Análise de Risco

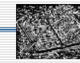
Risco de Taxa de Juros

Modelo de *Duration*

Aula 4

Carlos R. Godoy

Agenda Aula 4



1. Modelo de *Duration*
   - Fórmula de Cálculo
   - TRF Semestrais, Anuais e Zero Cupom
   - TRF com Perpetuidade
2. Propriedades
3. Significado Econômico
   - Sensibilidade Face as Variações das Taxas de Juros
4. Como usar a D para Proteger Risco de Taxa
5. Convexidade

Modelo de Prazo de Vencimentos

0
Captação
$100

Taxas 15% (N)*

1
Resgate P + J
$115

0
Aplicação
$100

1/2
Recebe P + J
$50 + $7,50
$57,50

1
Resgate P + J
$50 + $3,75 = $53,75
+ $4,31 (reinvestimento $57,50)

15% *
Captação $115,00
Aplicação $115,56
Diferença $0,56

12% *
Captação $115,00
Aplicação $114,70
Diferença - $0,30

Modelo de Duration

- ✓ ***Duration* ou Hiato de *Duration* são medidas mais eficazes da exposição a risco de variação de taxas de juros.**
- Sensibilidade do valor de um ativo ou passivo à taxa de juros.
- Leva em conta o vencimento e o momento dos fluxos de caixa
- Compara a magnitude relativa dos fluxos no mesmo momento.
- É o prazo médio ponderado de vencimentos – pesos são os VP dos FCxs

0
Aplicação
$100

1/2
Recebe P + J
$50 + $7,50
$57,50

1
Resgate P + J
$50 + $3,75
$53,75

Modelo de Duration

Taxas 15%

0
Aplicação
$100

1/2
Recebe P + J
$50 + $7,50
$57,50

1
Resgate P + J
$50 + $3,75
$53,75

Taxas 15% (N)

0
Aplicação
$100

1/2
VP $53,49

1
Resgate P + J
VP $46,51

Soma FC $111,25
Soma VP $100,00

Modelo de Duration

Tempo	Peso
6 m	$X_6 \frac{VP_6}{VP_6 + VP_{12}} = \frac{53,49}{100} = 0,5349$
12 m	$X_{12} \frac{VP_{12}}{VP_6 + VP_{12}} = \frac{46,51}{100} = 0,4651$
Duration	$X_6 \times 6 + X_{12} \times 12$ $0,5349 \times 6 + 0,4651 \times 12 = 8,79\ meses$
Hiato de D	$D_c - D_a = 8,79 - 12 = -3,21\ meses$

Medida em anos
0,7326
- 0,2674

Taxas 15% (N)

0
Aplicação
$100

1/2
VP $53,49

1
Resgate P + J
VP $46,51

Soma FC $111,25
Soma VP $100,00

Fórmula Geral da *Duration*

Medida em anos

[redacted]

Duration TRF Juros Anuais

- Os juros de um titulo de dívida de 6 anos que pagam juros anualmente (eurobonds) é 8%, o seu valor de face é $1.000 e a taxa de mercado (R) é 8% (N), calcule a *duration*.

Anos	FCx	VP FCx	VP x t
1	80,00	74,07	74,07
2	80,00	68,59	137,17
3	80,00	63,51	190,52
4	80,00	58,80	235,21
5	80,00	54,45	272,23
6	1.080,00	680,58	4.083,50
		1.000,00	4.992,71

Cupom	8%		
Mercado	8%		
VN	1.000,00		
Duration	4.992,71	4,993	Anos
	1.000,00		

Duration TRF Juros Semestrais

- A taxa de juros anual de um titulo de dívida de 2 anos que pagam juros semestralmente (títulos do tesouro) é 8%, o seu valor de face é $1.000 e a taxa de mercado (R) é 6% ao semestre , calcule a *duration*.

Sem	FCx	VP FCx	VP x t
1	40,00	37,74	37,74
2	40,00	35,60	71,20
3	40,00	33,58	100,75
4	1.040,00	823,78	3.295,11
		930,70	3.504,80

Cupom	8%	4%	
Mercado	6%		
VN	1.000,00		
Duration	3.504,80	3,766	Sem
	930,70		

Medida em anos
1,88

Duration de Zero Cupom

- Um titulo de dívida de 4 anos que não paga juros (LTN) tem seu valor de face é $1.000 e a taxa de mercado (R) está em 10%, calcule a *duration*.

