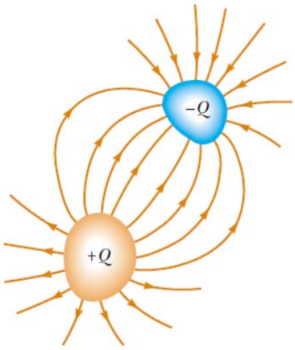
Eletricidade e Magnetismo - IGC

Capacitância e Dielétricos

Prof. Cristiano Oliveira
Ed. Basilio Jafet – sala 202
crislpo@if.usp.br

CAPACITORES

Definição de Capacitância



Capacitor: Combinação de dois condutores carregados com mesma carga mas sinais opostos. Os condutores são denominados placas e uma diferença de potencial existe entre devido a presença das cargas.

A **capacitância *C*** de um capacitor é definida como a razão entre a magnitude da carga em cada condutor e a diferença de potencial entre os condutores:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Como a diferença de potencial varia linearmente com a carga armazenada, a capacitância é constante para um dado capacitor, dependendo apenas do tamanho e forma do condutor. Capacitância é uma medida da *capacidade* do capacitor de armazenar carga.

Unidade de Capaciância

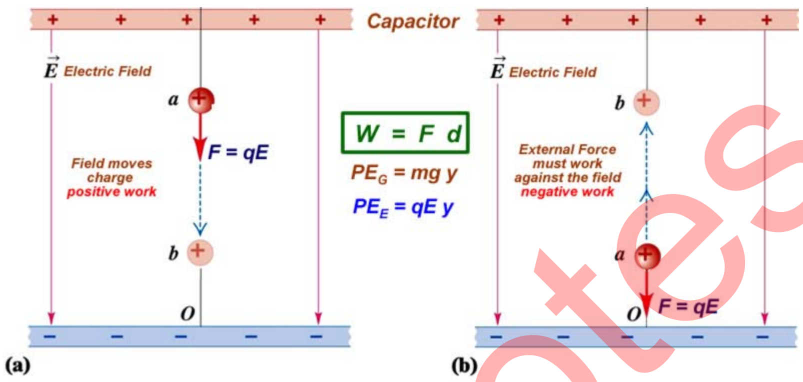
Da definição anterior, vemos que no *SI*, capaciância tem unidades de *coulombs* por *volt (C/V).* Esta unidade foi batizada de ***farad* (F)**:

$$1F = 1C / V$$

1F é uma quantidade muito grande de capacitância e tipicamente componentes elétricos possuem capaciâncias variando de *microfarads* (10^{-6}) a *picofarads* (10^{-12})

