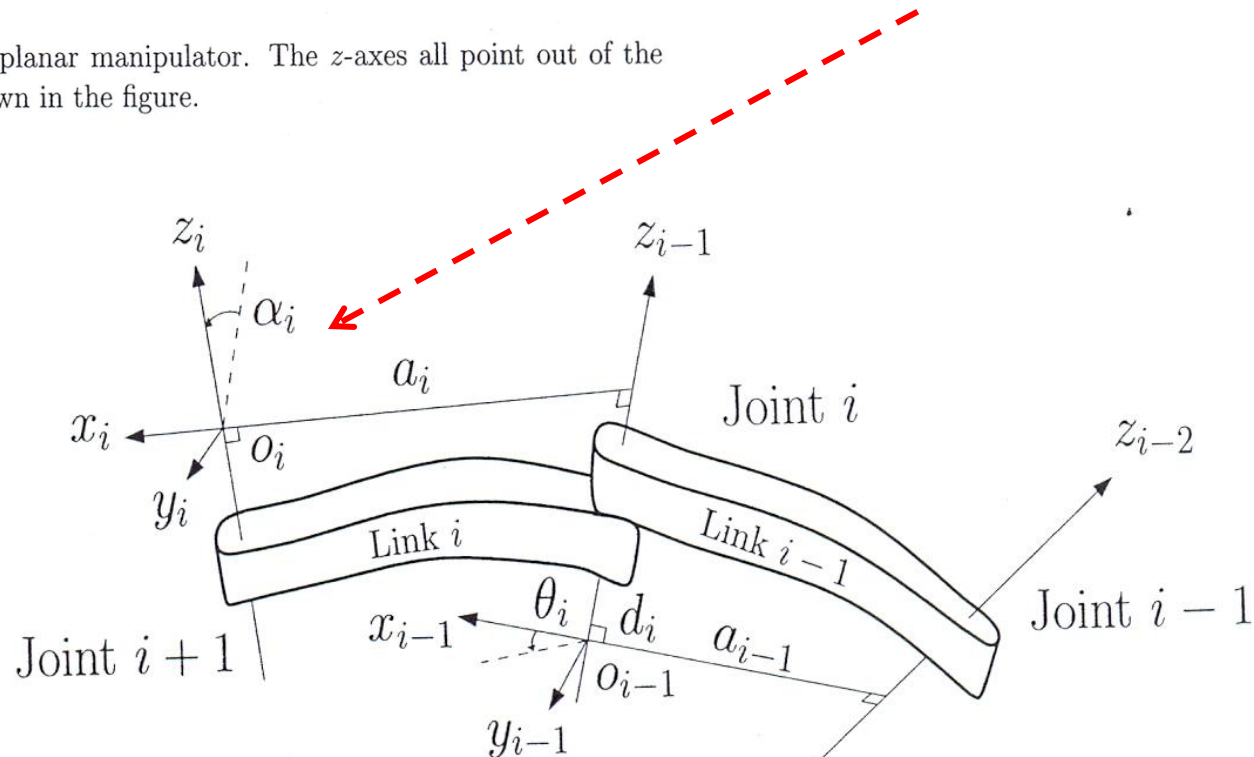
Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1^*
2	a_2	0	0	θ_2^*

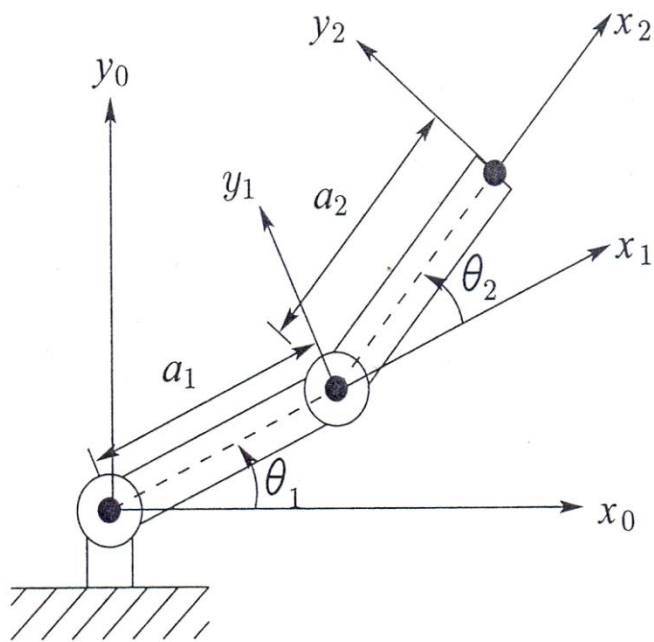
* variable

α_1 = ângulo entre z_0 e z_1 medido em torno de x_1

α_2 = ângulo entre z_1 e z_2 medido em torno de x_2

Two-link planar manipulator. The z -axes all point out of the page, and are not shown in the figure.





DH parameters for 2-link planar manipulator.

