4300204 - Física Matemática I - 2012201

Prof: Jorge Noronha
30/07/2012

Lista de Exercícios 12

1) Obtenha a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz às condições de contorno $u(0,y) = 0$ e $u(a,y) = 0$ para $0 < y < b$, $u(x,b) = 0$ e $u(x,0) = h(x)$ para $0 \leq x \leq a$.

2) Considere uma haste delgada e uniforme de comprimento L cuja distribuição de temperatura inicial é $u(0,x) = sen(\pi x/L)$, $0 \leq x \leq L$. As duas extremidades da haste estão termicamente isoladas, isto é, $\partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,L) = 0$. Calcule a temperatura $u(t,x)$ assumindo que ela satisfaz a equação de difusão $\partial_t u(t,x) = \alpha^2 \partial_x^2 u(t,x)$, onde $\alpha > 0$. Qual é a temperatura da haste no estado estacionário (quando $t \to \infty$)?

3) Mostre que a solução formal da equação $\partial u(x,t)/\partial t = \alpha^2 \partial^2 u(x,t)/\partial x^2 + F(x,t)$, para $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, com a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, é dada por

$u(x,t) = \int_{\infty}^{\infty} dy\, G[x-y, \alpha^2 t] f(y) + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G[x-y, \alpha^2(t-\tau)] F(y,\tau)$,

onde $G[x,t] = 1/\sqrt{4\pi t}\; exp(-x^2/4t)$.

4) Determine a solução da equação $\partial^2 u(x,t)/\partial x^2 = (1/v^2)\partial^2 u(x,t)/\partial t^2 - a\, sen(\pi x)$, onde a é uma constante positiva, com as condições de contorno $u(0,t) = u(1,t) = 0$ e condições iniciais $u(x,0) = 0$ e $\partial u(x,t)/\partial t(x,0) = 0$.

5) As oscilações livres de uma membrana uniforme retangular, de lados a e b, são descritas pela equação diferencial $\partial^2 u(x,y,t)/\partial x^2 + \partial^2 u(x,y,t)/\partial y^2 = (1/\gamma^2)\partial^2 u(x,y,t)/\partial t^2$, onde γ^2 é a razão entre a tensão τ da membrana e a sua densidade ρ. Considerando fixas as bordas da membrana, e as condições iniciais $u(x,y,0) = 0.1\, sen(\pi x/a) sen(\pi y/b)$ e $\partial u/\partial t(x,y,0) = 0$, calcular

a) a freqüência da oscilação;
b) a velocidade máxima atingida pelo ponto central $(x,y) = (a/2, b/2)$ da membrana.

6) Usando transformadas de Fourier em seno, determine a solução formal da equação de condução de calor $\alpha^2 \partial^2 u(x,t)/\partial x^2 = \partial u(x,t)/\partial t$, $(0 \leq x < \infty, 0 \leq t < \infty)$, sujeita às condições $u(x,0) = f(x)$ e $u(0,t) = 0$.

7) Determine a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz às condições de contorno $u(0,y) = 0$ e $u(a,y) = f(y)$ para $0 < y < b$, $u(x,b) = 0$ e $u(x,0) = h(x)$ para $0 \leq x \leq a$.

Respostas

1) $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, sen(n\pi x/a) senh[n\pi(b-y)/a]$, onde $c_n = [(2/a)/senh(n\pi b/a)] \int_0^a dx \, sen(n\pi x/a) h(x)$.

2) $u(t,x) = 2/\pi + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, exp(-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2) \, cos(n\pi x/L)$, onde $c_n = 0$, n ímpar, $c_n = -4/[(n^2-1)\pi]$, n par; $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 2/\pi$.

4) $u(x,t) = (a/\pi^2) sin(\pi x)[1 - cos(\pi v t)]$.

5) (a)$(\gamma/2)(1/a^2 + 1/b^2)^{1/2}$; (b) $(\pi/10)\gamma(1/a^2 + 1/b^2)^{1/2}$.

6) $u(x,t) = [1/(2\alpha\sqrt{\pi t})] \int_0^{\infty} dy \, f(y)[exp(-(y-x)^2/4\alpha^2 t) - exp(-(y+x)^2/4\alpha^2 t)]$.

7) $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n \, sen(n\pi x/a) senh[n\pi(b-y)/a] + d_n senh(n\pi x/b) sen(n\pi y/b)\}$, onde

$c_n = [(2/a)/senh(n\pi b/a)] \int_0^a dx \, sen(n\pi x/a) h(x)$ e

$d_n = [(2/b)/senh(n\pi a/b)] \int_0^b dy \, sen(n\pi y/b) f(y)$.