

ATIVIDADE DE 06 04 2017 – SPLINE CÚBICO

Enunciado da Atividade.

São dados os pontos

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0	2	1	0

O objetivo é achar uma função $S(x)$ que valha $p_1(x)$ em $[-1,0]$, $p_2(x)$ em $[0,1]$ e $p_3(x)$ em $[1,2]$, e que, adicionalmente, tenha segunda derivada contínua e satisfaça certas condições de contorno.

A proposta é resolver dois problemas distintos, que diferem pelas condições de contorno impostas. Problema 1: Grampear os extremos com derivada zero. Problema 2: Impor segunda derivada nula nos extremos (que é a chamada condição de contorno ‘natural’).

Roteiro.

Primeira parte: providências comuns aos dois problemas.

- 1) Considerar como incógnitas do problema as derivadas d_0, d_1, d_2, d_3 nos pontos $-1, 0, 1, 2$, respectivamente.
- 2) Usando Tabela de Diferenças Divididas com derivada, para dois pontos, obtenha as expressões de p_1, p_2 e p_3 , que dependerão, evidentemente, das constantes/incógnitas. Por exemplo, $p_1(-1) = 0, p_1'(-1) = d_0, p_1(0) = 2$ e $p_1'(0) = d_1$.
- 3) Derive até segunda ordem os 3 polinômios obtidos. Ou seja, obtenha $p_1'(x), p_1''(x), p_2'(x), p_2''(x), p_3'(x), p_3''(x)$.
- 4) Escreva agora as equações que garantirão continuidade da segunda derivada nos nós internos, que neste caso são dois: $x = 0$ e $x = 1$. As equações são:

$$\begin{aligned}p_1''(0) &= p_2''(0) \\ p_2''(1) &= p_3''(1)\end{aligned}$$

O que é para fazer? Pegue as expressões obtidas no item anterior, substitua os valores respectivos e monte as equações, que, agora, serão equações lineares nas incógnitas.

Segunda parte: equações provenientes das condições de contorno e solução

Problema 1: Grampear os extremos com derivada zero significa impor

$$\begin{aligned}p_1'(-1) &= 0 \\ p_3'(2) &= 0\end{aligned}$$

5.1) Escreva as duas equações como equações lineares nas incógnitas. Depois, observe que esse trabalho foi inútil: era só impor $d_0 = 0 = d_3$.

6.1) Substitua $d_0 = d_3 = 0$ nas duas equações do item 4), ficando com apenas duas equações, nas incógnitas d_1 e d_2 . Resolva o sistema.

7.1) Explícite os 3 polinômios obtidos, agora que você conhece d_0, d_1, d_2, d_3 .

8.1) Faça prova real. Deu certo?

Problema 2: Condições de contorno ‘naturais’.

A imposição agora é colocar segunda derivada nula nos extremos, isto é:

$$p_1''(-1) = 0$$

$$p_3''(2) = 0$$

5.2) Explícite essas duas equações, em função das incógnitas, e reúna-as com as duas equações do item 4), formando um sistema linear.

6.2) Resolva o sistema linear. Lembra de “escalonamento”, “eliminação Gaussiana”, etc? Pois então, use!

7.2) Explícite os 3 polinômios obtidos.

8.2) Faça prova real.