CEZAR A. MORTARI

INTRODUÇÃO À LÓGICA

1ª reimpressão

Editora UNESP

imprensaoficial

Direitos de publicação reservados à:

Fundação Editora da UNESP (FEU)
Praça da Sé, 108
01001-900 – São Paulo – SP
Tel.: (0xx11) 3242-7171 Fax: (0xx11) 3422-7172
www.editora.unesp.br
feu@editora.unesp.br

Imprensa Oficial do Estado S. A.
Rua da Mooca, 1921
03103-902 – São Paulo – SP
Tel.: (0xx11) 6099-9800 Fax: (0xx11) 6099-9674
SAC 0800 123401
www.imprensaoficial.com.br
livros@imprensaoficial.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Mortari, Cezar A.
Introdução à lógica / Cezar A. Mortari. – São Paulo: Editora UNESP: Imprensa Oficial do Estado, 2001.

Bibliografia.
ISBN 85-7139-337-0 (Editora UNESP)
85-7060-182-4 (Imprensa Oficial do Estado)

1. Lógica 2. Filosofia I. Título. II. Série.

01-0819 CDD-160

Índice para catálogo sistemático:
1. Lógica: Filosofia 160

Editora afiliada:

Asociación de Editoriales Universitarias de América Latina y el Caribe

Associação Brasileira das Editoras Universitárias

Para Stefan e Mathias

da lógica clássica, Gottlob Frege, estava originalmente preocupado com o uso da lógica na fundamentação da matemática — basicamente, buscando tornar mais precisa a noção de *prova* ou *demonstração* matemática. Ora, proposições matemáticas são normalmente entendidas como verdadeiras independentemente do tempo e lugar, do falante etc., ou seja, livres de qualquer contexto. Dito de outra forma, uma sentença matemática expressa uma e somente uma proposição — ao contrário, como vimos, de sentenças como 'Eu estou com fome', que podem ser usadas por diferentes pessoas em diferentes ocasiões para expressar diferentes proposições.

Assim, dado esse caráter particular das proposições matemáticas, temos a razão pela qual se fez, na lógica clássica, a simplificação de que falamos anteriormente: trabalhar com sentenças diretamente, em vez de proposições. Essa decisão, como vimos, poupa trabalho, pois nos libera de fazer uma teoria das proposições e nos permite ficar no nível das sentenças, objetos que, por exemplo, têm uma estrutura facilmente reconhecível.

Note que essa decisão deixa de fora aspectos (como o tempo) que podem ser importantes em outras aplicações que não na matemática. O universo da figura 5.1 é um universo estático: não há um momento posterior àquele representado, em que Miau esteja mais perto de Tweety, ou em que Tweety tenha voado embora. Se você quiser, um tal universo é um recorte do universo real, restrito a um pequeno lugar e a um certo instante — como uma fotografia.

Dessa maneira, para utilizar o CQC para formalizar conhecimento e fazer inferências sobre um domínio de estudo, um universo, um assunto, ou mesmo para formalizar um argumento (i.e, traduzi-lo para uma linguagem artificial da lógica), precisamos primeiro fazer uma "modelagem matemática" deste: coisas como tempo, imprecisões, ambigüidades são todas eliminadas. Podemos então usar a lógica clássica para raciocinar sobre esse modelo resultante.

Note que isso não é uma decisão tão drástica e arbitrária quanto parece: várias outras ciências fazem a mesma coisa. Na matemática, falamos de entidades como pontos sem dimensão, linhas sem largura; na mecânica temos superfícies sem atrito, e assim por diante. Modelos são sempre aproximações ou idealizações da realidade, e mesmo assim (ou talvez justamente por isto) extremamente úteis.

CAPÍTULO 6

A SINTAXE DO CÁLCULO DE PREDICADOS (I)

Este capítulo tem por objetivo apresentar a linguagem artificial utilizada pelo *cálculo de predicados de primeira ordem*. Vamos primeiramente introduzi-la de modo mais informal, tratando-a com mais rigor no próximo capítulo.

6.1 Símbolos individuais

Como você recorda, para caracterizar uma linguagem formal necessitamos, primeiro, especificar seu *alfabeto*, ou conjunto de símbolos básicos; depois, especificar ainda uma *gramática* para definir que expressões (ou seja, seqüências finitas de símbolos da linguagem) são bem-formadas. Recorde que uma expressão de uma linguagem é *qualquer* seqüência finita de símbolos dessa linguagem, mas nem todas elas são bem-formadas. (Assim, '<+2×' e '2 < 5' são expressões de uma linguagem da aritmética, mas apenas a segunda é bem-formada.)