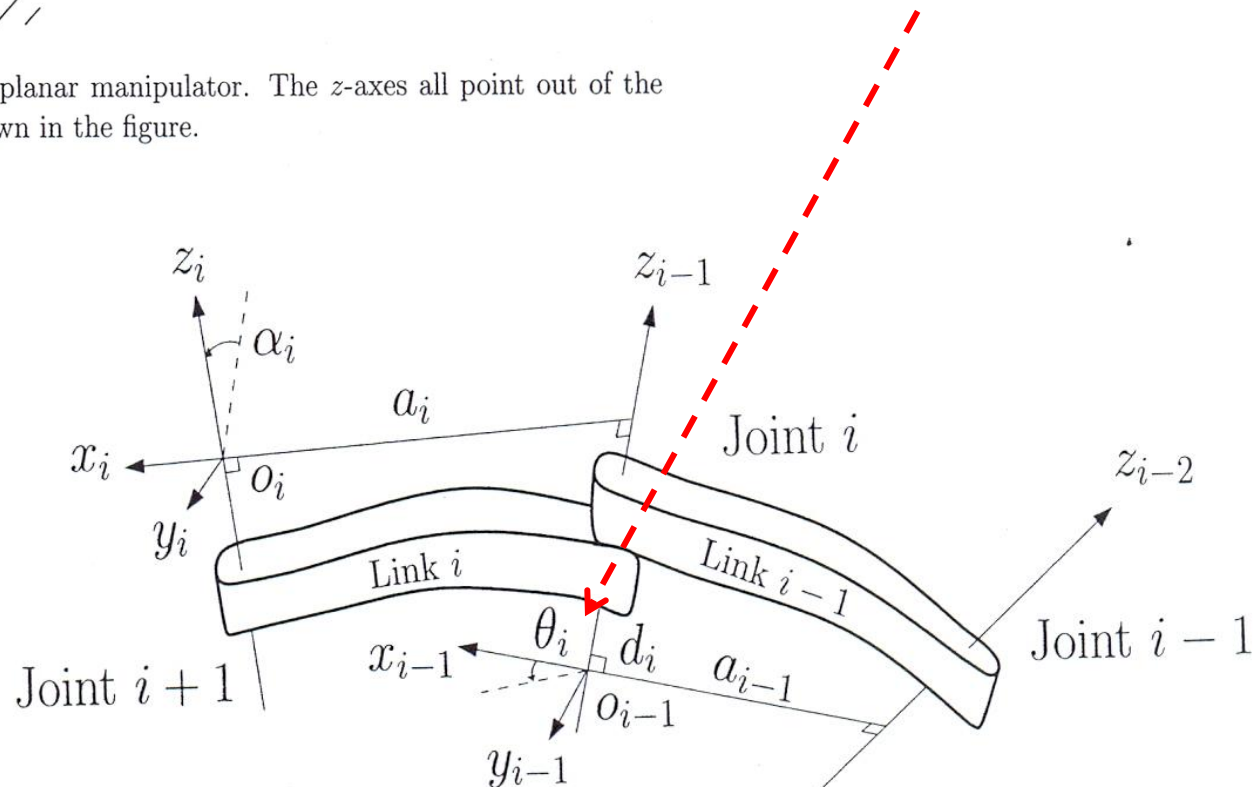
Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1^*
2	a_2	0	0	θ_2^*

* variable

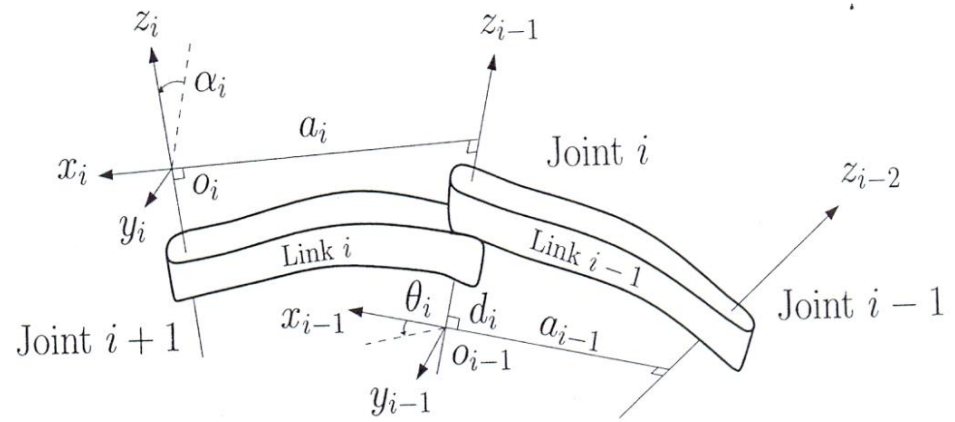
θ_1 = ângulo entre x_0 e x_1 medido em torno de z_0

θ_2 = ângulo entre x_1 e x_2 medido em torno de z_1

Two-link planar manipulator. The z -axes all point out of the page, and are not shown in the figure.