Calculando Capacitâncias

Energia Elétrica



$$\Delta U = q\Delta V = -qE \cdot s$$

http://sdsu-physics.org/physics180/physics196/Topics/electricPotential.html

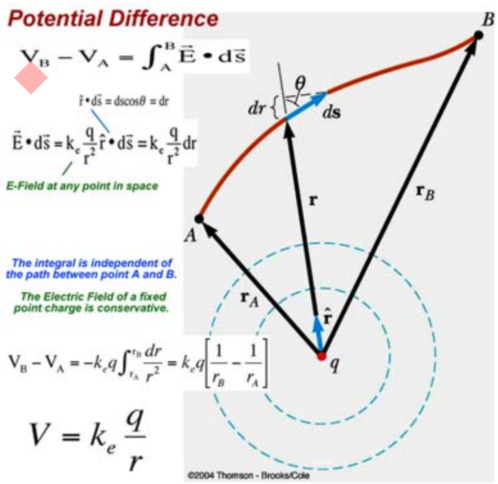
Calculando Capacitâncias

Potencial Elétrico

Energia elétrica/ unidade de carga

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

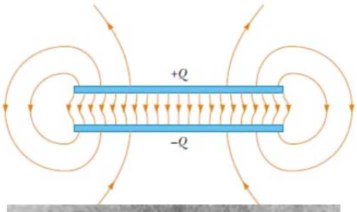
$$V = -\int_C \vec{E} . d\vec{s}$$

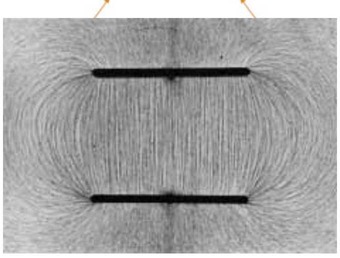


http://sdsu-physics.org/physics180/physics196/images_196/e_potential_eq.gif

Calculando Capacitâncias

Capacitor de Placas paralelas





O campo elétrico no interior do capacitor é dado por:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

Para obtermos o potencial entre as placas, temos

$$V = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Como para capacitores estamos interessados no valor absoluto de V podemos reescrever esta expressão como

$$V = -\int_+^- E\,ds \Rightarrow V = E\int_-^+ ds = Ed \;\Rightarrow V = \frac{\sigma\, d}{\varepsilon_0}$$

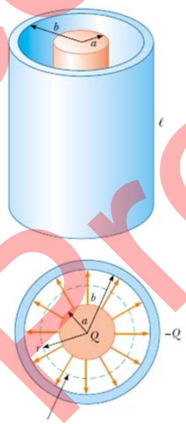
Usando a definição de capacitância,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Qd/\varepsilon_0 A} \;\Rightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

Capacitor de placas paralelas

Calculando Capacitâncias

Capacitor Cilíndrico



Superfície Gaussiana

Como superfície gaussiana escolhemos um cilindro de comprimento *L* e raio *r* fechado nas bases:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q \;\Rightarrow Q = \varepsilon_0 EA \Rightarrow Q = \varepsilon_0 E(2\pi\, r\, L) \;\Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}$$

Para obtermos o potencial entre as placas, temos

$$V = \int_+^- E\,ds \;= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_a^b \frac{dr}{r} \;\Rightarrow V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

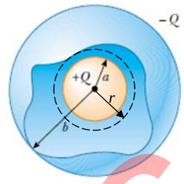
Usando a definição de capacitância,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Q\ln(b/a)/2\pi\varepsilon_0 L} \;\Rightarrow \boxed{C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}}$$

Capacitor cilíndrico

Calculando Capacitâncias

Capacitor Esférico



Como superfície gaussiana escolhemos uma esfera de raio *r* :

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = Q \Rightarrow Q = \varepsilon_0 EA \Rightarrow Q = \varepsilon_0 E\left(4\pi r^2\right) \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Para obtermos o potencial entre as placas, temos

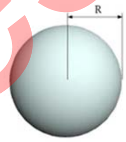
$$V = \int_{+}^{-} E\,ds = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

Usando a definição de capacitância,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Q\left[(b-a)/ab\right]/4\pi\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}}$$

Capacitor Esférico



Caso particular: Esfera carregada

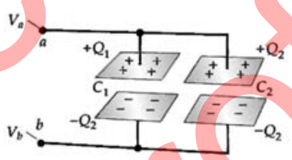
Colocando a carga negativa -*Q* no infinito, $b \to \infty$

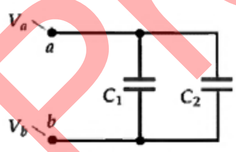
$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R}$$

Esfera isolada

Combinando Capacitâncias

Capacitores em Paralelo





Os pontos a e b estão conectados a uma bateria que mantém a diferença de potencial $V=V_a-V_b$ contante. Se as capacitancias forem dadas por C_1 e C_2, as cargas armazanadas nos capacitores serão:

$$Q_1 = C_1 V \quad \text{e} \quad Q_2 = C_2 V$$

A carga total armazenada é,

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2)V$$

Isso nos permite definir a capacitância equivalente

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} = (C_1 + C_2)$$

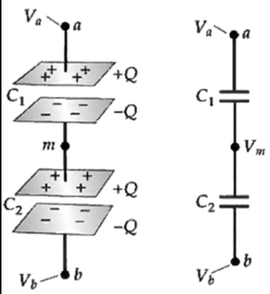
O mesmo procedimento pode ser extendido para *n* capacitores em paralelo:

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n}$$

Capacitância equivalente para associação em paralelo

Combinando Capacitâncias

Capacitores em Série



Os pontos a e b estão conectados a uma bateria que mantém a diferença de potencial $V=V_a-V_b$ contante através dos capacitores. Se uma carga $+Q$ é colocada na placa superior do primeiro capacitor, o campo elétrico induzirá uma carga -Q na placa inferior deste. Esta carga virá dos elétrons tirados da placa superior do segundo capacitor, induzindo cargas +Q e -Q nas placas deste.neste:

O potencial através do primeiro capacitor será: $V_1 = V_a - V_m = \frac{Q}{C_1}$

No segundo capacitor, $V_2 = V_m - V_b = \frac{Q}{C_2}$

A diferença de potencial através dos dois capacitores é a soma destes dois valores

$$V = V_a - V_b = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow V = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

Isso nos permite definir a capacitância equivalente

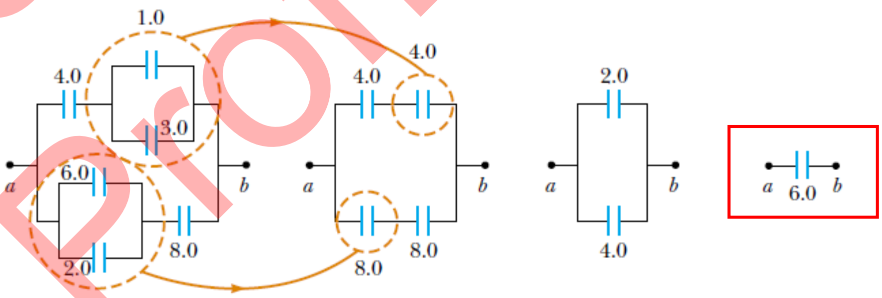
$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

O mesmo procedimento pode ser extendido para n capacitores em série:

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}}$$

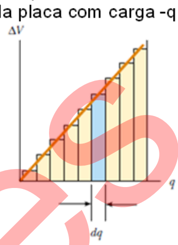
Capacitância equivalente para associação em série

Exemplo: Obtendo a capacitância equivalente



Energia Armazenada em um Capacitor

Seja q a carga no capacitor durante o processo de carga. Neste instante, a diferença de potencial em suas placas é $\Delta V=q/C$. O trabalho necessário para transferir um incremento de carga dq da placa com carga -q para a placa com carga +q (que possui um potencial elétrico maior) é:



$$dW = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq$$

O trabalho total necessário para carregar o capacitor de q=0 para a carga q=Q é

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq \quad = \frac{1}{C}\int_0^Q q dq \ \Rightarrow W = \frac{Q^2}{2C}$$

Este trabalho "gasto" na carga do capacitor, aparece como energia potencial U armazenada no capacitor. Esta energia pode ser escrita de várias formas, conforme a conveniência:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q\Delta V = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2$$

Este resultado aplica-se para qualquer capacitor, independente de sua geometria. Na prática existe um limite máximo de energia (ou cargas) que pode ser armazenado em um capacitor. Desta forma, os capacitores possuem a indicação da máxima tensão suportada em suas placas.