Anos	FCx	VP FCx	VP x t
1	-	0,00	-
2	-	0,00	-
3	-	0,00	-
4	1.000,00	683,01	2.732,05
		683,01	2.732,05

Cupom	0%		
Mercado	10%		
VN	1.000,00		
Duration	2.732,05	4,000	Anos
	683,01		

Duration de TRF Juros Anuais Longo Prazo

- Os juros de um titulo de dívida de 100 anos que pagam juros anualmente (eurobonds) é 8%, o seu valor de face é $1.000 e a taxa de mercado (R) é 10% (N), calcule a *duration*.

Cupom	8%		
Mercado	10%		
VN	1.000,00		
Duration	8.800,81	11,00	Anos
	800,01		

Duration de Perpetuidade

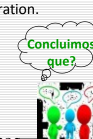
- Um titulo de dívida paga juros de 5% anuais perpetuamente, seu valor de face é $1.000 e a taxa de mercado (R) está em 10%, calcule a *duration*.
- Um titulo de dívida paga juros de 5% anuais perpetuamente, seu valor de face é $1.000 e a taxa de mercado (R) está em 12%, calcule a duration.
- Um titulo de dívida paga juros de 5% anuais perpetuamente, seu valor de face é $1.000 e a taxa de mercado (R) está em 8%, calcule a duration.

$$\boxed{Dp = \frac{(1+R)}{R}}$$

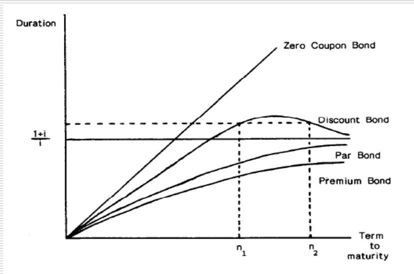
$$Dp = \frac{(1+0{,}10)}{0{,}10} = 11\_\text{anos}$$

$$Dp = \frac{(1+0{,}08)}{0{,}08} = 13{,}5\_\text{anos}$$

$$Dp = \frac{(1+0{,}12)}{0{,}12} = 9{,}33\_\text{anos}$$



Duration e Maturidade



Questões Norteadoras

1. Diante de um taxa de mercado de 8% ao ano, qual dos títulos possui **maior *duration***:
   A. Titulo de renda fixa, 30 anos, e zero cupom.
   B. Título de renda fixa, juros perpétuos de 8% ao ano.

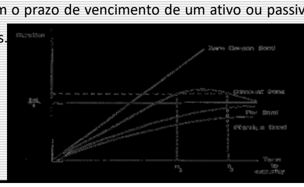
2. Títulos com cupons elevados possuem ***durations* mais longas ou mais curtas**?

3. Qual é a relação entre o **número encontrado** em anos (***duration***) e a **sensibilidade** de um ativo ou passivo?

Propriedades das Durations

✓ **3 propriedades:**
- Prazo de vencimento
- Taxa de mercado
- Cupom do título

1. Prazo de Vencimentos
- ***Duration*** cresce com o prazo de vencimento de um ativo ou passivo, mas a taxas decrescentes.



Propriedades das Durations

✓ **3 propriedades:**
- Prazo de vencimento
- Taxa de mercado
- Cupom do título

2. Taxa de Mercado
- ***Duration*** decresce com as taxas de mercado.

$$D = \frac{(1+R)}{R}$$

$$D = \frac{(1+0{,}10)}{0{,}10} = 11\_\text{anos} \qquad D = \frac{(1+0{,}12)}{0{,}12} = 9{,}33\_\text{anos} \qquad D = \frac{(1+0{,}15)}{0{,}15} = 7{,}67\_\text{anos}$$

Propriedades das Durations

✓ **3 propriedades:**
- Prazo de vencimento
- Taxa de mercado
- Cupom do título

3. Cupom do título
- Maiores os juros contratados, menor a sua *duration*.
- Fluxos de caixa são recebidos mais rapidamente, e
- Maiores os VPs desses fluxos de caixa