O alfabeto do CQC é o seguinte conjunto de 65 caracteres:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
N	O	P	Q	R	S	T						
$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\forall$	$\exists$	(	)				
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			

A partir deste alfabeto, deste conjunto de caracteres, é que vamos construir as expressões da linguagem — começando pelas expressões básicas.

O primeiro grupo de expressões básicas da linguagem do CQC são as chamadas *constantes individuais*, que têm a função de designar indivíduos. Usaremos as letras minúsculas $a,\ldots,t$ como constantes individuais, admitindo também o uso de subscritos: por exemplo, a_1, q_{22} etc. (Subscritos serão numerais arábicos para os números naturais positivos.) A possibilidade do uso de subscritos nos garante que vamos ter um conjunto infinito, enumerável, de constantes individuais. Vamos apresentá-las segundo uma ordem canônica, que é a seguinte:

$$a,b,c,\ldots,t,a_1,b_1,\ldots,t_1,a_2,\ldots$$

Seguindo esta ordem, a é a primeira constante, b é a segunda, e assim por diante. Note que há uma diferença entre um caractere da linguagem (um elemento do alfabeto, que é um conjunto finito de caracteres) e uma expressão básica como uma constante individual, de que temos um número infinito. Uma expressão básica, ainda que básica, já é construída a partir dos caracteres do alfabeto. (É a mesma diferença que você encontra, no português, entre a letra 'o' e a palavra — o artigo definido — 'o'.)

Vamos relembrar o argumento (A1), apresentado no início do capítulo anterior:

(A1) P_1 Cleo é um peixe.
P_2 Miau é um gato.
▶ Cleo é um peixe e Miau é um gato.

Poderíamos usar a letra c para simbolizar 'Cleo', e a primeira premissa do argumento, meio traduzida para a linguagem do CQC, ficaria assim:

c é um peixe.

Constantes individuais funcionam como *nomes*. Isso, contudo, não se restringe apenas aos *nomes próprios* em português (como 'João', 'Maria', 'Cleo' etc.), mas pode incluir também o que chamamos de *descrições definidas*. Por exemplo, a expressão 'o autor de *D. Quixote*', embora não seja um nome próprio, designa univocamente um indivíduo — bem como a expressão 'o navegador português que descobriu o Brasil'. Assim, uma frase como

O autor de *D. Quixote* é espanhol

seria traduzida, para começar, por

a é espanhol,

em que usamos a para 'o autor de *D. Quixote*'. (Veremos, mais tarde, que descrições definidas também podem ser analisadas e representadas de outras maneiras, mas, por enquanto, vamos fazer uso de constantes individuais para isso.)

É importante notar, uma vez que constantes individuais funcionam como nomes, que você não pode usar a mesma constante para dois indivíduos diferentes. Por exemplo, se você estiver formalizando um argumento envolvendo João e José, não é permitido usar a letra j para indicar a ambos. Mas você pode, claro, usar j_1 e j_2. Por outro lado, é possível (e permitido) que um indivíduo tenha vários nomes — correspondendo às diferentes descrições que podemos ter de uma mesma pessoa, como 'Machado de Assis', 'o autor de *Dom Casmurro*' etc. Dessa forma, podemos usar várias constantes para fazer referência a um mesmo indivíduo.

O segundo grupo de expressões básicas da linguagem que vamos ver agora são as *variáveis individuais*. Usaremos as letras minúsculas $u,\ldots,z$, com ou sem subscritos, para as variáveis. Da mesma forma que as constantes, temos um conjunto enumerável de variáveis, e uma ordem canônica, a saber:

$$u,v,w,x,y,z,u_1,v_1,\ldots,z_1,u_2,\ldots$$

As variáveis individuais funcionam, gramaticalmente, como as constantes, isto é, como nomes. Porém, obviamente, elas não são nomes de indivíduos específicos, mas têm associado a si um domínio de variação. Como vimos no capítulo 3, precisamos especificar quais são os substituendos e quais são os valores das variáveis. Os substituendos — as coisas pelas quais podemos substituir uma ocorrência de variável em uma expressão da linguagem — serão (por enquanto) as constantes individuais da linguagem, e os valores, todos os indivíduos do universo que estivermos investigando. Assim, se nosso universo for um conjunto de peixinhos dourados, o valor que uma variável como, digamos, x pode tomar será algum desses peixinhos.

