Eletromagnetismo I

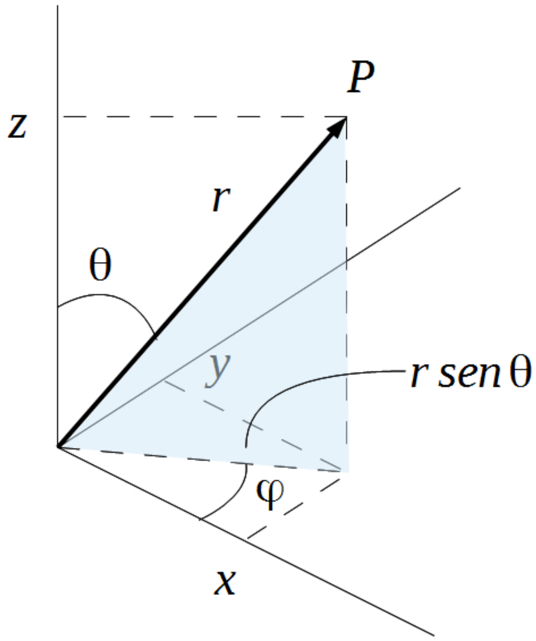
Prof. Dr. R.M.O Galvão - 2º Semestre 2014

Preparo: Diego Oliveira

Aula 3

Coordenadas Esféricas

Em muitos problemas de eletromagnetismo, as coordenadas esféricas desempenham um papel muito muito importante. Por isso vale a pena fazermos uma recordação especial sobre elas. As coordenadas esféricas (r, θ, φ) são definidas pelas relações



$$x = r\,sen\theta\,cos\varphi \qquad\qquad r = \left[x^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}$$

$$y = r\,sen\theta\,sen\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \theta = arccos(z/r)$$

$$z = r\,cos\theta \qquad\qquad \varphi = arctg(y/x)$$

Elementos de Comprimento

Inicialmente vamos determinar os elementos de comprimentos $d\ell_r$, $d\ell_\theta$ e $d\ell_\varphi$ neste sistema de coordenadas; construindo um volume elementar, como fizemos com o sistema de coordenadas cilíndricas.

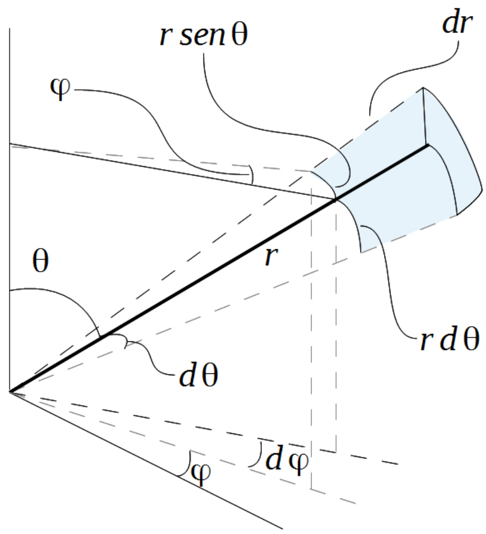
$$r \to r + dr \quad \Rightarrow \quad d\ell_r = dr$$

$$\theta \to \theta + d\theta \quad \Rightarrow \quad d\ell_\theta = r d\theta$$

$$\varphi \to \varphi + d\varphi \quad \Rightarrow \quad d\ell_\varphi = r\, sin\theta d\varphi$$

