4300204 - Física Matemática I - 2012201

Prof: Jorge Noronha
30/07/2012

Lista de Exercícios 5

1) Para cada uma das funções $f(z)$ abaixo e cada caminho C considerado, obtenha o valor de $\int_C f(z)dz$:

(i) $f(z) = y - x - 3x^2 i$; onde C é o segmento de reta que une os pontos $z = 0$ e $z = 1 + i$.
(ii) $f(z) = y - x - 3x^2 i$; onde C consiste de dois segmentos de reta, um deles ligando os pontos $z = 0$ e $z = i$ e o outro de $z = i$ a $z = 1 + i$.
(iii) $f(z) = (z + 2)/z$; C é a semi-circunferência $z = 2e^{i\theta}$, com $0 \leq \theta \leq \pi$.
(iv) $f(z) = (z + 2)/z$; C é a circunferência $z = 2e^{i\theta}$, onde θ varia entre $-\pi$ e π.

2) Seja C o contorno do quadrado com vertíces nos pontos $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$ e $z = i$. Mostre que $\oint_C exp(\pi z^*)dz = 4(e^\pi - 1)/\pi$.

3) A delta de Krönecker é definida por $\delta_{mn} = 1$ para $m = n$, $\delta_{mn} = 0$ para $m \neq n$. Mostre que $(1/2\pi i) \oint dz\, z^{m-n-1}$ com m e n inteiros, e com o contorno no sentido positivo englobando a origem somente uma vez, é uma representação da delta de Krönecker.

4) Quando C é a circunferência $z - z_0 = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi,\ R > 0)$ é percorrida no sentido anti-horário, mostre que $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 2\pi i \delta_{1n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

5) Calcule a integral $\oint_C e^{-z}/(z + 1)dz$, onde C representa a elipse $(x^2/4) + y^2 = 1$.

6) Calcular o valor da integral $\oint_C \frac{tan(z)}{(z-(\pi/4))^2}dz$, onde C é circunferência $|z| = 1$.

7) Seja $f(z)$ uma função analítica no interior e sobre uma circunferência C de raio R centrada em $z = a$. Se $|f(z)| \leq M$ sobre C, mostre que $|f^{(n)}(a)| \leq n!M/R^n$.

8) Se o contorno C é a circunferência $z = exp(i\theta)$, com θ no intervalo $[-\pi, \pi]$, e k uma constante real qualquer, mostre que $\oint_C exp(kz)dz/z = 2\pi i$. Escreva a integral em termos de θ e obtenha a fórmula $\int_0^\pi d\theta\, e^{kcos\theta} cos(ksen\theta) = \pi$.

9) Considere a série de potência $\sum_{n=0}^\infty \frac{b_n}{n!} z^n = z/(e^z - 1)$. Determine o raio de convergência da série e os cincos primeiros coeficientes b_n (números de Bernoulli).

10) Seja $P(z)$ um polinômio. Prove que $\oint_C P(z)/(z - a)\, dz = 2\pi i P(a)$, onde o contorno C engloba o ponto $z = a$.

11) Mostre que (a) $1/z^2 = 1/4 + (1/4) \sum_{n=1}^\infty (-1)^n (n + 1)((z - 2)/2)^n$, para $|z - 2| < 2$.

(b) $1/(4z-z^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$, para $0<|z|<4$.

12) Expanda $senh(z)$ em potências de $z-\pi i$ e prove que

$$\lim_{z\to i\pi}\frac{senh(z)}{z-\pi i}=-1 \tag{1}$$

13) Obtenha todas as expansões de Laurent da função $f(z)=1/[(z-1)(z+2)]$ em torno da origem.

14) A série $sec(z)=E_0-(E_2/2!)z^2+(E_4/4!)z^4-\ldots$ define os números de Euler E_{2n}. Mostre que $E_0=1$, $E_2=-1$, $E_4=5$, e $E_6=-61$.

Respostas

1) (i) $1-i$; (ii) $(1-i)/2$; (iii) $-4+2\pi i$; (iv) $4\pi i$

5) $2\pi ie$.

6) $4\pi i$.

9) $R=2\pi$; $b_0=1$, $b_1=-1/2$, $b_2=1/6$, $b_3=0$, $b_4=-1/30$

13) $f(z)=-(1/6)\sum_{n=0}^{\infty}[2^{n+1}+(-1)^n](z/2)^n$, $|z|<1$.

$f(z)=(1/3)\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}+(1/6)\sum_{n}^{\infty}(-1)^{n+1}(z/2)^n$, $1<|z|<2$.

$f(z)=(1/6)\sum_{n=0}^{\infty}[2^{-n}-(-1)^n](2/z)^{n+1}$, $|z|>2$.