Significado das *Durations*

✓ **Medida direta de sensibilidade de um ativo ou passivo de renda fixa em relação às variações na taxa de juros.**
- Quanto **maior é a *duration* (D)**: **mais sensível é o preço** do ativo ou passivo a mudanças nas taxas de juros

❖ Os juros de um titulo de dívida de 6 anos que pagam juros anualmente (eurobonds) é 8%, o seu valor de face é $1.000 e a taxa de mercado (R) é 8% (N), calcule a duration.

$$\Delta\%P = -D\left(\frac{\Delta R}{1+R}\right)$$

$$\Delta\%P = -4{,}993\left(\frac{0{,}0001}{1+0{,}08}\right) = -0{,}0462\%$$

Anos	FCx	VP FCx	VP x t
1	80,00	74,07	74,07
2	80,00	68,59	137,17
3	80,00	63,51	190,52
4	80,00	58,80	235,21
5	80,00	54,45	272,23
6	1.080,00	680,58	4.083,50
		1.000,00	4.992,71
Cupom	8%		
Mercado	8%		
VN	1.000,00		
Duration	4.992,71	4,993	Anos
	1.000,00		

Significado das Durations

❖ Um titulo de dívida paga juros de 5% anuais perpetuamente, seu valor de face é $1.000 e a taxa de mercado (R) está em 10%, calcule a *duration*.

$$D = \frac{(1+R)}{R} \qquad D = \frac{(1+0{,}10)}{0{,}10} = 11\_\text{anos}$$

$$\Delta\%P = -D\left(\frac{\Delta R}{1+R}\right) \qquad \Delta\%P = -11\left(\frac{0{,}0001}{1+0{,}10}\right) = -0{,}10\%$$

Significado das Durations

❖ A taxa de juros anual de um titulo de dívida de 2 anos que pagam juros semestralmente (títulos do tesouro) é 8%, o seu valor de face é $1.000 e a taxa de mercado (R) é 12% ao ano, calcule a duration.

Anos	FCx	VP FCx	VP x t
0,5	40,00	37,80	18,90
1	40,00	35,71	35,71
1,5	40,00	33,75	50,62
2	1.040,00	829,08	1.658,16
		936,34	1.763,40

Cupom	8%	4%	
Mercado	12%		
VN	1.000,00		
Duration	1.763,40	1,883	Anos
	936,34		

$$\Delta\%P = -1{,}883\left(\frac{0{,}0010}{1+0{,}12}\right) = -0{,}168\%$$

$$\$936{,}34x(-0{,}168\%) = \$934{,}76$$

Anos	FCx	VP FCx
0,5	40,00	37,78
1	40,00	35,68
1,5	40,00	33,70
2	1.040,00	827,60
		934,77

$$\Delta\%P = -D\left(\frac{\Delta R}{1+R}\right)$$

Significado das Durations

❖ A taxa de juros anual de um titulo de dívida de 2 anos que pagam juros semestralmente (títulos do tesouro) é 8%, o seu valor de face é $1.000 e a taxa de mercado (R) é 12% ao ano, calcule a duration.

Anos	FCx	VP FCx	VP x t
0,5	40,00	37,80	18,90
1	40,00	35,71	35,71
1,5	40,00	33,75	50,62
2	1.040,00	829,08	1.658,16
		936,34	1.763,40

Cupom	8%	4%	
Mercado	12%		
VN	1.000,00		
Duration	1.763,40	1,883	Anos
	936,34		

$$\Delta\%P = -1{,}883\left(\frac{0{,}03}{1+0{,}12}\right) = -5{,}045\%$$

$$\$936{,}34x(-5{,}045\%) = \$889{,}11$$

Anos	FCx	VP FCx
0,5	40,00	37,30
1	40,00	34,78
1,5	40,00	32,43
2	1.040,00	786,39
		890,91

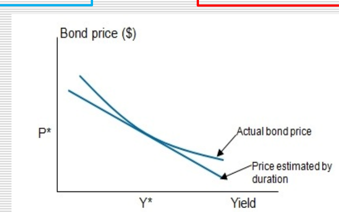
$$\Delta\%P = -D\left(\frac{\Delta R}{1+R}\right)$$

Durations e Grandes Variações nos Juros

✓ **Medida direta de sensibilidade de um ativo ou passivo de renda fixa em relação à pequenas variações na taxa de juros.**

✓ **Taxa de juros sobe:**
- Duration: predição exagerada da queda do preço.

