1^a **Prova – Eletromagnetismo II**

1 [4.0] — Considere uma cavidade ressonante de formato retangular, com os lados em $x = (0, L_x)$, $y = (0, L_y)$ e $z = (0, L_z)$. Podemos tentar uma solução para a componente do campo elétrico na direção z da forma:

$$E_x = E_{0x} \cos(k_x x) \,\mathrm{sen}(k_y y) \,\mathrm{sen}(k_z z) e^{-i\omega t} \ ,$$

e expressões similares para as componentes y e z. (*Dica: preste atenção aos senos e cossenos quando escrever as outras componentes!*)

(a) (1.0) Encontre os valores possíveis para k_x, k_y e k_z para que as três componentes do campo elétrico satisfaçam condicões de contorno apropriadas ($\vec{E}_{||} = 0$ nas faces da cavidade).

R: As outras componentes do campo elétrico devem ser:

$$E_y = E_{0y} \mathrm{sen}(k_x x) \ \cos(k_y y) \,\mathrm{sen}(k_z z) e^{-i\omega t} \ ,$$

$$E_z = E_{0z} \mathrm{sen}(k_x x) \,\mathrm{sen}(k_y y) \ \cos(k_z z) e^{-i\omega t} \ ,$$

Para satisfazer as condições de contorno é necessário que os números de onda sejam:

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L_x} \quad , \quad k_y = \frac{n_y \pi}{L_y} \quad , \quad k_z = \frac{n_z \pi}{L_z} \ ,$$

com $n_i = 1, 2, 3, ...$

(b) (0.5) Usando a equação de Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, obtenha o vínculo entre as componentes do campo (E_{0i}) e os vetores de onda (k_i).

R: A equação significa que:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \ ,$$

que implicam em:

$$k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z} \ .$$

(c) (2.5) Agora suponha que levamos $L_z \to \infty$, de forma que não estamos mais considerando uma cavidade, e sim uma espécie de guia de onda quadrada que foi "tampada" em $z = 0$. Encontre os campos elétrico e magnético da onda que pode existir dentro dessa "guia tampada". Verifique que as condições de contorno estão satisfeitas ($\vec{E}_{||} = 0$ e $\vec{B}_{\perp} = 0$ nas superfícies). Verifique também que *todas* as equações de Maxwell estão satisfeitas por esses campos.

R: Tomando $L_z \to \infty$, temos $k_z \to 0$, e nesse caso resta apenas uma componente não-nula:

$$E_z = E_{0z} \,\mathrm{sen}(k_x x) \,\mathrm{sen}(k_y y) \, e^{-i\omega t} \ .$$

(Nota: você poderia também tentar soluções com valores contínuos de k_z, mas nesse caso aparecem outros modos dos campos elétrico e magnético, e a solução do problema fica um pouco mais longa.)

É evidente que esse campo obedece $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Pela Lei de Faraday, temos $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} \partial t = i\omega \vec{B}$. Isso significa que as componentes do campo magnético são:

$$i\omega B_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = E_{0z}\, k_y \,\text{sen}(k_x x)\, \cos(k_y y)\, e^{-i\omega t}$$

$$i\omega B_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -E_{0z}\, k_z \cos(k_x x) \,\text{sen}(k_y y)\, e^{-i\omega t}$$

Esses campos satisfazem $B_x(x=0) = B_x(x=L_x) = B_y(y=0) = B_y(y=L_y) = 0$. Também é fácil checar que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, e que $\vec{\nabla} \times \vec{B} = c^{-2} \partial \vec{E} / \partial t$.

2 [6.0] — Uma onda plana escalar se propaga na direção x e é espalhada por um fio de cabelo muito longo, de raio a, orientado ao longo do eixo z (veja figura na lousa). Nesse problema vamos, naturalmente, utilizar coordenadas cilíndricas, (ρ, ϕ, z), porém assumiremos simetria na direção z – ou seja, que não há dependência alguma em z. Isso torna o problema essencialmente bi-dimensional.

Preparação do problema

Seja uma onda escalar $\Psi = \psi\, e^{i\omega t}$, com ψ a parte espacial dessa onda. Em coordenadas cilíndricas, e assumindo simetria na direção z, ψ obedece a equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \; ,$$

onde $k = \omega / c$ e:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \; .$$

Uma solução geral dessa equação pode ser expressa na seguinte base de auto-funções radiais e angulares:

$$\psi = A \sum_m \left[a_m H_m^{(1)}(k\rho) + b_m H_m^{(2)}(k\rho) \right] e^{im\phi} \; , \tag{1}$$

onde $H_m^{(1)}(u) = J_m(u) + iY_m(u)$ e $H_m^{(2)}(u) = J_m(u) - iY_m(u)$ são as chamadas *funções de Hankel* do primeiro e do segundo tipo. Apesar delas serem apenas combinações das funções de Bessel, é preferível utilizar as funções de Hankel devido aos seus limites assintóticos quando $u \to \infty$, que são dados por:

$$H_m^{(1)}(u) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i[u-(m+1/2)\pi/2]} \; ,$$

$$H_m^{(2)}(u) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i[u-(m+1/2)\pi/2]} \; ,$$

Ou seja, se houver uma onda espalhada pelo fio de cabelo (centrado em $\rho = 0$), de "dentro" ($\rho = 0$) para "fora" ($\rho \to \infty$), essa onda espalhada deverá ser do tipo $\Psi_{out} \sim e^{i(k\rho - \omega t)} / \sqrt{\rho}$, e essa dependência só ocorre com as funções $H_m^{(1)}$.

