Mecânica dos Fluidos II (PME 2330)
Gabarito Primeira Prova - 2013

1. (**4 pontos**) Ocorre o aparecimento de uma fenda na lateral do casco de uma barcaça que transporta óleo. Essa fenda tem um comprimento W na direção ortogonal ao plano da figura. O óleo, sendo mais leve que a água, escapa pela lateral da barcaça formando um filme de espessura h entre o casco e a água, até chegar à superfície livre. A lateral da barcaça forma um ângulo θ com a direção vertical. A aceleração da gravidade é g e segue a direção vertical com sentido para baixo conforme a figura. O atrito viscoso entre o óleo e a água é desprezível e temos uma distribuição hidrostática de pressões na água. A viscosidade dinâmica e densidade do óleo são dadas por μ_o e ρ_o e a viscosidade dinâmica e densidade da água são dadas por μ_w e ρ_w.

a) Determine o gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial x}$ na interface óleo-água. (1 ponto)

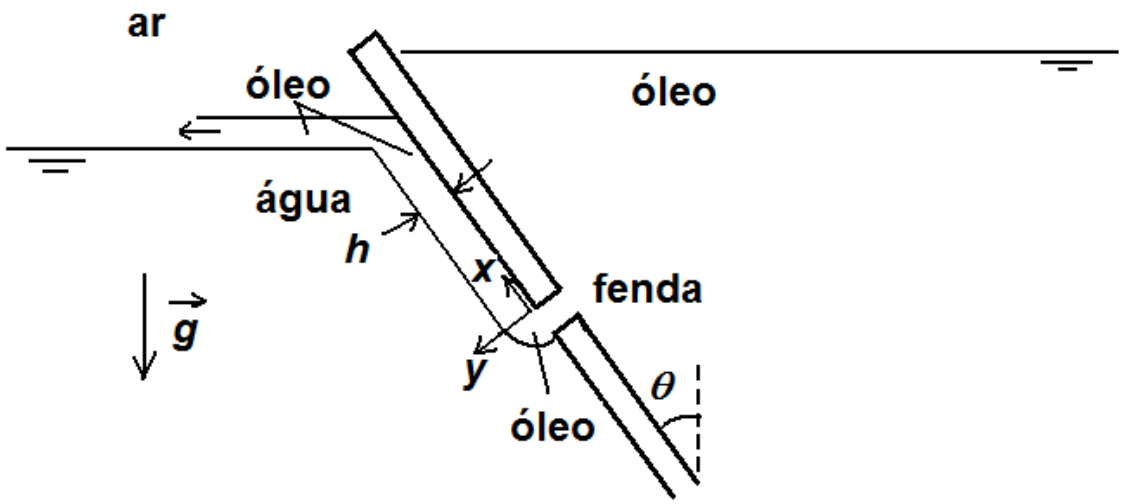
b) Determine o perfil de velocidade $u(y)$ no filme de óleo. Considere escoamento permanente, desenvolvido (perfil de velocidades é o mesmo ao longo de x), incompressível e bidimensional. (2 pontos)

c) Determine a vazão volumétrica de óleo Q que escapa pela fenda. (1 ponto)

(Extraído e adaptado de J. A. Fay, "Introduction to Fluid Mechanics")

Continuidade: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$

Navier-Stokes, componente x: $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+G_x+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$



Solução:

a) Se temos uma distribuição hidrostática de pressões na água o gradiente $\frac{\partial p}{\partial x}$ entre esta e o óleo é: $\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho_w g\cos\theta$

b) Da hipótese de escoamento desenvolvido no filme de óleo, da equação da continuidade:

$\overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}^{0}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad v=0$

Da equação de Navier-Stokes na direção *x*:

$$\overbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}^{0}+u\overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}^{0}+\overbrace{v}^{0}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu_o}{\rho_o}\left(\overbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{0}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-g\cos\theta$$

Resulta:

$$\frac{d^2u}{d\,y^2}=-\frac{(\rho_w-\rho_o)g\cos\theta}{\mu_o}$$

Essa equação pode ser integrada com condições de contorno:

$u=0$ se $y=0$ (não-escorregamento)

$\frac{du}{dy}=0$ se $y=h$ (sem atrito viscoso na interface entre óleo e água)

Resulta: $u=\frac{(\rho_w-\rho_o)g\cos\theta}{\mu_o}\left(h-\frac{y}{2}\right)y$

c) Integrando o perfil de velocidades:

$$Q=W\int_0^h u\,dy$$

Resulta: $Q=\frac{W(\rho_w-\rho_o)g\,h^3\cos\theta}{3\mu_o}$

2. (**6 pontos**) Considere o escoamento com forças de inércia e de volume desprezíveis de um óleo incompressível de viscosidade μ e massa específica ρ, no espaço entre um disco de raio a e uma superfície paralela separados por uma distância h pequena, conforme mostrado na figura. O disco é deslocado na direção da superfície com uma velocidade V, espremendo o fluido na direção radial. Nestas condições, calcular a força F necessária para deslocar o disco.
Para resolver este problema, considerar que o campo de velocidade (em coordenadas cilíndricas) é da forma $u_r=u_r(r,z)$, $u_z=u_\theta=0$ e seguir o seguinte roteiro:

a) Demonstrar que a velocidade radial é da forma $u_r(r,z)=\frac{f(z)}{r}$. (0.5 pontos)

b) Demonstrar que a distribuição de pressão é puramente radial, isto é $p=p(r)$, assim como que a distribuição de velocidade radial resulta localmente Couette, isto é, $u_r(r,z)=-\frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dr}\frac{z}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)$. (2 pontos)

c) Calculando a vazão volumétrica que atravessa a superfície lateral na posição r e aplicando a conservação da massa para um volume de controle do fluido encerrado no espaço interno até a posição r, demonstrar que o gradiente de pressão resulta $\frac{dp}{dr}=-\frac{6\mu V}{h^3}r$. (1,5 pontos)

d) Considerando como condição de contorno $p(a)=0$, calcular a distribuição de pressão e demonstrar que a força resulta $F=\frac{3\pi\mu a^4V}{2h^3}$. (1,5 pontos)

e) Considerando como termos representativos da força de inércia e força viscosa respectivamente a $u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}$ e $\nu\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}$, fazer uma análise de ordens de grandeza e demonstrar

que a condição para que o escoamento seja considerado de inércia desprezível é $\frac{V\,h}{\nu} << 1$. (0,5 pontos)

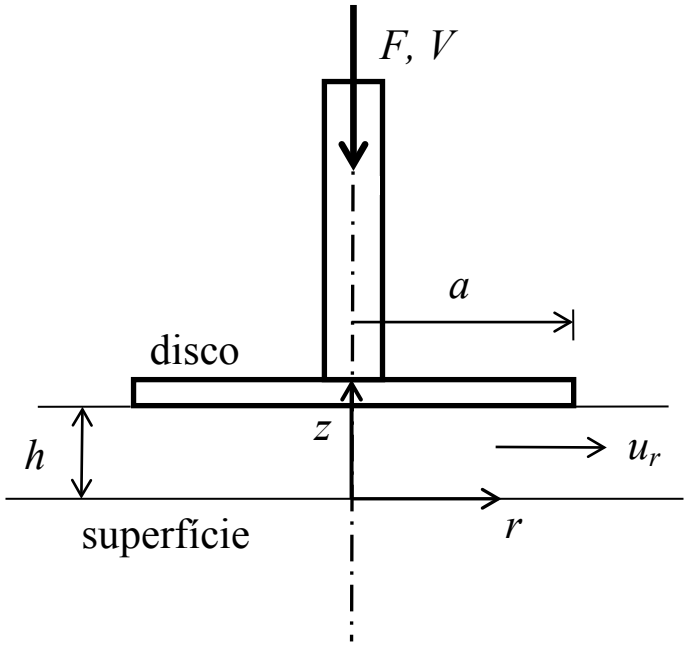
Continuidade: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,u_r\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$