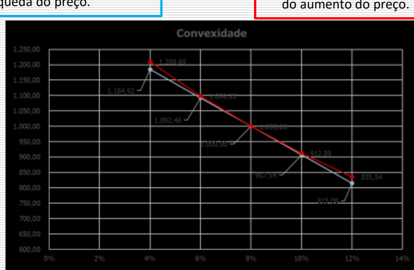
✓ **Taxa de juros cai:**
- Duration: predição subestimada do aumento do preço.



Durations e Convexidade

✓ **Taxa de juros sobe:**
- Duration: predição exagerada da queda do preço.

✓ **Taxa de juros cai:**
- Duration: predição subestimada do aumento do preço.



Durations e Convexidade

1. **Convexidade é desejável:**
- Maior convexidade de um TRF ou Carteira: maior a proteção conseguida
- ✓ Contra aumentos de taxas de juros – preços caem menos
- ✓ Contra quedas de taxas de juros – preços ficam mais altos

2. **Convexidade e Duration:**
- Maiores variações nos juros e mais convexo (TRF ou Carteira): maior o erro cometido ao usar apenas a duration para medir e imunizar a exposição ao risco de variações na taxa de juros.

3. **Todos os TRF são convexos:**
- Qual seria o preço de um TRF se a taxa de juros de mercado for 0?
- Qual seria o preço de um TRF se a taxa de juros de mercado subisse ao infinito?

Durations e Convexidade

- Modelo de duration subestima ou superestima as variações de preços pelas mudanças significativas das taxas de juros.

$$\Delta\%P = -D\left(\frac{\Delta R}{1+R}\right)$$

- Ajuste por convexidade ou curvatura: Duration + Convexidade

$$\Delta\%P = -D\left(\frac{\Delta R}{1+R}\right) + \frac{1}{2}CX\left(\Delta R\right)^2$$

- Simplificamos pela duration modificada.

$$DM = \left(\frac{D}{1+R}\right)$$

- Inclinação da curva (preço-taxa de desconto) + variação da inclinação.

$$\Delta\%P = -DM \times \Delta R + \frac{1}{2}CX\left(\Delta R\right)^2$$

Convexidade

$$\Delta\%P = -\frac{D}{(1+R)} \times \Delta R + \frac{1}{2}CX\left(\Delta R\right)^2$$

- **Cálculo da convexidade**:

$$CX = \text{Fator de escala}\,(10^8) \times$$

$$\left(\boxed{\begin{matrix}\text{Perda de capital com} \\ \text{o aumento de taxa de} \\ \text{um ponto de base} \\ \text{(efeito negativo)}\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\text{Ganho de capital com} \\ \text{a redução de taxa de} \\ \text{um ponto de base} \\ \text{(efeito positivo)}\end{matrix}} \right)$$

- **Efeito da convexidade**: o grau segundo o qual o efeito de ganho de capital (redução da taxa) supera o efeito da perda de capital decorrente de um pequeno aumento na taxa de juros.

Convexidade

$$CX = \text{Fator de escala}\,(10^8) \times$$

$$\left(\boxed{\begin{matrix}\text{Perda de capital com} \\ \text{o aumento de taxa} \\ \text{de um ponto de base} \\ \text{(efeito negativo)}\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\text{Ganho de capital com} \\ \text{a redução de taxa de} \\ \text{um ponto de base} \\ \text{(efeito positivo)}\end{matrix}} \right)$$

$$CX = 10^8 \times \left[\frac{-\Delta P}{P} + \frac{\Delta P}{P}\right]$$

Durations e Convexidade

- Os juros de um titulo de dívida de 6 anos que pagam juros anualmente (eurobonds) é 8%, o seu valor de face é \$1.000 e a taxa de mercado (R) é 8% (N), calcule a duration. Depois simule preços com juros variando 1 ponto base.

