4300204 - Física Matemática I - 2012201

Prof: Jorge Noronha
30/07/2012

Lista de Exercícios 13

1) Seja $P_n(x)$ o n-ésimo polinômio de Legendre. Prove que $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$. Mostre então que $\int_x^1 P_n(x) = [P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)]/(2n+1)$.

2) Calcule o valor da integral $\int_{-1}^{1} dx\, x^n\, P_n(x)$.

3) Obtenha a expansão em série de Legendre da função $f(x) = |x|$ no intervalo $-1 < x < 1$.

4) Mostre que a solução geral da equação de Laplace $\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 0$ é da forma $\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}[A_{lm}r^l + B_{lm}/r^{l+1}]Y_l^m(\theta,\phi)$, onde $Y_l^m(\theta,\phi)$ é o harmônico esférico. Determine os coeficientes A_{lm} e B_{lm} no caso em que $\Phi(r,\theta,\phi)$ representa o potencial eletrostático no interior de uma esfera de raio a, sabendo-se que sobre a superfície da esfera $\Phi(a,\theta,\phi) = f(\theta,\phi)$ e que o potencial é finito em todos os pontos.

5) Sabendo-se que $\int_{-1}^{1} dx\, 1/\sqrt{(1-x)(1-2xt+t^2)} = \sqrt{2/t}\;\; ln[(1+\sqrt{t})/(1-\sqrt{t})]$ para $0 < t < 1$, calcule o valor de $\int_{-1}^{1} dx\, P_n(x)/\sqrt{1-x}$.

Respostas

2) $2^{n+1}(n!)^2/(2n+1)!$

3) $1/2 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\{(2k-2)!(4k+1)/[2^{2k}(k-1)!(k+1)!]\}P_{2k}(x)$, $-1 < x < 1$.

4) $B_{lm} = 0$, $A_{lm} = (1/a^l)\int_0^{\pi} d\theta\, sen(\theta)\int_0^{2\pi} d\phi\; Y_l^{m\,*}(\theta,\phi)\, f(\theta,\phi)$.

5) $2\sqrt{2}/(2n+1)$.