Da mesma forma em que escrevemos 'c é um peixe' para indicar que o indivíduo (determinado) cujo nome é c é um peixe, podemos também escrever, usando uma variável,

x é um peixe,

que afirma, de algum indivíduo não especificado ainda, que ele é um peixe.

Se você quiser um análogo em português de variáveis, compare a sentença

Cleo é um peixe. (1)

com a seguinte, tomada fora de qualquer contexto:

ela é linda.

Enquanto 'Cleo' (supostamente) se refere univocamente a um indivíduo, que dizer de um pronome como 'ela'? Podemos considerar um pronome (aliás, é de onde vem essa denominação) como "marcador" do lugar de um nome. No caso, a palavra 'ela' não se refere a um indivíduo específico, da mesma forma que

x é um número

não se refere a um número específico. Enquanto (1) expressa uma proposição, e é, então, verdadeira ou falsa, 'x é um número' não pode ser dita simplesmente verdadeira ou falsa; isso depende do valor que x tomar num determinado contexto. Da mesma maneira, só podemos dizer se a sentença 'ela é linda' é verdadeira ou falsa se soubermos a quem o pronome 'ela' se refere.

As constantes individuais e variáveis individuais da linguagem do CQC são denominadas *termos* dessa linguagem. Constantes e variáveis são também comumente chamadas de *símbolos individuais*, mas, por favor, não confunda esse uso de 'símbolo' com o de 'símbolos da linguagem' — isto é, os caracteres da linguagem. Mais uma vez,

temos um conjunto finito de caracteres da linguagem do CQC (o alfabeto), e um conjunto infinito de, por exemplo, constantes. Constantes já não são parte do alfabeto da linguagem, mas são *expressões* formadas a partir deste; elas envolvem ao menos uma letra minúscula, e eventualmente um subscrito.

Exercício 6.1 Diga, de cada uma das expressões abaixo, se ela é ou não uma expressão da linguagem do CQC. Caso seja, diga também se ela é uma constante, ou uma variável:

(a)	a	(e)	e'	(i)	w_{725}
(b)	z_2	(f)	p_0	(j)	pq
(c)	x_{VI}	(g)	9	(k)	q_{-1}
(d)	t_{47}	(h)	$-a$	(l)	k

6.2 Constantes de predicado e fórmulas atômicas

Nosso próximo passo será introduzir símbolos para *propriedades* e *relações*. Como vimos, ser um pássaro é uma propriedade que Tweety tem, e é necessário também poder representá-la na linguagem. Mas precisamos primeiro conversar um pouco sobre o que são propriedades.

Como você recorda, uma suposição básica que estamos fazendo é a de que os indivíduos de que falamos têm propriedades e estão em certas relações com outros indivíduos. Até agora, estivemos falando informalmente sobre propriedades e relações — por exemplo, ao falarmos de conjuntos — e talvez fosse esta a ocasião para precisar um pouco mais o que são essas coisas. Porém, não pretendo entrar aqui em questões metafísicas sobre a existência (ou não) de propriedades no mundo; vou simplesmente supor que existam. Para nós, o importante é que uma propriedade — também chamada de *predicado de grau* 1, ou *predicado de 1 lugar*, ou ainda *predicado unário* —, seja lá o que for, possa ser especificada como se segue:

x é um gato,

x é um filósofo.

Ou seja, por meio de uma expressão do português, na qual aparecem variáveis — no caso acima, x — tais que, se as substituirmos pelo nome de algum indivíduo, o resultado é uma sentença declarativa. As variáveis têm aqui a função de "marcadores de lugar", isto é, indicam as posições, dentro da expressão lingüística, onde podem ser colocados nomes para formar uma sentença declarativa. (Para simplificar, usaremos as variáveis do CQC como marcadores de lugar ao especificar predicados, mas não deve haver confusão sobre essas suas duas funções.) Expressões do português (ou de qualquer língua) que contêm variáveis, e que podem ser transformadas em sentenças declarativas pela substituição das variáveis por nomes, são usualmente chamadas de *formas sentenciais* ou *funções proposicionais*.