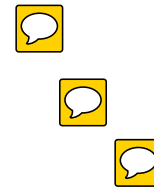
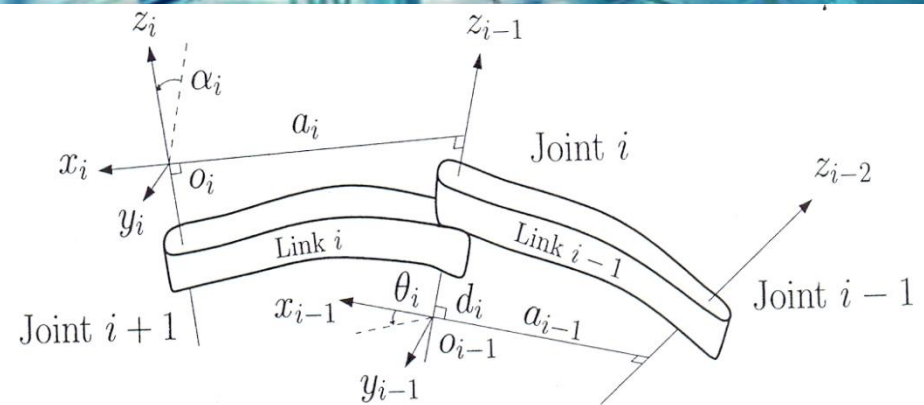
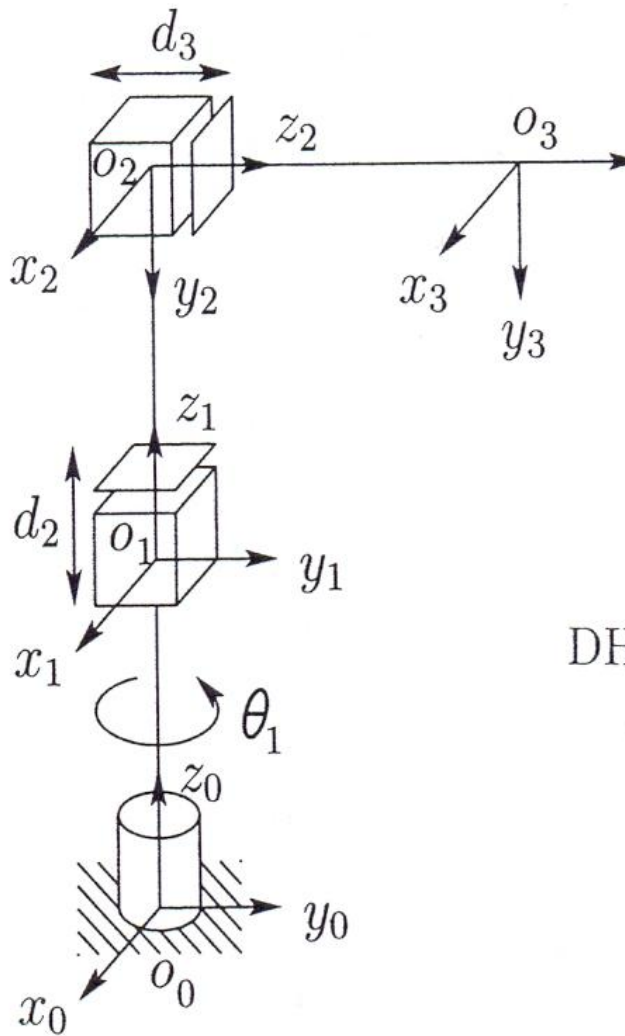
$$\begin{aligned}
 A_i &= \text{Rot}_{z,\theta_i} \text{Trans}_{z,d_i} \text{Trans}_{x,a_i} \text{Rot}_{x,\alpha_i} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_ic_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_is_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^0 = A_1$$

$$T_2^0 = A_1 A_2$$



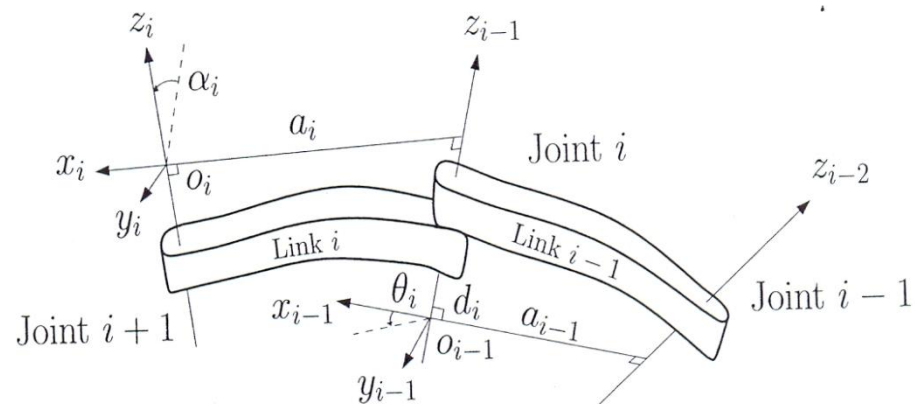
DH parameters for 3-link cylindrical manipulator.

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1^*
2	0	-90	d_2^*	0
3	0	0	d_3^*	0

* variable

Three-link cylindrical manipulator.