A onda incidente

Uma onda plana se propagando na direção x pode ser escrita como:

$$\Psi_{in} = A e^{i(kx - \omega t)} \quad \Rightarrow \quad \psi_{in} = A e^{ik\rho \cos\phi} \; .$$

Felizmente, essa onda plana pode ser escrita em termos das funções de Hankel (e de Bessel) como:

$$e^{ikx} = e^{ik\rho\cos\phi} = \sum_m i^m J_m(k\rho) e^{im\phi} = \frac{1}{2}\sum_m i^m [H_m^{(1)}(k\rho) + H_m^{(2)}(k\rho)] e^{im\phi} \ .$$

Sabendo de tudo isso, responda:

(a) (1.0) Escrevendo a função espalhada ("out") como:

$$\psi_{out} = A \sum_m c_m H_m^{(1)} e^{im\phi} \ ,$$

e lembrando que a onda "total" é $\psi = \psi_{in} + \psi_{out}$, mostre que as constantes que definem a onda total segundo a equação (1) podem ser escritas como $a_m = c_m + i^m/2$ e $b_m = -i^m/2$.

R: Escrevemos a onda "out"como $\psi_{out} = \psi - \psi_{in}$:

$$\psi_{out} = A \sum_m \left[\left(a_m - \frac{1}{2} i^m \right) H_m^{(1)}(k\rho) + \left(b_m - \frac{1}{2} i^m \right) H_m^{(2)}(k\rho) \right] e^{im\phi} \ .$$

No limite $\rho \to \infty$ devemos obter uma expressão que contém apenas $H_m^{(1)}$, e portanto $b_m = i^m/2$. O coeficiente que resta é justamente $c_m = a_m - i^m/2$.

(b) (2.0) Agora imponha as condições de contorno do tipo Dirichlet – ou seja, exija que $\psi = 0$ em $\rho = a$. Encontre a expressão para os coeficientes c_m (eles vão ficar em termos das funções de Hankel mesmo, não se assuste).

R: Como $\psi(\rho =) = 0$, cada termo da série deve ser zero. Ou seja:

$$0 = a_m H_m^{(1)}(ka) + b_m H_m^{(2)}(k\rho) \quad \Rightarrow \quad a_m = -b_m \frac{H_m^{(2)}(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} = -\frac{i^m}{2} \frac{H_m^{(2)}(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} \ .$$

Desse modo,

$$c_m = -\frac{i^m}{2} \left[1 + \frac{H_m^{(2)}(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} \right] = -i^m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} \ .$$

(c) (2.0) A seção de choque desse espalhamento (que, voltando para as três dimensões originais do fio de cabelo, pode ser interpretada como a seção de choque por unidade de comprimento do fio de cabelo) depende apenas do ângulo ϕ. Podemos escrever:

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = \lim_{\rho \to \infty} \frac{\rho \, |\psi_{out}(\rho)|^2}{|\psi_{in}|^2}$$

Obtenha a expressão dessa seção de choque diferencial, e depois integre essa expressão, mostrando que ela resulta na seguinte seção de choque total:

$$\sigma = \frac{4}{k} \sum_m \frac{J_m^2(ka)}{|H_m^{(1)}(ka)|^2} = \frac{4}{k} \sum_m \frac{J_m^2(ka)}{J_m^2(ka) + Y_m^2(ka)} \ .$$

[*Dica: Para calcular essa seção de choque total é útil lembrar que* $\int_0^{2\pi} d\phi \, e^{i(m-m')\phi} = 2\pi\delta_{mm'}$.]

R: No limite $\rho \to \infty$, usando a propriedade da função de Hankel temos que:

$$\frac{d\sigma(\phi)}{d\phi} = \lim_{\rho\to\infty} \rho \left| \sum_m c_m H_m^{(1)}(k\rho) e^{im\phi} \right|^2 = \rho \left| \sum_m c_m \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} e^{i[k\rho-(m+1/2)\pi/2]} e^{im\phi} \right|^2 ,$$

que, devido ao módulo quadrado, resulta em:

$$\frac{d\sigma(\phi)}{d\phi} = \frac{2}{\pi k} \left| \sum_m c_m e^{-im\pi/2} e^{im\phi} \right|^2 = \frac{2}{\pi k} \left| \sum_m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} e^{-im\pi/2} e^{im\phi} \right|^2$$

Para obter a seção de choque total, integramos sobre o ângulo ϕ, de 0 a 2π. Nesse momento é melhor escrever a expressão acima como:

$$\frac{d\sigma(\phi)}{d\phi} = \frac{2}{\pi k} \left[\sum_m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} e^{-im\pi/2} e^{im\phi} \right] \times \left[\sum_{m'} \frac{J_{m'}(ka)}{H_{m'}^{(2)}(ka)} e^{im'\pi/2} e^{im'\phi} \right] ,$$

onde lembre-se que $[H_m^{(1)}]^* = [H_m^{(2)}]$.

Agora, na integral $\sigma = \int_0^{2\pi} d\phi d\sigma/d\phi$ note que a integral angular é simplesmente:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \, e^{i(m'-m)\phi} = 2\pi \delta_{m\,m'} .$$

Isso simplifica as duas somas, tornando-as uma só. Temos então:

$$\sigma = \frac{2}{\pi k} \, 2\pi \sum_m \frac{J_m^2(ka)}{H_m^{(1)}(ka) H_m^{(2)}(ka)} ,$$

que é o resultado do enunciado.

(d) (1.0) Agora, sabendo que no limite $u \gg 1$ a soma $\sum_m \frac{J_m^2(u)}{J_m^2(u)+Y_m^2(u)} \to u/2$, o resultado dessa seção de choque é o que você esperaria? Por quê?

R: O resultado é que a seção de choque se tornar $\sigma = 2a$, que é justamente o diâmetro do fio de cabelo. Esse diâmetro corresponde à "sombra" que o fio de cabelo faz. Em outras palavras, essa é a "seção de choque geométrica"!