Atividade de 20.04

Método de Simpson – integração numérica

Na Atividade de 17.04 deduzimos e aplicamos o Método de Trapézios, para estimar numericamente a integral

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx.$$

Agora vamos meio que repetir a ideia desenvolvida, mas fazendo a aproximação do integrando por outro polinômio interpolador, em cada intervalo de partição. Em vez de polinômios de grau 1, desta vez usaremos polinômios de grau 2.

LEITURA FACULTATIVA EM TOM MAIS CLARO:

1. Primeiro, seja f definida no intervalo $[x_0, x_1]$ e seja m_1 o ponto médio do intervalo, isto é, $m_1 = (x_0 + x_1)/2$. Seja $q = p_f[x_0, m_1, x_1]$ o polinômio interpolador de grau 2 de f para os pontos x_0, m_1, x_1. Vamos obter q e calcular a integral de q no intervalo $[x_0, x_1]$, que chamaremos de S_1. Eu mesmo vou fazer isso, para ganhar tempo.

Vou usar s para denotar o comprimento de metade do intervalo, isto é,

$$s = \frac{x_1 - x_0}{2} = x_1 - m_1 = m_1 - x_0$$

Por tabela de diferenças divididas, usando a ordem de pontos m_1, x_0, x_1, obtemos

$$q(x) = f(m_1) + \Delta_f[m_1, x_0](x - m_1) + \Delta_f[m_1, x_0, x_1](x - m_1)(x - x_0),$$

em que

$$\Delta_f[m_1, x_0] = \frac{f(x_0) - f(m_1)}{-s}$$

e

$$\Delta_f[m_1, x_0, x_1] = \frac{f(x_0) + f(x_1) - 2f(m_1)}{2s^2}.$$

Por enquanto não vamos substituir essas diferenças divididas: é mais fácil integrar $q(x)$ primeiro, tratando-as como constantes. Fazendo a substituição $w = x - m_1$, obtemos

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_1} q(x)dx = \int_{-s}^{+s} q(w + m_1)dw =$$

$$= \int_{-s}^{+s} f(m_1) + \Delta_f[m_1, x_0]w + \Delta_f[m_1, x_0, x_1]w(w + s)dw.$$

Como w é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico em relação à origem, a integral simplifica para

$$S_1 = \int_{-s}^{+s} f(m_1) + \Delta_f[m_1, x_0, x_1]w^2 dw$$

$$= 2sf(m_1) + \Delta_f[m_1, x_0, x_1] \cdot \frac{2s^3}{3}$$

$$= \frac{2s}{6}\{6f(m_1) + f(x_0) + f(x_1) - 2f(m_1)\}$$

$$= 2s \cdot \frac{f(x_0) + 4f(m_1) + f(x_1)}{6}$$

2. Suponha uma partição regular do intervalo $[x_0, x_n]$:
$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n,$$
com $x_i - x_{i-1} = 2s$, para todo $i = 1, \dots, n$. Uma aproximação da integral da f no intervalo todo pode ser obtida usando-se a fórmula do item anterior em cada intervalo da partição:
$$\boldsymbol{\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{2s}{6}(f(x_0) + 4f(m_1) + 2f(x_1) + 4f(m_2) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + 4f(m_n) + f(x_n))}$$
Dentro dos parênteses, foram juntados os termos $f(x_i)$ para cada nó interno x_i, com $i = 1, \dots, n-1$.
Essa fórmula é conhecida como **Método de Simpson**.

3. Agora a atividade propriamente dita. Estime a mesma integral mencionada no início, usando o Método de Simpson com $n = 4$. Depois suba para $n = 8$ e veja o que acontece. E quanto era mesmo o valor exato da integral?
Dica 1: Primeiro veja qual é o valor de s. Ele depende de n!!!
Dica 2: Para obter a soma entre os parênteses, faça primeiro uma tabela com os pontos $x_0, m_1, x_1, m_2, x_2, \dots, x_{n-1}, m_n, x_n$ na primeira coluna, e, na segunda coluna, com os valores $f(x_0), f(m_1), f(x_1), f(m_2), f(x_2), \dots, f(x_{n-1}), f(m_n), f(x_n)$.