Densidade de Energia

Assumindo-se uma dada geometria podemos calcular a energia por unidade de volume para um capacitor:

Capacitor de placas paralelas

$$U = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad V = Ed$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 A d)E^2$$

$$Vol = Ad$$

$$\eta = \frac{U}{Vol} = \frac{1}{Ad}\frac{1}{2}(\varepsilon_0 A d)E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$\boxed{\eta = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

Densidade de energia contida no campo elétrico – Independe do capacitor

Capacitor Cilíndrico

$$U = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2 \qquad C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)} \qquad V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$U = \frac{1}{2} 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)} \frac{Q^2}{(2\pi\varepsilon_0)^2 L^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right)^2$$

$$U = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\eta = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r}$$

$$dU = \eta dV_{ol} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{(2\pi\varepsilon_0 L)^2 r^2} 2\pi r L dr$$

$$dU = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\frac{1}{r} dr$$

$$U = \int_a^b \eta dV_{ol} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_a^b \frac{1}{r} dr \Rightarrow U = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Densidade de Energia

Capacitor Esférico

$$U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \qquad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

$$U = \frac{1}{2}4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}\frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\left(\frac{b-a}{ab}\right)^2$$

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

$$\eta = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

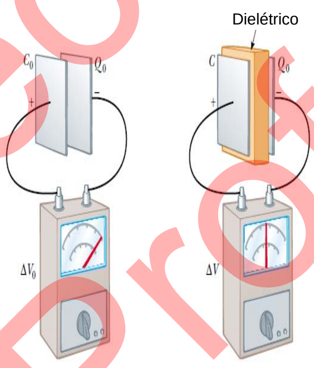
$$dU = \eta dV_{ol} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{Q^2}{r^4}4\pi r^2 dr$$

$$dU = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr$$

$$U = \int_a^b \eta dV_{ol} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

Capacitores com Dielétricos



$$\Delta V < \Delta V_0$$

Dielétrico: Material isolante como borracha, vidro, papel encerado, etc.

Quando a região entre as placas de um capacitor são completamente preenchidas pelo material dielétrico, o potencial, medido por um voltímetro, diminui de um fator κ,

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\kappa}$$

Como a carga entres as placas é a mesma, conclui-se que a capacitância deve se alterar:

$$C = \frac{Q_0}{\Delta V} = \frac{Q_0}{\Delta V_0/\kappa} = \kappa\frac{Q_0}{\Delta V_0} \Rightarrow \boxed{C = \kappa C_0}$$

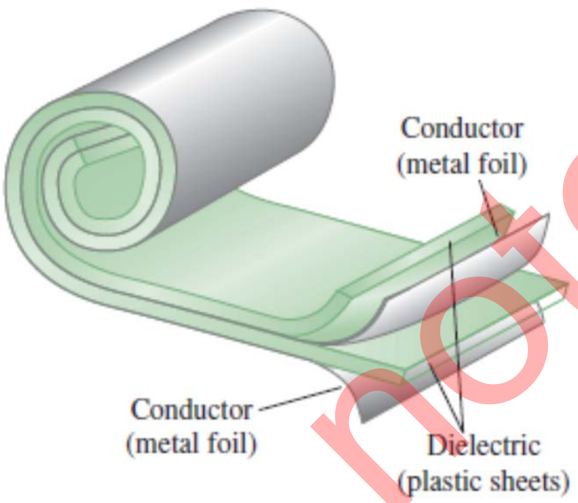
Quando a região entre as placas de um capacitor são completamente preenchidas pelo material dielétrico, a capacitância ***aumenta*** por um fator adimensional κ, denominado constante dielétrica.

Para um capacitor de placas paralelas, $C_0 = \varepsilon_0 A/d$ então,

$$C = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon A}{d}$$

Onde ε é denominado permissividade do dielétrico

Capacitor comercial típico



Constantes dielétricas conhecidas

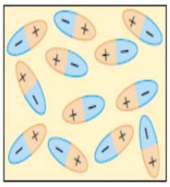
Approximate Dielectric Constants and Dielectric Strengths of Various Materials at Room Temperature

Material	Dielectric Constant κ	Dielectric Strength[a] (10^6 V/m)
Air (dry)	1.000 59	3
Bakelite	4.9	24
Fused quartz	3.78	8
Mylar	3.2	7
Neoprene rubber	6.7	12
Nylon	3.4	14
Paper	3.7	16
Paraffin-impregnated paper	3.5	11
Polystyrene	2.56	24
Polyvinyl chloride	3.4	40
Porcelain	6	12
Pyrex glass	5.6	14
Silicone oil	2.5	15
Strontium titanate	233	8
Teflon	2.1	60
Vacuum	1.000 00	—
Water	80	—

