

Lista de Exercícios 3

- 1) Calcular a integral $\oint dz/z$ ao longo da circunferência de raio igual a 2 centrada no ponto (a) $z_0 = 0$; (b) $z_0 = 4 - 3i$. Explicar a diferença entre as respostas (a) e (b).
- 2) Mostre que (a) $\frac{d}{dz} e^z = e^z$; (b) $\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$; (c) $\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$.
- 3) Prove que a integral $\int_{-1}^2 \frac{dz}{z^2}$ é independente do caminho, contanto que o caminho não passe pela origem. Escolha algum caminho conveniente e determine o valor da integral. Calcule também a integral $\oint_C \frac{dz}{z^2}$, onde C é uma circunferência de raio igual a um centrada na origem, e explique o resultado encontrado.
- 4) Determine se as seguintes funções são inteiras: (i) $f(z) = \cosh z$, (ii) $f(z) = |z| - \sin z$.
- 5) Calcule $\int_{\pi}^{i\pi} \sin(2z) dz$.
- 6) Se existe alguma região comum em que $w_1 = u(x, y) + iv(x, y)$ e $w_2 = w_1^* = u(x, y) - iv(x, y)$ são analíticas, prove que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são constantes.
- 7) Quais os pontos singulares da função $f(z) = 1/(z^2 - 1)$? Calcule a integral $\oint_C \frac{dz}{z^2 - 1}$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$.
- 8) Prove que se $f(z) = u + iv$ é uma função analítica, a função $g(z) = v - iu$ também é.
- 9) Mostre que as condições de Cauchy-Riemann escritas em coordenadas polares são $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$.
- 10) A função $f(z) = (x - y)^2 + 2i(x + y)$ é diferenciável? É analítica? Justifique.
- 11) Se $3x^2y - y^3$ é a parte real de uma função analítica de z , determine a sua parte imaginária.
- 12) Prove que xy^2 não pode ser a parte real de uma função analítica de z .
- 13) Considerando o domínio $r > 0, 0 < \theta < 2\pi$, mostre que a função $u = \ln r$ é harmônica e obtenha a sua conjugada harmônica.
- 14) Mostre que $|\int_i^{2+i} dz \sin z / z| < 2 \cosh(1)$, onde a integração é feita ao longo da reta que une os pontos associados aos limites da integração.

15) Calcule o valor da integral $\int_{-1}^1 \frac{z+1}{z^2} dz$ ao longo da semi-circunferência superior centrada na origem e de raio igual a um.

Respostas

1) (a) $2\pi i$; (b) 0.

3) $-3/2$; 0.

4) (i) sim; (ii) não .

5) $-(\cosh(2\pi) - 1)/2$

7) $z = \pm 1; 0$

10) diferenciável ao longo da linha $y = x - 1$; não é analítica.

11) $3xy^2 - x^3 + c$.

13) $v = \theta + c$

15) $-2 - \pi i$