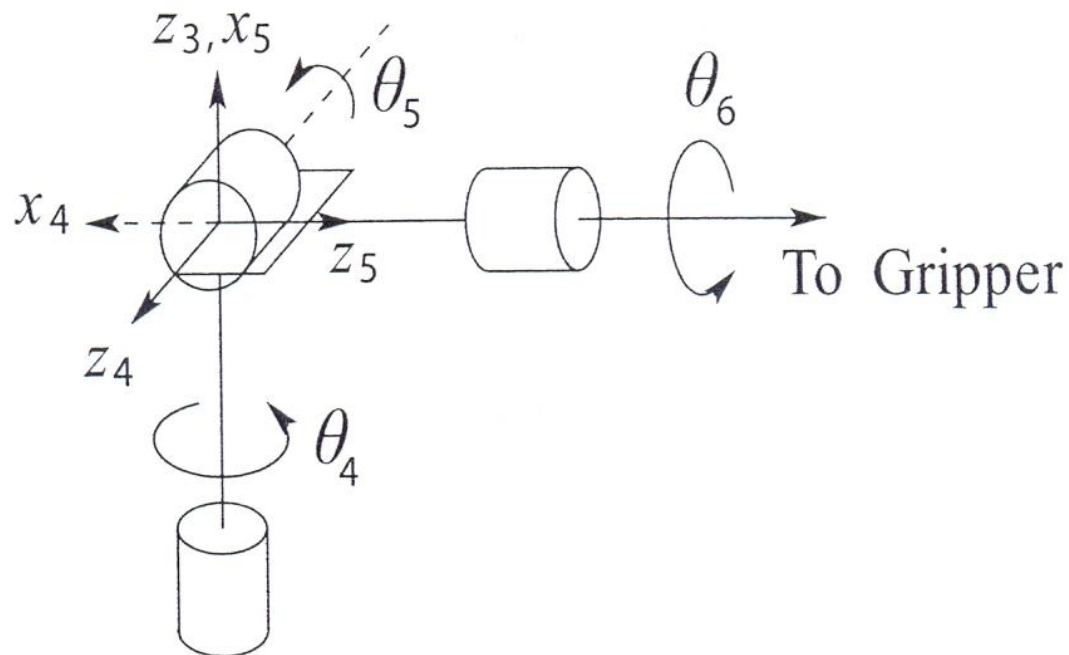
$$\begin{aligned}
 A_i &= \text{Rot}_{z,\theta_i} \text{Trans}_{z,d_i} \text{Trans}_{x,a_i} \text{Rot}_{x,\alpha_i} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_ic_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_is_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_3 \\ s_1 & 0 & c_1 & c_1 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

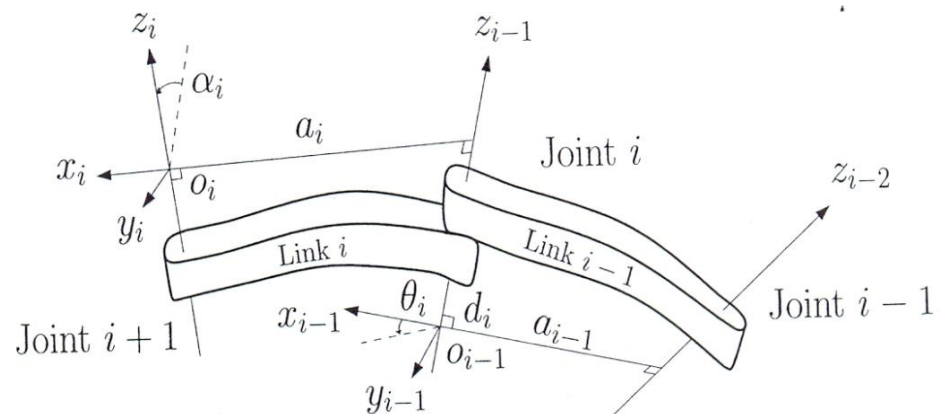


The spherical wrist frame assignment.

DH parameters for spherical wrist.

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
4	0	-90	0	θ_4^*
5	0	90	0	θ_5^*
6	0	0	d_6	θ_6^*