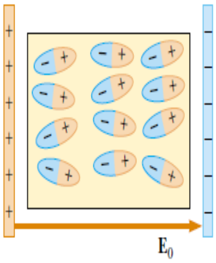
Rididez dielétrica

Diminuição do potencial – Efeito da polarização da moléculas

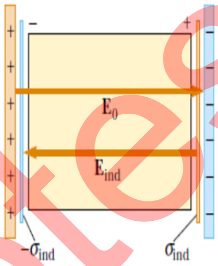
$$E = E_0 - E_{ind}$$



Moléculas randomicamente orientadas

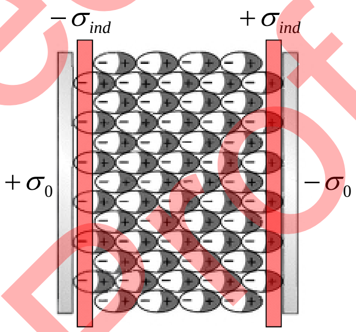


Se orientam quando sugeitas ao campo elétrico das placas do capacitor



Esta orientação gera um campo induzido que se acaba por diminuir o campo inicial

Capacitor de placas paralelas



O campo elétrico original tem grandeza E_0 e é dado por

$$E_0 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0}$$

O campo elétrico dentro das placas do dielétrico, oposto ao campo original, devido as cargas σ_{ind} induzidas é,

$$E' = \frac{\sigma_{ind}}{\varepsilon_0}$$

O campo resultante E é a diferença destes dois campos mas também vale E_0/κ

$$E = E_0 - E' = \frac{E_0}{\kappa} \Rightarrow E' = E_0\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) = \frac{\kappa - 1}{\kappa} E_0$$

Escrevendo $\sigma_{ind}/\varepsilon_0$ no lugar de E' e σ_0/ε_0 no lugar de E_0,

$$\sigma_{ind} = \frac{\kappa - 1}{\kappa}\sigma_0$$

A carga ligada σ_{ind} é sempre menor que a carga livre σ_0, e nula quando $\kappa = 1$, caso em que não há dielétrico.

Tipos de Capacitores “reais”

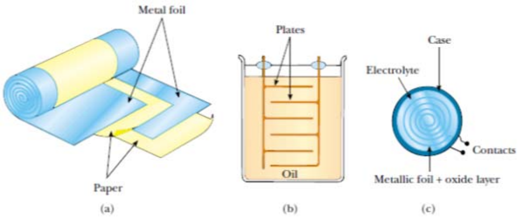
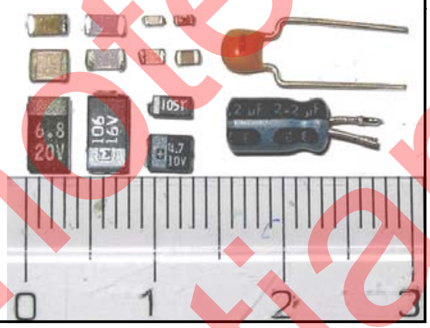


Figure 26.15 Three commercial capacitor designs. (a) A tubular capacitor, whose plates are separated by paper and then rolled into a cylinder. (b) A high-voltage capacitor consisting of many parallel plates separated by insulating oil. (c) An electrolytic capacitor.



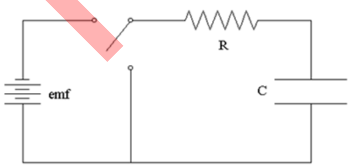
Aplicações

Placas de circuito impresso

Desfibrilador

Flash fotográfico

Filtros de sinal



Todo e qualquer equipamento eletrico/eletronico possui um ou mais capacitores nele.