4300204 - Física Matemática I - 2012201

Prof: Jorge Noronha
30/07/2012

Lista de Exercícios 8

1) Seja a função $f(x)$ definida por $f(x) = x$ para $|x| < 1$ e $f(x) = 0$ para $|x| \geq 1$. Calcule a transformada de Fourier $g(k)$ da função $f(x)$.

2) Considere a transformada de Fourier $g(k)$ da função $f(x)$. Mostre que se (a) $g(-k) = g^*(k)$ então $f(x)$ é real; (b) $g(-k) = -g^*(k)$ então $f(x)$ é puramente imaginária.

3) Seja $\tilde{f}(k)$ a transformada de Fourier de $f(x)$ e $\tilde{f}_a(k)$ a transformada de Fourier de $f(x+a)$. Mostre que $\tilde{f}_a(k) = e^{-ika}\tilde{f}(k)$.

4) Mostre que as transformadas de Fourier em seno e co-seno de $f(x) = e^{-ax}$ são $g_s(k) = \sqrt{2/\pi}\, k/(k^2 + a^2)$ e $g_c(k) = \sqrt{2/\pi}\, a/(k^2 + a^2)$ respectivamente. Sem utilizar integração de contorno (teorema dos resíduos), mostre então que $\int_0^\infty dk\, k\, sen(kx)/(k^2 + a^2) = (\pi/2)e^{-ax}$, com $x > 0$.

5) Determine a transformada de Fourier do pulso triangular $f(x) = c(1 - a|x|)$ se $|x| < 1/a$ e $f(x) = 0$ se $|x| > 1/a$, com a e c constantes positivas.

6) Mostre que a transformada de Fourier de uma função esfericamente simétrica pode ser escrita na forma $g(\vec{k}) = \sqrt{2/\pi}(1/k)\int_0^\infty dr[rf(r)]sen(kr)$.

7) A transformada de Fourier da função $f(\vec{r})$ é dada por $g(\vec{k}) = 1/[(2\pi)^{3/2}\vec{k}^2]$. Determine $f(\vec{r})$ (note que agora você sabe qual é a transformada de Fourier do potencial de Coulomb).

8) Considere a função $f(x) = 1 - |x|/2$, para $|x| \leq 2$ e $f(x) = 0$ para $|x| > 2$. (a) Determine a transformada de Fourier de $f(x)$; (b) usando a relação de Parseval, calcule a integral $\int_{-\infty}^\infty dt\, [sen(t)/t]^4$.

9) Sejam $\tilde{f}(k)$ e $\tilde{g}(k)$ as transformadas de Fourier das funções $f(x)$ e $g(x)$ respectivamente. Mostre que $\int_{-\infty}^\infty dx\, |f(x) - g(x)|^2 = \int_{-\infty}^\infty dk\, |\tilde{f}(k) - \tilde{g}(k)|^2$.

10) A integral de Fourier $I = (\hbar/2\pi i)\int_{-\infty}^\infty d\omega\, \frac{exp(-i\omega t)}{E_0 - i\Gamma/2 - \hbar\omega}$ aparece em problemas de penetração de barreira, espalhamento, teoria de perturbação dependente do tempo e etc. Calcule o valor de I.

11) Um oscilador harmônico que se encontra no estado fundamental é descrito por uma função de onda $\psi_0(x) \sim e^{-x^2/2a^2}$. Determine a função de onda normalizada no espaço dos momentos

$p = \hbar k$, e verifique explicitamente a validade da relação de Parseval neste caso.

12) O fator de forma nuclear $F(\vec{k})$ é a transformada de Fourier da distribuição de carga $\rho(\vec{r})$. Se ao medir o fator de forma encontra-se $F(k) = (2\pi)^{-3/2}(1 + k^2/a^2)^{-1}$, calcule a distribuição de carga correspondente (agora você já sabe fazer a transformada de Fourier do famoso "potential de Yukawa", que apareceu na predição original de Hideki Yukawa para a existência do méson π).

13) Considere a equação diferencial parcial $\partial F(x,t)/\partial t = \partial^2 F(x,t)/\partial x^2$, com $x > 0$ e $t > 0$, sujeita às condições $F(0,t) = 0$ e $F(x,0) = 1$ se $0 < x < 1$ e $F(x,0) = 0$ se $x \geq 1$. Utilizando transformadas de Fourier em seno, mostre que a solução da equação é $F(x,t) = (2/\pi)\int_0^\infty du\, e^{-u^2 t}\, sen(ux)(1 - cos(u))/u$.

Respostas

1) $i\sqrt{2/\pi}(sen(k) - k\,cos(k))/k^2$.

5) $\sqrt{2/\pi}\,ca\,[1 - cos(k/a)]/k^2$.

7) $1/4\pi r$.

8) (a) $\sqrt{2\pi}\,[sen(k)/k]^2$; (b) $2\pi/3$.

10) 0 se $t < 0$, e $exp(-\Gamma t/2\hbar)\,exp(-iE_0 t/\hbar)$ se $t > 0$.

11) $g(p) = a^{1/2}\pi^{-1/4}\hbar^{-1/2}e^{-a^2p^2/2\hbar^2}$.

12) $(a^2/4\pi)\,e^{-ar}/r$.