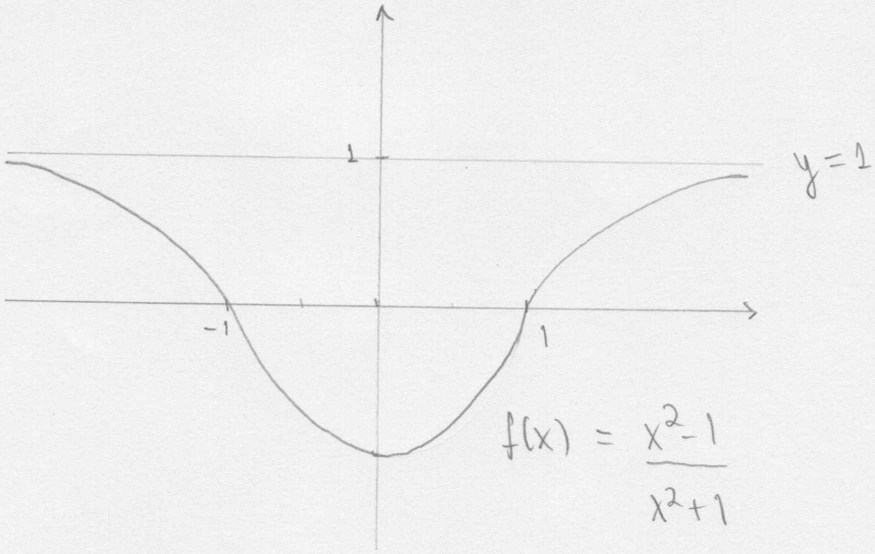
O nosso próximo objetivo é estender a definição 6.2 de limite para contemplar dois casos aparentemente patológicos:

(i) Quando queremos considerar o limite de uma função conforme $x$ cresce indefinidamente,

(ii) Quando o limite de uma função em um dado ponto $p \in \mathbb{R}$ é indefinidamente grande.

Exemplo 7.1:

(a) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, queremos estudar o comportamento de $f$ conforme $x$ cresce indefinidamente. Para tanto, consideramos o gráfico de tal função:

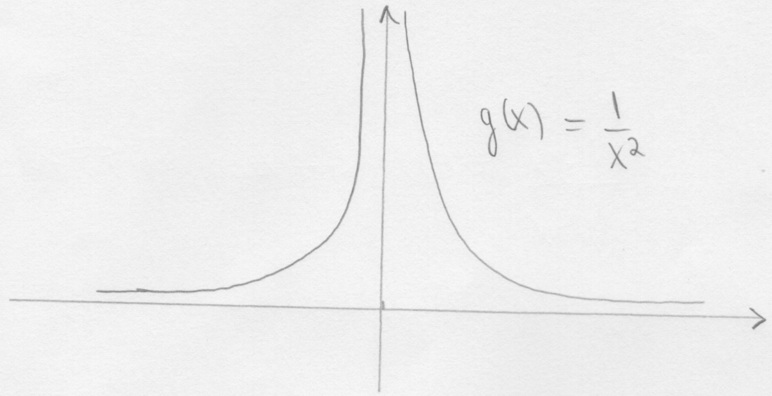



Verificamos graficamente que conforme $x$ cresce mais e mais o valor de $f(x)$ se aproxima da reta $y=1$

De fato, é possível fazermos os valores de $f(x)$ se aproximarem arbitrariamente de 1, para isto basta tomarmos x suficientemente grande. Denotamos tal fato por:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 .$$

(b) Seja $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \frac{1}{x^2}$, queremos estudar o comportamento de g conforme x se aproxima do ponto $0 \in \mathbb{R}$. Para tanto, consideramos o gráfico de g




Verificamos graficamente que conforme x se aproxima do ponto $0 \in \mathbb{R}$, seja pela direita, ou pela esquerda, o valor de $g(x)$ cresce indefinidamente. Denotamos tal fato por

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty .$$

Antes de formalizarmos os conceitos ilustrados pelo exemplo 7.1, alguns comentários são relevantes:

(i) O símbolo "$\infty$", denominado infinito não é um número!

(ii) Não vamos atribuir ao símbolo "$\infty$" nenhum significado concreto, restringiremo-nos apenas a tornar matematicamente precisas as afirmações envolvendo tal símbolo, como as presentes no exemplo 7.1.

(iii) Escrever que: $\lim_{x \to 0} g(x) = \infty$, para alguma função $g$, como no exemplo 7.1 (b) <u>não significa que o limite existe</u>! Tal símbolo apenas indica que conforme nos aproximamos do ponto $0 \in \mathbb{R}$ os valores assumidos por $g$ ficam arbitrariamente grandes.

<u>Definição</u> 7.2: "Seja $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e considere um ponto $p \in \mathbb{R}$ tal que $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > p\} \subseteq D$. Dizemos que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \to \infty} L$$

se $\forall \varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$, com $\delta > p$, tal que

$$x > \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon."$$

Similarmente, podemos considerar o caso de $x$ decrescer indefinidamente

<u>Definição 7.3</u>: "Seja $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e considere um ponto $p \in \mathbb{R}$ tal que $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x < p\} \subseteq D$. Dizemos que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} L$$

se $\forall \varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$, com $-\delta < p$ tal que

$x < -\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$."