* variable

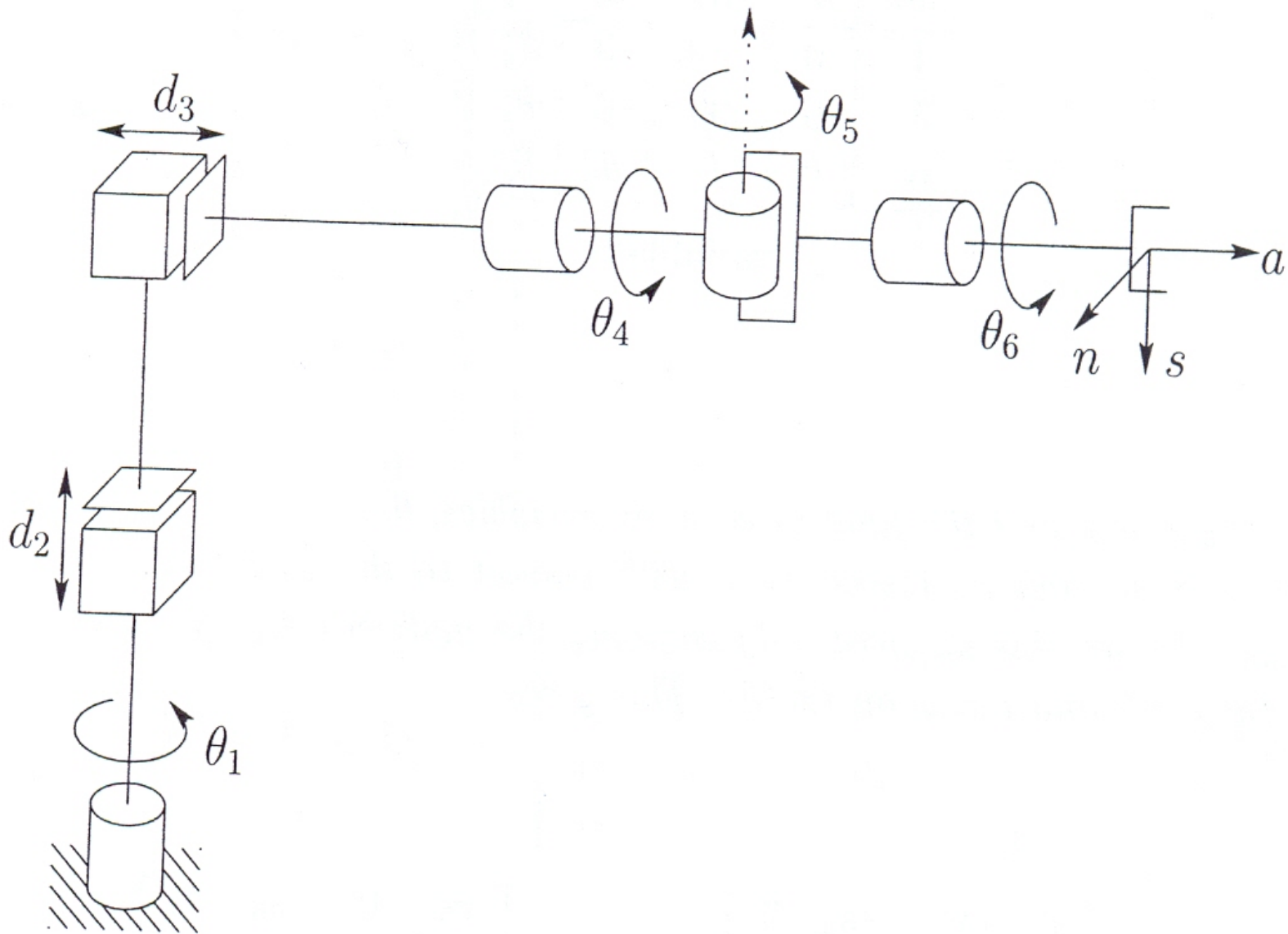


$$\begin{aligned}
 A_i &= \text{Rot}_{z,\theta_i} \text{Trans}_{z,d_i} \text{Trans}_{x,a_i} \text{Rot}_{x,\alpha_i} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_ic_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_is_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_6^3 &= A_4 A_5 A_6 \\ &= \begin{bmatrix} R_6^3 & o_6^3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Cylindrical robot with spherical wrist.