Ter propriedades nos leva, então, a nosso terceiro grupo de expressões básicas, as *constantes de predicado* (também denominadas '*símbolos* de predicado'). Para elas, usaremos letras maiúsculas $A, \ldots, T$; naturalmente podendo admitir subscritos, como A_1, R_{44} etc. A ordem canônica é a seguinte:

$$A, B, C, \ldots, T, A_1, B_1, \ldots, T_1, A_2, \ldots$$

Assim, se usarmos a letra P para representar a propriedade 'x é um peixe', a primeira premissa de (A1), 'Cleo é um peixe', seria formalizada da seguinte maneira (onde c é Cleo, lembra?):

$$Pc.$$

Note que o símbolo de predicado é escrito *antes* da constante individual. Nada nos impede de fazer o contrário, desde que usemos a notação de modo homogêneo. O usual, contudo, é colocar a constante de predicado primeiro, e é o que faremos aqui. De maneira similar, se utilizarmos G para simbolizar 'x é um gato', e m para 'Miau', teríamos a segunda premissa do argumento assim:

$$Gm.$$

Expressões como Pc e Gm acima são chamadas de *fórmulas*. Na verdade, são as fórmulas mais simples que temos e, por corresponderem a sentenças atômicas, vamos chamá-las de *fórmulas atômicas*. Nos dois casos exemplificados, uma fórmula atômica foi obtida aplicando-se um símbolo de propriedade a uma constante individual. Podemos obter também fórmulas atômicas com variáveis — por exemplo, Px, o que corresponde à forma sentencial 'x é um peixe'. (Isto nos será útil logo mais adiante.)

Lembre-se de que uma das características do CQC é que, ao traduzir uma sentença para a sua linguagem, abstraímos o tempo verbal. Por exemplo, se tivermos o símbolo F representando a propriedade 'x é um filósofo', e s representando Sócrates, a sentença 'Sócrates *foi* um filósofo' seria escrita da seguinte maneira:

$$Fs,$$

o que, se "retraduzido" para o português, significaria que Sócrates *é* um filósofo. Resumindo: antes de formalizar sentenças no CQC, precisamos passar todos os tempos verbais para o presente.

Antes de nos ocuparmos da conclusão de (A1), vamos falar um pouco mais sobre as constantes de predicado. Como você vê, se elas são chamadas 'constantes de *predicado*', em vez de 'constantes de propriedade', é porque deve haver mais a ser dito a este respeito. De fato, existem predicados que *não são* propriedades. Considere a sentença abaixo:

João é mais alto que Maria. (2)

Enquanto, com 'Tweety é um pássaro', dizíamos que o indivíduo cujo nome é 'Tweety' tem a propriedade de ser um pássaro, aqui precisamos usar uma outra terminologia. O que dizemos é que João e Maria se encontram numa certa *relação*. Não podemos dizer que um deles, individualmente, tenha a propriedade de ser mais alto que — ficaria esquisito afirmar 'João é mais alto que'. Poderíamos, é claro, dizer que João tem a propriedade 'x é mais alto que Maria', mas isso esconde a existência do indivíduo Maria. Além do mais, suponhamos que você tivesse que formalizar também a sentença

João é mais alto que Carlos.

Se você fosse formalizá-la também com símbolos de propriedade, você teria que ter um *novo* símbolo para a propriedade 'x é mais alto que Carlos' — que é uma propriedade diferente de 'x é mais alto que Maria'.

Assim, o mais natural é usar um segundo tipo de símbolo de predicado: símbolos para relações entre *dois* indivíduos: as relações binárias, ou *predicados de grau* 2 — também chamados de *predicados de 2 lugares*, ou *binários*. Com respeito à sentença (2), poderíamos representá-la da seguinte maneira, utilizando o símbolo H para representar a relação 'x é mais alto que y', e j e m para denotar, respectivamente, João e Maria:

$$Hjm.$$

Temos, então, um segundo tipo de fórmula atômica, que consiste em tomar uma constante de predicado binário (de relação binária, portanto) e acrescentar-lhe dois símbolos individuais (constantes ou variáveis). Note que, tendo agora dois termos escritos após a constante de predicado, temos que cuidar da *ordem* em que eles aparecem. As fórmulas Hjm e Hmj dizem coisas diferentes: a primeira, que João é mais alto que Maria; a segunda, que Maria é mais alta que João. (Obviamente, se uma delas for verdadeira, a outra será falsa.) As variáveis que estamos usando como marcadores de lugar indicam também a ordem em que os termos devem ser colocados depois da constante de predicado, o que é possível, já que elas foram introduzidas em uma ordem padrão (ou canônica). Ou seja, como x precede y na ordem canônica, o x que ocorre em 'x é mais alto que y' diz que o *primeiro* símbolo individual depois da constante de predicado — j, em Hjm — se refere ao indivíduo, João, que é mais alto que o outro indivíduo, Maria.

