4300204 - Física Matemática I - 2012201

Prof: Jorge Noronha
30/07/2012

Lista de Exercícios 11

1) Mostre que a transformação $(x, y) \to (\xi, \eta)$, com $\xi = x + y - cos(x)$ e $\eta = x - y + cos(x)$, reduz a equação $\partial^2 u/\partial x^2 - 2sen(x)\partial^2 u/\partial x\partial y - cos^2(x)\partial^2 u/\partial y^2 - cos(x)\partial u/\partial y = 0$ à forma canônica $\partial^2 u/\partial\xi\partial\eta = 0$.

2) Mostrar que a solução da equação de onda $\partial^2 u/\partial x^2 - (1/v^2)\partial^2 u/\partial t^2 = 0$, com as condições iniciais $u(x, 0) = f(x)$ e $\partial u/\partial t(x, 0) = g(x)$, é dada pela solução original de D'Alembert

$$u(x, t) = (1/2)[f(x - vt) + f(x + vt)] + (1/2v)\int_{x-vt}^{x+vt} dx'\, g(x') \tag{1}$$

3) Determine se o método de separação de variáveis pode ser usado para substituir cada uma das equações diferenciais parciais abaixo por pares de equações diferenciais ordinárias

a) $x\partial^2 u/\partial x^2 + \partial u/\partial t = 0$.
b) $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial u/\partial x\partial t + \partial u/\partial t = 0$.
c) $\partial^2 u/\partial x^2 + (x + y)\partial^2 u/\partial y^2 = 0$.

4) Ache a solução do seguinte problema de condução de calor:

(i) $100\, \partial^2 u/\partial x^2 = \partial u/\partial t$, $0 < x < 1$, $t > 0$.
(ii) $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$, $t > 0$.
(iii) $u(x, 0) = sen(2\pi x) - 2sen(5\pi x)$, $0 \leq x \leq 1$.

5) Determine o potencial eletrostático $V(x, y)$ na região $x \geq 0$ limitada por 3 planos $x = 0$, $y = 0$ e $y = b$, sabendo-se que o plano $x = 0$ é mantido a um potencial uniforme V_0 e os outros 2 planos são mantidos a um potencial nulo. Considere que não há cargas elétricas no interior da região .

6) Considere a solução da equação de onda $\partial^2 u/\partial x^2 - (1/v^2)\partial^2 u/\partial t^2 = 0$, para $0 < x < L$ e $t > 0$, com as condições

(i) $u(0, t) = 0$, (ii) $u(L, t) + L\partial u/\partial x(L, t) = 0$, $t \geq 0$.
(iii) $u(x, 0) = f(x)$, (iv) $\partial u/\partial t(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq L$.

Usando o método de separação de variáveis $u(x, t) = X(x)T(t)$,

(a) Mostre que $X(x)$ deve satisfazer à equação $X'' + \lambda^2 X = 0$, onde λ^2 é uma constante positiva;

(b) Mostre que para se obter uma autofunção $X(x)$ não-trivial, o parâmetro λ deve satisfazer à relação $tan(\lambda L) = -\lambda L$;

(c) Calcule os 3 valores mais baixos possíveis para λ.

7) A equação de condução de calor em duas dimensões pode ser expressa em coordenadas polares planas como $\alpha^2[\partial^2 u/\partial r^2 + (1/r)\partial u/\partial r + (1/r^2)\partial^2 u/\partial \theta^2] = \partial u/\partial t$. Supondo que $u(r, \theta, t) = R(r)F(\theta)T(t)$, obtenha as equações diferenciais ordinárias satisfeitas por $R(r)$, $F(\theta)$, e $T(t)$.

8) Uma partícula atômica está confinada dentro de uma caixa retangular de lados a, b, e c. A partícula é descrita por uma função de onda ψ que satisfaz à equação de Schrödinger $(-\hbar^2/2m)\nabla^2\psi = E\psi$. Sabendo que a função de onda se anula em todos os pontos da superfície da caixa, calcule a energia E_0 do estado fundamental da partícula.

Respostas

3) A equação do ítem (c) não é separável.

4) $u(x, t) = sen(2\pi x)\, exp[-(20\pi)^2 t] - 2sen(5\pi x)\, exp[-(50\pi)^2 t]$.

5) $V(x, y) = (4V_0/\pi) \sum_{n=0}^{\infty} [1/(2n + 1)] e^{-(2n+1)\pi x/b} sen[(2n + 1)\pi y/b]$.

6) $\lambda_1 \simeq 2.0288/L$, $\lambda_2 \simeq 4.9132/L$, $\lambda_3 \simeq 7.9787/L$.

7) $T'(t) + (\alpha\lambda)^2 T(t) = 0$, $F''(\theta) + \mu^2 F(\theta) = 0$, $r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda^2 r^2 - \mu^2)R(r) = 0$, λ e μ constantes.

8) $E_0 = [(\pi\hbar)^2/2m](1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2)$.