Exemplo 7.4 : " Calculemos e justifiquemos o seguinte limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}.$$

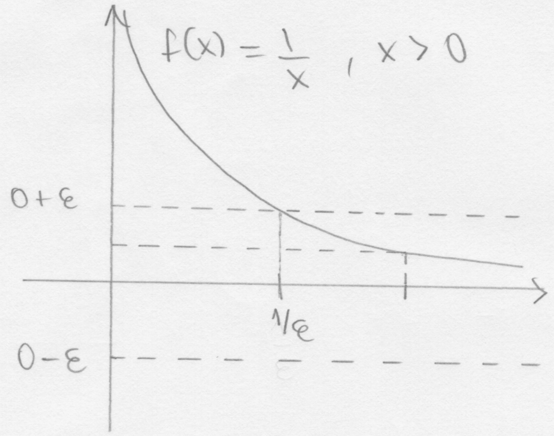
Claramente, quanto maior for o valor de $x$, mais próxima a função $f(x) = \frac{1}{x}$ estará de zero. Logo,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Resta justificarmos tal afirmação à luz da definição 7.2. Dado um $\varepsilon > 0$ qualquer, tomemos $\delta = 1/\varepsilon > 0$. Portanto,

$$x > \delta \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \varepsilon \Rightarrow 0 - \varepsilon < \frac{1}{x} < 0 + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon.$$



Em virtude das definições 7.2 e 7.3, podemos estender os teoremas 6.11, 6.20 e 6.22 para o caso de $x$ crescer ou decrescer indefinidamente. A saber, temos os seguintes resultados, cujas demonstrações ficam a cargo do leitor:

Teorema 7.5: Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$, se existirem:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = F_{\pm} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = G_{\pm}, \text{ então}$$

(a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) + g(x)] = F_{\pm} + G_{\pm}$

(b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - g(x)] = F_{\pm} - G_{\pm}$

(c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) \cdot g(x)] = F_{\pm} \cdot G_{\pm}$

(d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{F_{\pm}}{G_{\pm}}$, se $G_{\pm} \neq 0$. "

Teorema 7.6: " Sejam $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to I(f) \subseteq \mathbb{R}$, $g : D(g) \subseteq \mathbb{R} \to I(g) \subseteq \mathbb{R}$, tais que $I(f) \subseteq D(g)$ e suponha que exista

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a.$$

(a) Se $g$ for contínua em $a$, então

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(f(x)) = \lim_{u \to a} g(u).$$

(b) Se $a \notin D(g)$ mas $\lim\limits_{x \to a} g(u)$ existir, então

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(f(x)) = \lim_{u \to a} g(u). \quad "$$

Em virtude do teorema 7.6, cálculos de limites envolvendo $x \to \pm\infty$ podem ser reduzidos ao caso mais familiar discutido na aula 6. De uma forma mais precisa, suponhamos que queiramos calcular o limite:

$$\lim_{x \to \pm\infty} h(x) ,$$

introduzimos duas novas funções $f$ e $g$ tais que sua composição seja

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) .$$

Escolhendo, $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^{-1}$, e notando que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^{-1} = 0^{\pm}$$

Podemos invocar o teorema 7.6 para concluir que

$$\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = \lim_{x \to \pm\infty} g(f(x)) = \lim_{u \to 0^{\pm}} g(u) .$$

<u>Exemplo 7.7</u>: " Calcule:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n}$ , $n \in \mathbb{P}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = \lim_{u \to 0^+} u^n = 0$$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1}$ , Para calcularmos esse limite, vamos colocar a potência mais alta de x que ocorre no numerador em evidência. Dessa forma, expressões da forma $x^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, aparecerão no denominador e no numerador, permitindo-nos, pois, computar tal limite. Logo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5(1+x^{-1}+x^{-5})}{x^5(2+x^{-4}+x^{-5})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^{-1}+x^{-5}}{2+x^{-4}+x^{-5}} = \frac{1}{2}.$$ "

Definição 7.8: " Seja $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e suponha que exista o

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L,$$

Neste caso, dizemos que a reta horizontal $y = L$ é uma assíntota horizontal."

No que se segue vamos tornar matematicamente precisa o conceito ilustrado no exemplo 7.1 (b), de uma função $f(x)$ assumir valores arbitrariamente grandes conforme x se aproxima de um ponto $p \in \mathbb{R}$.

Definição 7.9: " Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ e três intervalos abertos:

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-p| < r,\ r > 0\}$$

$$I_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid p < x < r,\ r > p\}$$

$$I_- = \{x \in \mathbb{R} \mid r < x < p,\ r < p\}$$

tais que $I \setminus \{p\} \subseteq D$ e $I_\pm \subseteq D$. Dizemos que

(i) $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \to p} \infty$

se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|x - p| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$.

