4300204 - Física Matemática I - 2012201

Prof: Jorge Noronha
30/07/2012

Lista de Exercícios 7

1) Determine a série de Fourier da função periódica $f(x) = cos(px)$, $-\pi \leq x \leq \pi$, com $p \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, e a partir do resultado mostre que $\pi/4 = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} 1/(16n^2 - 1)$.

2) A variação de pressão $f(t) = \Delta P/P_0$ em torno da pressão atmosférica, que corresponde a uma onda sonora que se propaga no ar é dada por $f(t) = 1$, para $0 \leq t < T/4$, $f(t) = -7/8$, para $T/4 \leq t < T/2$, $f(t) = 7/8$, para $T/2 \leq t < 3T/4$ e $f(t) = -1$ se $3T/4 \leq t < T$ onde T é o período. Considerando a decomposição dessa onda nos seus harmônicos, que harmônico pode ser detectado com mais clareza? Dê a intensidade relativa ($\sim b_n^2/b_1^2$ onde b_n é o n-ésimo coeficiente da série de Fourier) de cada um dos 10 primeiros harmônicos.

3) Determine a série de Fourier que corresponde à função $f(x) = 2x$ para $0 \leq x \leq 3$, e $f(x) = 0$ para $-3 < x < 0$, cujo período é igual a 6.

4) Obtenha a série de Fourier de senos que representa a função $f(x) = e^x$ no intervalo $(0, \pi)$.

5) Obtenha a série de Fourier de co-senos que representa a função $f(x) = e^x$ no intervalo $(0, \pi)$.

6) Ache a série de Fourier da função $f(x) = 0$, $-5 < x < 0$ e $f(x) = 3$ para $0 < x < 5$, cujo período é igual a 10.

7) Uma corrente alternada $i(t) = A\, sen(\omega t)$ passou por a) um retificador de meia onda que transmite a corrente somente quando ela passa no sentido positivo e b) um retificador de onda completa, que transmite o valor absoluto (instantâneo) da corrente. Mostre que no primeiro caso a saída é $A/\pi + (A/2)sen(\omega t) - (2A/\pi)\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} cos[(n+1)\omega t]/(n(n+2))$, e no segundo caso é $2A/\pi - (4A/\pi)\sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty} cos(n\omega t)/(n^2 - 1)$.

8) Utilizando a equação de Parseval, e considerando a função $f(x) = -1$ se $-\pi < x < 0$ e $f(x) = 1$ se $0 < x < \pi$, mostre que $1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \ldots = \pi^2/8$.

9) Considere a função de período $T = 2\pi$, $f(x) = e^x$ para $-\pi < x < \pi$. Obtenha os coeficientes da série complexa de Fourier c_n.

10) Uma corda de comprimento L vibra presa nas suas extremidades $x = 0$ e $x = L$. O movimento é descrito pela equação de onda $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$. Supondo que a solução seja da forma $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\, sen(n\pi x/L)$, determine os coeficientes $b_n(t)$ considerando as condições iniciais $u(0, x) = f(x)$ e $\partial u(0, x)/\partial t = g(x)$.

Respostas

2) O segundo harmônico ($n = 2$); $1 : 225 : 1/9 : 0 : 1/25 : 25 : 1/49 : 0 : 1/81 : 9$.

3) $3/2 + (6/\pi)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{[(-1)^n-1]}{\pi n^2}\, cos(n\pi x/3) - \frac{(-1)^n}{n}\, sen(n\pi x/3)\right\}$.

4) $(2/\pi)\left[\frac{(e^\pi+1)}{2} sen(x) - 2\frac{(e^\pi-1)}{5} sen(2x) + 3\frac{(e^\pi+1)}{10} sen(3x) + \ldots\right]$.

5) $(2/\pi)\left[\frac{(e^\pi-1)}{2} - \frac{(e^\pi+1)}{2} cos(x) + \frac{(e^\pi-1)}{5} cos(2x) - \frac{(e^\pi+1)}{10} cos(3x) \ldots\right]$.

9) $c_n = (senh(\pi)/\pi)(-1)^n(1 + in)/(n^2 + 1)$.

10) $b_n(t) = A_n\, cos(n\pi vt/L) + B_n\, sen(n\pi vt/L)$, onde $A_n = (2/L)\int_0^L dx\, f(x) sen(n\pi x/L)$ e $B_n = (2/n\pi v)\int_0^L dx\, g(x) sen(n\pi x/L)$.