Mecânica Quântica — 7600022

Quarta Lista — preparação para a prova do dia 25/4/2017

1. Uma partícula em um poço infinito, com potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a) \\ \infty & (x < 0 \text{ ou } x > a) \end{cases},$$

   tem a função de onda no instante $t = 0$

$$\psi(x, 0) = Ax(a - x),$$

   onde $A = \sqrt{30/a^5}$ é a constante de normalização.

   (a) Mostre $\psi(x, 0)$ em gráfico. Com que autofunção do poço mais se parece $\psi(x, 0)$?

   (b) A partir da comparação no item anterior, faça uma estimativa do valor médio esperado do Hamiltoniano H em $t = 0$.

   (c) Calcule $\langle H \rangle$ em $t = 0$. Compare com a estimativa do item anterior.

   (d) Calcule $\langle p \rangle$ em $t = 0$.

2. O operador a foi definido em classe:

$$a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} P.$$

   Suponha que $|\varphi_n\rangle$ é auto-estado do Hamiltoniano do oscilador harmônico com autovalor E_n.

   (a) Mostre que $a^\dagger|\varphi_n\rangle$ também é autovetor e calcule o seu autovalor.

   (b) O estado $|\psi\rangle \equiv (a + a^\dagger)|\varphi_n\rangle$ é auto-estado? Justifique sua resposta.

3. Mostre que $a^\dagger a|\varphi_n\rangle$ também é autovetor e calcule o seu autovalor.

4. Define-se o operador

$$\mathcal{N} = a^\dagger a.$$

   (a) Mostre, a partir da definição de operador Hermitiano, que $\mathcal{N}$ é Hermitiano. Você vai precisar comparar $\langle \varphi_n|\mathcal{N}|\varphi_m\rangle$ com $\langle \varphi_m|\mathcal{N}|\varphi_n\rangle$, onde m e n são dois números inteiros quaisquer (que podem ou não ser iguais).

   (b) Mostre que $\mathcal{N} + 1 = aa^\dagger$. (Lembre que $[a, a^\dagger] = 1$.)

   (c) Qual é o valor médio esperado de $\mathcal{N}$ no auto-estado $|\varphi_n\rangle$, que tem energia E_n? (Para responder, relacione o Hamiltoniano H com o operador $\mathcal{N}$).

   (d) Qual é a norma do estado $a|\varphi_n\rangle$?

   (e) Qual é a norma do estado $a^\dagger|\varphi_n\rangle$? (Note que $aa^\dagger = \mathcal{N} + 1$.)

   (f) Calcule o valor médio esperado de $\mathcal{N}$ no estado $|\varphi_0\rangle$, que tem energia $\hbar\omega/2$.

   (g) Calcule o valor médio esperado de $\mathcal{N}$ no estado $|\varphi_1\rangle$, que tem energia $3\hbar\omega/2$.

   (h) Compare os resultados do itens (c) com o resultado do problema 3 para $E_n = \hbar\omega/2$.

   (i) Compare os resultados do itens (d) com o resultado do problema 3 para $E_n = 3\hbar\omega/2$.

5. Qual é o valor médio esperado de a no auto-estado $|\varphi_n\rangle$, que tem energia E_n?

6. Qual é o valor médio esperado de $a^\dagger$ no auto-estado $|\varphi_n\rangle$, que tem energia E_n?

7. Seguindo o procedimento no problema 4(a), mostre que a não é Hermitiano.

8. Parta da igualdade $a|\varphi_0\rangle = 0$ e da definição do operador a, troque X por x, troque P por $(\hbar/i)d/dx$ e troque $|\varphi_0\rangle$ pela função de onda $\varphi_0(x)$ (que você ainda desconhece). O resultado será uma equação diferencial para $\varphi_0(x)$.

   (a) Resolva essa equação diferencial para achar φ_0 a menos de uma constante de normalização.

   (b) Mostre que $\varphi_0(x)$ é solução da Equação de Schrödinger independente do tempo (para o Hamiltoniano do oscilador harmônico) e encontre a energia correspondente.