$$r_{11} = c_1 c_4 c_5 c_6 - c_1 s_4 s_6 + s_1 s_5 c_6$$

$$r_{21} = s_1 c_4 c_5 c_6 - s_1 s_4 s_6 - c_1 s_5 c_6$$

$$r_{31} = -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6$$

$$r_{12} = -c_1 c_4 c_5 s_6 - c_1 s_4 c_6 - s_1 s_5 c_6$$

$$r_{22} = -s_1 c_4 c_5 s_6 - s_1 s_4 s_6 + c_1 s_5 c_6$$

$$r_{32} = s_4 c_5 c_6 - c_4 c_6$$

$$r_{13} = c_1 c_4 s_5 - s_1 c_5$$

$$r_{23} = s_1 c_4 s_5 + c_1 c_5$$

$$r_{33} = -s_4 s_5$$

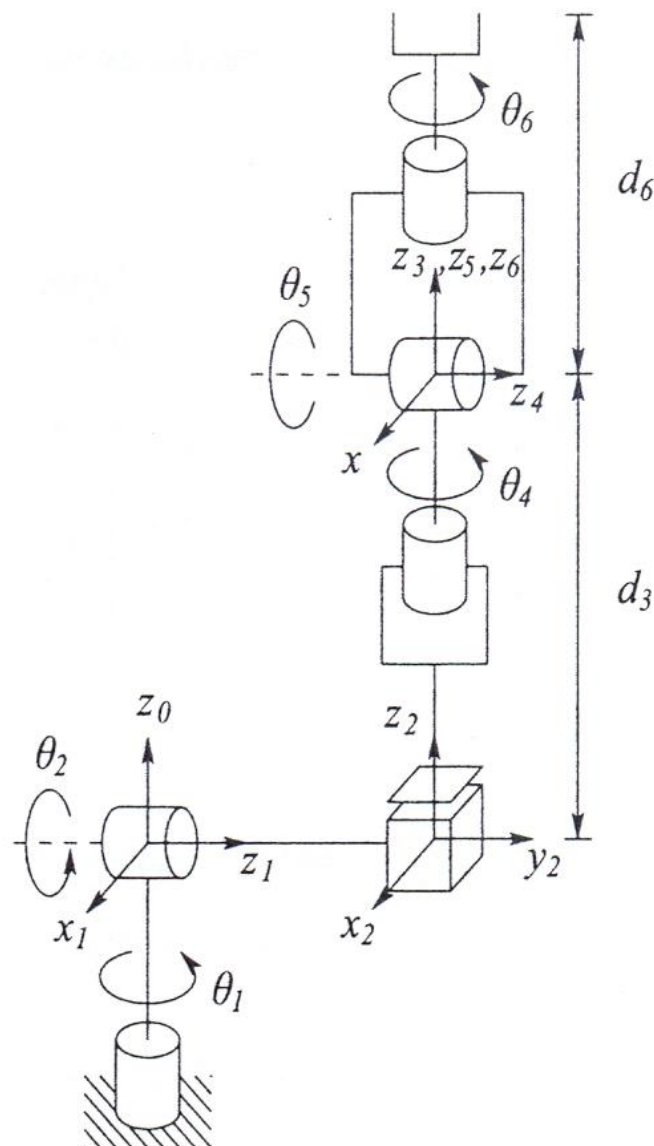
$$d_x = c_1 c_4 s_5 d_6 - s_1 c_5 d_6 - s_1 d_3$$

$$d_y = s_1 c_4 s_5 d_6 + c_1 c_5 d_6 + c_1 d_3$$

$$d_z = -s_4 s_5 d_6 + d_1 + d_2$$

$$T_6^0 = T_3^0 T_6^3$$

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



DH coordinate frame assignment for the Stanford manipulator.

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DH parameters for the Stanford manipulator.



Link	d_i	a_i	α_i	θ_i
1	0	0	-90	θ_1^*
2	d_2	0	$+90$	θ_2^*
3	d_3^*	0	0	0
4	0	0	-90	θ_4^*
5	0	0	$+90$	θ_5^*
6	d_6	0	0	θ_6^*

* joint variable

T_6^0 is then given as

$$T_6^0 = A_1 \cdots A_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_{11} = c_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] - d_2(s_4c_5c_6 + c_4s_6)$$

$$r_{21} = s_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6)$$

$$r_{31} = -s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5c_6$$

$$r_{12} = c_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] - s_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6)$$

$$r_{22} = -s_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] + c_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6)$$

$$r_{32} = s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6$$

$$r_{13} = c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5$$

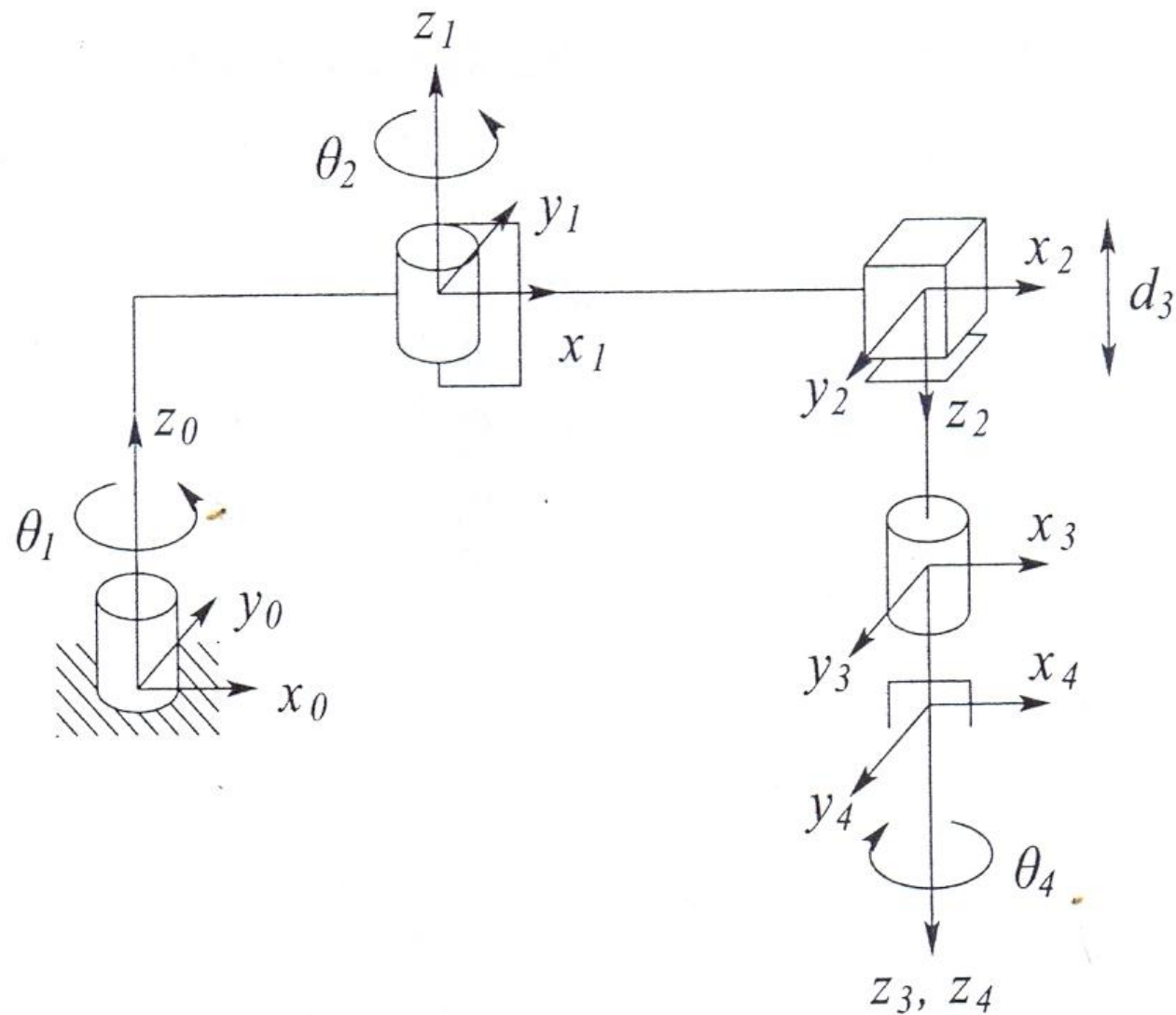
$$r_{23} = s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5$$

