4300204 - Física Matemática I - 2012201

Prof: Jorge Noronha
30/07/2012

Lista de Exercícios 9

1) Obtenha a transformada de Laplace de cada uma das funções abaixo:

a) $f(t) = e^{-at}\, senh(\omega t)$ b) $f(t) = sen(at)cosh(at) - cos(at)senh(at)$

c) $f(t) = cos(t - 2\pi/3)$ se $t > 2\pi/3$ e $f(t) = 0$ se $t < 2\pi/3$.

2) A função de Bessel de ordem zero $J_0(t)$ é definida pela série $J_0(t) = 1 - t^2/2^2 + t^4/(2^2 \times 4^2) - t^6/(2^2 \times 4^2 \times 6^2) + \ldots$. Mostre que a transformada de Laplace de $J_0(t)$ é igual a $1/\sqrt{1+s^2}$.

3) Seja $F(s)$ a transformada de Laplace de $f(t)$. Prove que a transformada de Laplace de $f(at)$ é igual a $(1/a)F(s/a)$.

4) Em cada um dos casos abaixo determine a transformada de Laplace inversa:

a) $F(s) = \frac{6s-4}{s^2-4s+20}$

b) $F(s) = \frac{5s+4}{s^3} - \frac{2s-18}{s^2+9} + \frac{24-30\sqrt{s}}{s^4}$

c) $F(s) = \frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}$

d) $F(s) = \frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}$

e) $F(s) = \frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}$

5) Determine as soluções das equações diferenciais abaixo utilizando transformadas de Laplace:

a) $\ddot{x}(t) + x(t) = t$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -2$.

b) $\ddot{x}(t) + t\dot{x}(t) - x(t) = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

6) Pelo método das transformadas de Laplace ache a solução do seguinte sistema de equações diferenciais: $\dot{x}(t) + \dot{y}(t) = t$, $\ddot{x}(t) - y(t) = e^{-t}$ com as condições iniciais $x(0) = 3$, $\dot{x}(t) = -2$ e $y(0) = 0$.

7) O movimento de um oscilador harmônico unidimensional amortecido é descrito pela equação diferencial $\ddot{x}(t) + 2\alpha\,\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$, com α e ω constantes positivas. Considerando as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, obtenha a solução $x(t)$ para um dos três casos:

(a) $\omega^2 - \alpha^2 > 0$; (b) $\omega^2 - \alpha^2 = 0$; $\omega^2 - \alpha^2 < 0$.

Respostas

1) (a) $\omega/[(s+a)^2 - \omega^2]$; (b) $4a^3/(s^4 + 4a^4)$; (c) $s\, e^{-2\pi s/3}/(s^2+1)$.

4) (a) $2e^{2t}(3cos(4t) + sen(4t))$; (b) $5t + 2t^2 - 2cos(3t) + 6sen(3t) + 4t^3 - 16t^{5/2}/\sqrt{\pi}$; (c) $-e^{-t}/6 - (4/3)e^{2t} + (7/2)e^{3t}$; (d) $-(1/3)e^{-t} - (7/2)t^2e^{2t} + 4te^{2t} + (1/3)e^{2t}$; (e) $(1/27)(24 + 120t + 30\, cos(3t) + 50\, sen(3t))$.

5) (a) $t + cos(t) - 3sen(t)$; (b) $x(t) = t$.

6) $x(t) = 2 + (1/2)t^2 + (1/2)e^{-t} - (3/2)sen(t) + (1/2)cos(t)$, $y(t) = 1 - (1/2)e^{-t} + (3/2)sen(t) - (1/2)cos(t)$.

7) (a) $x_0\, e^{-\alpha t}\, cos(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}\, t) + \frac{v_0 + \alpha x_0}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} e^{-\alpha t}\, sen(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}\, t)$;

(b) $x_0\, e^{-\alpha t} + (v_0 + \alpha x_0)t\, e^{-\alpha t}$;

(c) $e^{-\alpha t}\left(x_0\, cosh(\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\, t) + \frac{v_0 + \alpha x_0}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}\, senh(\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\, t)\right)$.