(ii) $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = \infty$, ou $f(x) \xrightarrow{x \to p^+} \infty$

se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ com $(p+\delta) \in I_+$ tal que

$0 < x - p < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$

(iii) $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = \infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \to p^-} \infty$

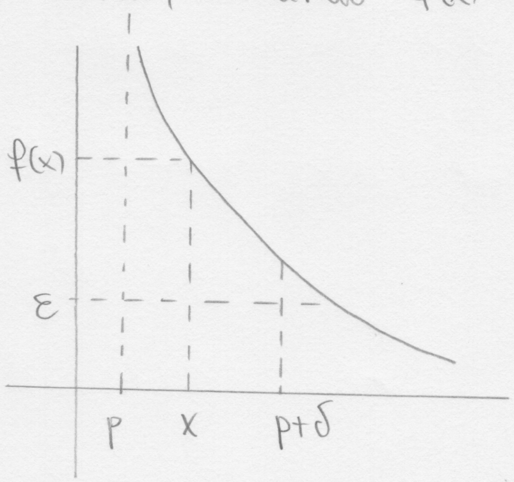
se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ com $(p-\delta) \in I_-$ tal que

$0 < p - x < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$. "

Os símbolos:

$\lim\limits_{x \to p} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = -\infty$

podem ser definidos similarmente, tomando $f(x) < -\varepsilon$.



É conveniente estendermos a definição 7.9 para incorporar os casos nos quais $x \to \pm\infty$.

Definição 7.10: "Seja $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e considere um ponto $p \in \mathbb{R}$ tal que

$I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > p\} \subseteq D$. Dizemos que:

(a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, ou $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ com $\delta > p$ tal que $x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$.

(b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, ou $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$

se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ com $\delta > p$ tal que $x > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$."

Novamente, os símbolos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \quad e \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty.$$

podem ser definidos similarmente.

Exemplo 7.11."

(a) $\lim_{x \to 0^+} x^{-1} = \infty$

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, tomando $\delta = 1/\varepsilon$, temos que

$$0 < x < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} > \varepsilon.$$

(b) $\lim_{x \to \infty} x = \infty$

$\forall \varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon$. Logo,

$$x > \delta \Rightarrow x > \varepsilon.$$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - x)$

Note que não podemos proceder da seguinte maneira:

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x^2 - \lim_{x \to \infty} x = \infty - \infty$$

Pois os teoremas 6.11 e 7.2 não se aplicam. Contudo, notando que

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x(x-1) = \infty.$$

pois temos o produto de duas funções que crescem arbitrariamente conforme $x \to \infty$. Para comprovarmos que tal raciocínio está de fato correto, considere

$\forall \varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon + 1 > 0$. Logo,

$$x > \delta \Rightarrow x^2 - x = x(x-1) > (\varepsilon+1) \cdot \varepsilon = \varepsilon^2 + \varepsilon > \varepsilon.$$

Este exemplo ilustra um caso do seguinte resultado geral:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) \cdot g(x) = \infty$$

Teorema 7.12: " Sejam $f, g: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L \neq 0,$$

$$\lim_{x \to p^+} g(x) = 0$$

e existe um $r > 0$ tal que $g(x) \neq 0$ para $p < x < p+r$. Então, ou

$$\lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ não existe.''}$$

Demonstração:

Basta que provemos que tal limite não pode ser finito. Suponha por absurdo, pois, que:

$$\lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad , \quad \text{com } |L| < \infty$$

Consequentemente do teorema 6.11 temos que

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^+} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) \right) = \lim_{x \to p^+} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) \cdot \lim_{x \to p^+} g(x) = 0$$

Um absurdo, logo a tese é verdadeira. ∎

Exemplo 7.13: " Calculemos

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+3x}{x^2-4},$$

Como: $\lim_{x \to 2^+} x^2+3x = 10$ e $\lim_{x \to 2^+} x^2-4 = 0$

temos do teorema 7.12 que tal limite ou é $\pm\infty$ ou não existe. Notando que

$$\frac{x^2+3x}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} \cdot \frac{x^2+3x}{x+2}$$

com: $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$ e $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+3x}{x+2} = \frac{5}{2}$

temos que

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+3x}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} \cdot \frac{x^2+3x}{x+2} = \infty \cdot \frac{5}{2} = \infty$$

pois para quaisquer $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \infty \quad e \quad \lim_{x \to p^+} g(x) = L \neq 0$$

temos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$0 < x - p < \delta_1 \Rightarrow f(x) > \frac{2\varepsilon}{L}$$

$$|x-p| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon < \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{L}{2} < g(x) < \frac{3L}{2}$$

concluímos que para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$|x-p| < \delta \Rightarrow f(x) \cdot g(x) > \varepsilon \text{ "}$$

<u>Definição</u> 7.14: " Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dizemos que a reta $x = p$ é uma assíntota vertical da função $y = f(x)$ se ao menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

$$\lim_{x \to p} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to p^\pm} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to p^\pm} f(x) = -\infty \text{ "}$$