$$r_{33} = -s_2c_4s_5 + c_2c_5$$

$$d_x = c_1s_2d_3 - s_1d_2 + d_6(c_1c_2c_4s_5 + c_1c_5s_2 - s_1s_4s_5)$$

$$d_y = s_1s_2d_3 + c_1d_2 + d_6(c_1s_4s_5 + c_2c_4s_1s_5 + c_5s_1s_2)$$

$$d_z = c_2d_3 + d_6(c_2c_5 - c_4s_2s_5)$$



DH coordinate frame assignment for the SCARA manipulator.

DH parameters for the SCARA manipulator.

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1^*
2	a_2	180	0	θ_2^*
3	0	0	d_3^*	0
4	0	0	d_4	θ_4^*

* joint variable

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

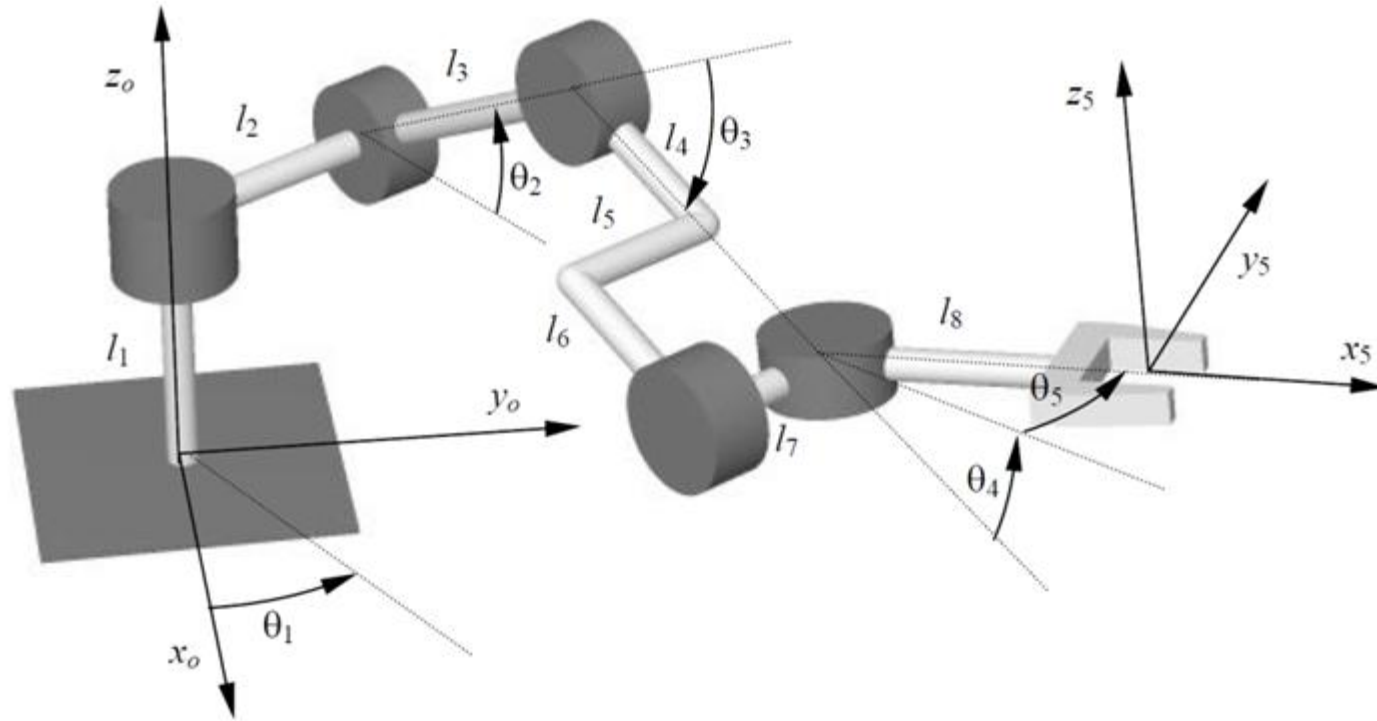
$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & -c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