Anos	FCx	VP FCx	VP x t
1	80,00	74,07	74,07
2	80,00	68,59	137,17
3	80,00	63,51	190,52
4	80,00	58,80	235,21
5	80,00	54,45	272,23
6	1.080,00	680,58	4.083,50
		1.000,00	4.992,71

Cupom	8%		
Mercado	8%		
VN	1.000,00		
Duration	4.992,71	4,993	Anos
	1.000,00		

anos	FCx	VP FCx
1	80,00	74,07
2	80,00	68,57
3	80,00	63,49
4	80,00	58,78
5	80,00	54,42
6	1.080,00	680,21
		999,54

anos	FCx	VP FCx
1	80,00	74,08
2	80,00	68,60
3	80,00	63,52
4	80,00	58,82
5	80,00	54,47
6	1.080,00	680,96
		1.000,46

$$\Delta\%P = -D\left(\frac{\Delta R}{1+R}\right)$$

$$\Delta\%P = -4{,}993\left(\frac{0{,}0001}{1+0{,}08}\right) = -0{,}0462\%$$

$$\$1.000x(-0{,}0462\%) = \$999{,}54$$

$$\$1.000x(0{,}0462\%) = \$1.000{,}46$$

Duration, Convexidade e Risco

- Os juros de um titulo de dívida de 6 anos que pagam juros anualmente (eurobonds) é 8%, o seu valor de face é \$1.000 e a taxa de mercado (R) é 8% (N), calcule a convexidade.

$$CX = 10^8 \times \left[\frac{-\Delta P}{P} + \frac{\Delta P}{P}\right]$$

$$CX = 10^8 \times \left[\frac{999{,}53785 - 1.000}{1.000} + \frac{1.000{,}46243 - 1.000}{1.000}\right]$$

$$CX = 10^8 \times \left[\frac{-0{,}46215}{1.000} + \frac{0{,}46243}{1.000}\right] \qquad CX = 28{,}048$$

Duration, Convexidade e Risco

- Qual a convexidade de um titulo de dívida de 6 anos que paga juros anuais de 8%, tem valor de face de \$1.000, e com taxa de mercado (R) de 8% ao ano? Com uma nova taxa de juros de 10%, qual a sensibilidade do preço?

$$\Delta\%P = -\frac{D}{(1+R)} \times \Delta R + \frac{1}{2}(28{,}048)\left(\Delta R\right)^2$$

$$\Delta\%P = -\frac{4{,}993}{(1{,}08)} \times 0{,}02 + \frac{1}{2}(28{,}048)\left(0{,}02\right)^2$$

$$\Delta\%P = -0{,}0925 + 0{,}0056 = -0{,}0868\ (\text{-}8{,}68\%)$$

$$\$1.000\ \text{x}\ (\text{-}\,8{,}68\%) = 913{,}15$$

P1	1.000,00	
P2	912,89	-8,7105%

Anos	FCx	VP FCx
1	80,00	72,73
2	80,00	66,12
3	80,00	60,11
4	80,00	54,64
5	80,00	49,67
6	1.080,00	609,63
		912,89

Duration, Convexidade e Risco

$$\Delta\%P = -\frac{D}{(1+R)} \times \Delta R + \frac{1}{2} CX (\Delta R)^2$$

$$\Delta P = -\frac{D}{(1+R)} \times P \times \Delta R + \frac{1}{2} CX \times P \times \Delta R^2$$

$$CX = 10^8 \times \left[\frac{-\Delta P}{P} + \frac{\Delta P}{P} \right]$$

$$CX = \left[\frac{D \times (D+1)}{(1+R)^2} \right]$$

Duration de uma Carteira

- ✓ Média ponderada das durations de cada ARF da carteira

ARF	Vencimento	Valor	Juros
A	6	20.000,00	11,50%
B	8	25.000,00	12,60%
C	15	32.000,00	13,80%

Prazos	12	meses

ARF	VP	VP x Venc		
A	18.940,55	113.643,29		
B	23.098,36	184.786,85		
C	27.225,27	408.379,01	Duration	
	69.264,17	706.809,15	10,20	meses

ARF	Valor	VP
A	20.000,00	18.231,75
B	25.000,00	22.600,23
C	32.000,00	28.668,69
Valor na Duration		69.500,67