Navier-Stokes, componente r:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\theta^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+G_r+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-\frac{u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right]$$

Navier-Stokes, componente z:

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+G_z+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]$$



Solução:

a) Da equação de continuidade: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,u_r\right)=0 \;\Rightarrow\; r\,u_r=f\left(z\right) \;\Rightarrow\; u_r=\frac{f\left(z\right)}{r}$

b) Da equação de Navier-Stokes na componente z, resulta $\frac{\partial p}{\partial z}=0$; como o problema tem simetría de revolução, resulta $p=p(r)$.

Calculamos os termos para substituir na equação de Navier-Stokes, componente r :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}=-\frac{f}{r^2} \quad ; \quad r\frac{\partial u_r}{\partial r}=-\frac{f}{r} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)=\frac{f}{r^2}$$

Substituindo, com a condição de escoamento de inércia desprezível, resulta:

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\mu\left(\frac{f}{r^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2 f}{dz^2}-\frac{f}{r^3}\right)=\frac{\mu}{r}\frac{d^2 f}{dz^2} \;\Rightarrow\; \frac{r}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{d^2 f}{dz^2}=A=cte$$

Para calcular $f\left(z\right)$, integramos a expressão anterior, obtendo:

$$f(z)=\frac{1}{2}A z^2+B z+C$$

Da condição de contorno $u_r(r,0)=u_r(r,h)=0$ resulta $f(0)=f(h)=0$; daqui resultam $C=0$, $B=-\frac{1}{2}A h$. Substituindo, obtemos:

$$f(z)=-\frac{1}{2}A h^2\,\frac{z}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)=-\frac{1}{2}\frac{r h^2}{\mu}\frac{dp}{dr}\frac{z}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)$$

$$u_r(r,z)=-\frac{1}{2}\frac{h^2}{\mu}\frac{dp}{dr}\frac{z}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)$$

c) Calculamos a vazão volumétrica:

$$Q(r)=\int_0^h u_r\,2\pi r\,dz=-\frac{\pi h^3 r}{\mu}\frac{dp}{dr}\int_0^1 z^*\left(1-z^*\right)dz^*=-\frac{\pi h^3 r}{6\mu}\frac{dp}{dr}$$

Aplicando a conservação da massa no volume de controle do fluido até o raio r, temos:

$$Q(r)=V\pi r^2$$

Eliminando a vazão volumétrica, resulta:

$$-\frac{\pi h^3 r}{6\mu}\frac{dp}{dr}=V\pi r^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{dp}{dr}=-\frac{6\mu V}{h^3}r$$

d) Integrando entre r e a, calculamos a distribuição de pressão e a força:

$$p(a)-p(r)=-\frac{3\mu V}{h^3}\left(a^2-r^2\right)\quad\Rightarrow\quad p(r)=\frac{3\mu V a^2}{h^3}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$$

$$F=\int_0^a p(r)2\pi r\,dr=\frac{6\pi\mu V a^4}{h^3}\int_0^1 r^*\left(1-r^{*2}\right)dr^*=\frac{3\pi\mu V a^4}{2h^3}$$

e) Fazendo uma análise de ordens de grandeza, temos que:

$$u_r\propto\frac{Q}{r h}\quad\Rightarrow\quad\left|u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|\propto\frac{Q}{r h}\frac{Q}{r h r}=\frac{Q^2}{r^3 h^2}\quad;\quad\left|\nu\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right|\propto\nu\frac{Q}{r h h^2}=\nu\frac{Q}{r h^3}$$

$$\left|u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|<<\left|\nu\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right|\quad\Rightarrow\quad\frac{Q^2}{r^3 h^2}<<\nu\frac{Q}{r h^3}\quad\Rightarrow\quad\frac{Q}{r^2}<<\frac{\nu}{h}$$

Como $Q\propto V r^2$, resulta finalmente $\frac{V h}{\nu}<<1$.