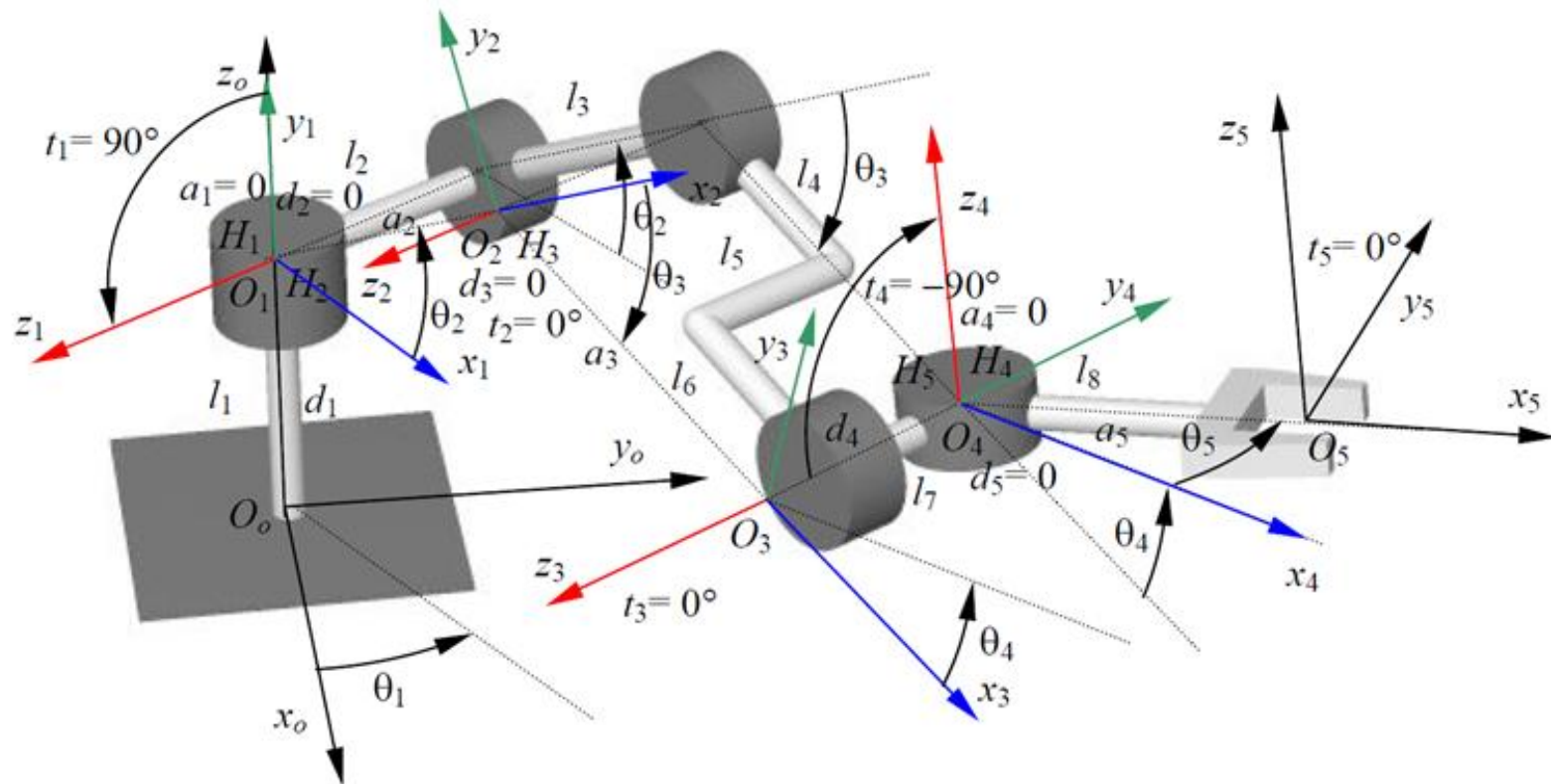
$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The forward kinematic equations are therefore given by

$$\begin{aligned} T_4^0 &= A_1 \cdots A_4 \\ &= \begin{bmatrix} c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & -c_{12}s_4 + s_{12}c_4 & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & -s_{12}s_4 - c_{12}c_4 & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Manipulador robótico esquemático para obtenção dos parâmetros de Denavit-Hartenberg.



Sistemas de coordenadas intermediários e parâmetros de Denavit-Hartenberg do manipulador

Tabela de parâmetros de Denavit-Hartenberg

Elo	ângulo de rotação θ_n	comprimento do elo a_n	deslocamento da junta d_n	ângulo de torção t_n	variável da junta
1	θ_1	0	l_1	90°	θ_1
2	θ_2	l_3	0	0	θ_2
3	θ_3	$l_4 + l_6$	0	0	θ_3
4	θ_4	0	$-l_2$	-90°	θ_4
5	θ_5	l_8	0	0	θ_5