O elemento de volume é dado por

$$dV = r^2 sen\theta\, d\theta d\varphi dr$$



Versores

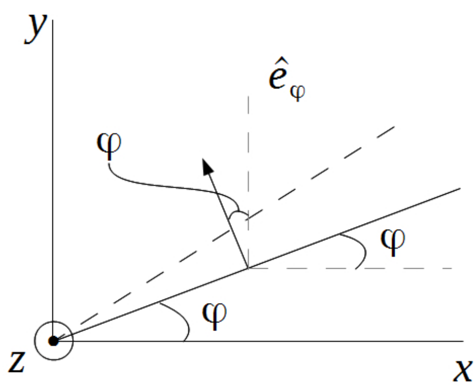
As expressões para os versores, em termos dos versores cartesianos fixos, $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ e $\hat{e}_z$ também são muito importantes. Primeiro vamos ver os versores $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{e}_r = \hat{e}_\perp sen\theta + cos\theta \hat{e}_z \\ \\ \hat{e}_{r_\perp} = cos\varphi \hat{e}_x + sen\varphi \hat{e}_y \end{array}\right\} \qquad \hat{e}_r = sen\theta\, cos\varphi \hat{e}_x + sen\theta\, sen\varphi \hat{e}_y + cos\theta \hat{e}_z$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{e}_\theta = \hat{e}_\perp cos\theta - sen\theta \hat{e}_\perp \\ \\ \hat{e}_{\theta_\perp} = cos\varphi \hat{e}_x + sen\varphi \hat{e}_y \end{array}\right\} \qquad \hat{e}_\theta = cos\theta\, cos\varphi \hat{e}_x + cos\theta\, sen\varphi \hat{e}_y - sen\theta \hat{e}_z$$

Vamos agora ver o versor $\hat{e}_\varphi$, que é paralelo ao plano xy.

$$\hat{e}_\varphi = -sen\varphi\, \hat{e}_x + cos\varphi\, \hat{e}_y$$



$$\therefore \boxed{\begin{array}{c} \hat{e}_r = sen\theta\, cos\varphi\, \hat{e}_x + sen\theta\, sen\varphi\, \hat{e}_y + cos\theta\, \hat{e}_z \\ \hat{e}_\theta = cos\theta\, cos\varphi\, \hat{e}_x + cos\theta\, sen\varphi\, \hat{e}_y - sen\theta\, \hat{e}_z \\ \hat{e}_\varphi = -sen\varphi\, \hat{e}_x + cos\varphi\, \hat{e}_y \end{array}}$$

É importante notar que $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ e $\hat{e}_\varphi$ variam com as coordenadas θ e φ. Portanto, ao fazer um integral, em coordenadas esféricas, de uma grandeza vetorial, não podemos tirar os versores para fora do integrando, como fazemos com os versores cartesianos! Tendo as expressões dos versores, podemos calcular suas derivadas com as coordenadas θ e φ:

$$\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = cos\theta\, cos\varphi\, \hat{e}_z + cos\theta\, sen\varphi\, \hat{e}_y - sen\theta\, \hat{e}_z = \hat{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \varphi} = -sen\theta\, sen\varphi\, \hat{e}_z + sen\theta\, cos\varphi\, \hat{e}_y = sen\theta\,(-sen\varphi \hat{e}_x + cos\varphi \hat{e}_y) \quad \therefore \; \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \varphi} = sen\theta \hat{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -sen\theta\, cos\varphi\, \hat{e}_z - sen\theta\, sen\varphi\, \hat{e}_y - cos\theta\, \hat{e}_z = \hat{e}_\theta \quad \therefore \; \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \varphi} = -cos\theta\, sen\varphi\, \hat{e}_z + cos\theta\, cos\varphi\, \hat{e}_y = cos\theta\,(-sen\varphi \hat{e}_x + cos\varphi \hat{e}_y) \quad \therefore \; \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \varphi} = cos\theta \hat{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0; \qquad \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -cos\varphi \hat{e}_x - sen\varphi \hat{e}_y = -sen\theta \hat{e}_r - cos\theta \hat{e}_\theta$$

