

Lista de Exercícios 1

1) Calcular: (a) $Im[(2+i)/(3+4i)]$; (b) $|(1+4i)/(4+i)|$; (c) $Im(1/z^2)$; (d) $Re[(1+i)^2/(3+2i)]$; (e) $[(1-2i)/(3+4i)]^*$

2) Demonstre as seguintes relações

- (a) $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$
 (b) $\sqrt{2}|z| \geq |Re(z)| + |Im(z)|$
 (c) $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$

3) Determine o lugar geométrico dos pontos do plano complexo z para os quais

- (a) $|z-1| = 1$ (b) $Re(z^2) = 1$ (c) $|(z+1)/(z-1)| = \sqrt{2}$ (d) $1/|z| = \sqrt{2}$

4) Use a fórmula de De Moivre para obter as relações $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ e $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$.

5) Calcular todas as soluções da equação $z^4 + 1 = 0$.

6) Demonstre as seguintes identidades que aparecem na difração de fendas múltiplas

- (a) $\sum_{n=0}^{N-1} \cos(nx) = \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \cos\left[\frac{(N-1)x}{2}\right]$ (b) $\sum_{n=0}^{N-1} \sin(nx) = \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \sin\left[\frac{(N-1)x}{2}\right]$

7) Calcular todas as soluções da equação $z^6 + 3z^3 + 1 = 0$.

8) Expressar os números complexos abaixo na forma cartesiana $z = x + iy$, onde $x, y \in \text{reais}$:

- (a) $e^{2+i\pi/4}$ (b) $\sin(\pi/4 + 2i)$ (c) $\cosh(2 + i\pi/4)$

Respostas

1) (a) $-1/5$; (b) 1 ; (c) $-2xy/(x^2 + y^2)^2$; (d) $4/13$; (e) $-1/5 + 2i/5$.

3) (a) circunferência de raio igual a 1 centrada em 1; (b) hipérbole $x^2 - y^2 = 1$; (c) circunferência de raio igual a $2\sqrt{2}$ centrada em 3; (d) circunferência de raio igual a $\sqrt{2}/2$ centrada na origem.

5) $\pm\sqrt{2}(1+i)/2$; $\pm\sqrt{2}(1-i)/2$.

7) $\frac{1}{2} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{1/3} (1 \pm \sqrt{3}i)$; $-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{1/3}$; $\frac{1}{2} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{1/3} (1 \pm \sqrt{3}i)$.

8) (a) $\sqrt{2}e^2(1+i)/2$, (b) $\sqrt{2}[\cosh(2) + i \sinh(2)]/2$, (c) $\sqrt{2}[\cosh(2) + i \sinh(2)]/2$.