Com estas derivadas, podemos escrever, em coordenadas esféricas

$$\boxed{\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}}$$

e o aplicar respeitando as derivadas dos versores. Por exemplo, ou seja, ao aplicar este operador, primeiro fazemos as derivadas, incluindo as derivadas dos versores, depois aplicar o produto escalar ou vetorial. se $\vec{F} = F_r \hat{e}_r + \hat{F}_\theta \hat{e}_\theta + F_\varphi \hat{e}_\varphi$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \cdot \left(F_r \hat{e}_r + \hat{F}_\theta \hat{e}_\theta + F_\varphi \hat{e}_\varphi\right)$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \hat{e}_r \cdot \left(\frac{\partial F_r}{\partial r}\hat{e}_r + F_r\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial F_\theta}{\partial r}\hat{e}_\theta + F_{\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial r}}\right) + \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial r}\hat{e}_\varphi + F_{\frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial r}}\right)$$

$$+\frac{1}{r}\hat{e}_\theta \cdot \left[\left(\frac{\partial F_r}{\partial \theta}\hat{e}_r + F_r\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + F_\theta\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}\hat{e}_\varphi + F_{\frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \theta}}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{r sen\theta}\hat{e}_\varphi \cdot \left[\left(\frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\hat{e}_r + F_r\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \varphi}\right) + \left(\frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\hat{e}_\theta + F_\theta\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \varphi}\right)\right]$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{F_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{F_r}{r} + \frac{cos\theta}{r sen\theta}F_\theta + \frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

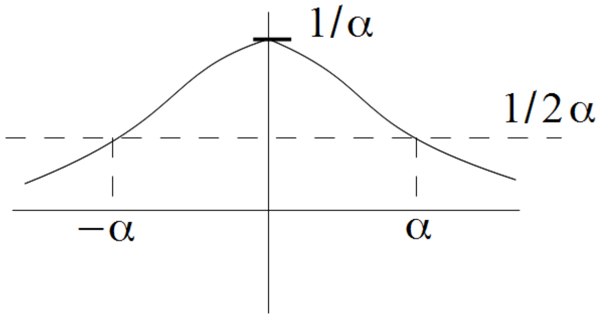
$$\boxed{\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_r\right) + \frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta F_\theta\right) + \frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}}$$

A função Delta de Dirac

Consideremos a função Lorentiziana, definida por

$$\mathscr{L}(z) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}$$

e vamos ver seu comportamento quando $\alpha \to 0$.



Primeiro notemos que seu valor máximo, em $x = 0$, é $1/\alpha$ e que nos pontos $x = \pm\alpha$, o valor de $\mathscr{L}(\S)$ é metade do valor máximo. Portanto o valor de α pode ser considerado como "a largura"da Lorenziana. Antes de tomar o limite $\alpha \to 0$, vamos calcular o calor da integral de $\mathscr{L}(\S)$ sobre todo o espaço.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} dx = \alpha \left[\frac{1}{\alpha} arctg \frac{x}{\alpha}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Portanto, o valor da integral é π, independentemente do valor de α. Então, quando tomarmos o limite $\alpha \to 0$, o pico da Lorentziana cresce com $1/\alpha$ e sua largura decresce com α, de forma que a integral sob a curva fique constante e igual a π!.

No limite $\alpha \to 0$, a função tende para um pico, localizado em $x = 0$, de largura nula e altura infinita, mas tal que sua integral tem um valor finito. A função delta de Dirac pode ser definida como

$$\boxed{\delta(x) = \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\right]} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1}$$

Uma propriedade importante desta função é que ela é par. Formalmente, a função delta de Dirac não é uma função, mas uma função generalizada, ou distribuição, para qual há uma teoria matemática formal apropriadamente desenvolvida. Outra propriedade importante é que a função $\delta(x)$ tem dimensão de inverso de comprimento (se a variável de integração for comprimento) já que sua integral dá o valor 1, que é sem dimensão!

Por outro lado, se fizermos a integral do produto de uma função contínua $f(x)$ pela função delta, teremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx}_{=1} + \underbrace{\left.\frac{df}{dx}\right|_0\int_{-\infty}^{\infty}x\delta(x)dx + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2}{dx^2}\right|_0\int_{-\infty}^{\infty}\ldots+\ldots}_{\underline{\text{todas} = 0 \text{ porque } \delta(x) \text{ só} \neq 0 \text{ em } x\to 0!}}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)}$$

Naturalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1 \qquad (t = x-a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+a)\delta(t-a)dt = f(a)$$