Resumindo, temos um tipo de constante de predicado que é um símbolo de propriedade: propriedades aplicam-se a indivíduos isoladamente. E temos símbolos de relações entre dois indivíduos. Mas será que não poderia haver uma relação entre *três* indivíduos? Claro. Um exemplo seria:

João está sentado entre Maria e Cláudia. (3)

Neste caso, poderíamos introduzir a constante de predicado E para denotar a relação ternária 'x está sentado entre y e z', o que nos daria, supondo que j, m e c denotem os indivíduos em questão:

$$Ejmc.$$

Ainda a respeito desse exemplo, gostaria de mencionar que as variáveis que indicam os lugares a preencher não precisam aparecer necessariamente na ordem padrão quando especificamos um predicado. A sentença (3) pode ser também adequadamente formalizada usando-se um símbolo S que represente a relação 'y está sentado entre x e z'. O resultado seria

$$Smjc,$$

que tem a vantagem visual de colocar j entre m e c. Isso acontece porque y vem depois de x na ordem canônica; assim, como temos as variáveis x, y e z, x marca o primeiro lugar depois da constante de predicado, y o segundo, e z o terceiro. Enfim, há várias maneiras de especificar um predicado, e o importante é que, uma vez fixado um símbolo e o que ele representa, você o use de modo coerente.

Note também que o número de lugares de um predicado será indicado pelo número de marcadores de lugar diferentes. Assim, se tivermos o seguinte predicado:

x bateu o carro de y, que ficou irritado e deu uma surra em x,

fica fácil ver que este é um predicado de grau *dois* (ainda que x ocorra duas vezes, temos apenas dois indivíduos envolvidos).

Como você viu, constantes de predicados podem representar relações envolvendo n indivíduos, para algum n. No geral, dizemos que temos: símbolos de predicados *unários* (propriedades), *binários* (relações entre dois indivíduos), *ternários* (relações entre três indivíduos), ..., *n-ários* ou *enários* (relações entre n indivíduos, para algum número natural n). Todos eles são chamados de constantes (ou símbolos) de predicado. Se desejarmos — e alguns autores fazem isso —, podemos convencionar que os símbolos de predicados são constituídos de uma letra maiúscula seguida de um índice superior, como A^1, F^2, R^3 etc., indicando o seu *grau*. Isto é, indicando que se trata, respectivamente, de predicados unários, binários, ternários etc. Não usaremos essa convenção aqui, esperando ficar sempre claro, pelo contexto, a quantos indivíduos nossos símbolos de predicado se aplicam.

Resta ainda um caso a considerar: se temos símbolos de predicados n-ários, para qualquer número natural n, isso significa que n pode ser igual a zero? Pode. Um predicado *zero-ário* nada mais é do que uma letra maiúscula isolada, que usamos principalmente para representar sentenças como

Está chovendo,

que, na verdade, são orações sem sujeito, isto é, não atribuem algo a alguém.

Constantes de predicado zero-árias são também chamadas de *letras sentenciais*. Contudo, há outros usos para elas, além de simbolizar orações sem sujeito. Em princípio, você pode usar uma letra sentencial para formalizar *qualquer* sentença. Por exemplo, seria correto usar A para formalizar a sentença 'Sócrates é um filósofo' — assim como, em princípio, nada impede que formalizemos 'João é mais alto que Maria' usando um símbolo para a propriedade 'x é mais alto que Maria'. Ninguém é obrigado a formalizar 'Sócrates é um filósofo' como Fs, ou 'João é mais alto que Maria' como Hjm. Por exemplo, se quiséssemos formalizar essa última sentença no **CPC** (que é, como falei, um subsistema do **CQC**), iríamos fazê-lo usando apenas uma letra sentencial. (A linguagem do **CPC**, como você terá ocasião de ver depois, é mais fraca.) Acontece apenas que muitos argumentos que seriam intuitivamente válidos podem acabar sendo considerados inválidos se a tradução para a linguagem formal não for detalhada o suficiente.

Voltaremos mais tarde a falar disso. Agora, antes de encerrar esta seção, vamos caracterizar de modo preciso o que são as fórmulas atômicas da linguagem do **CQC**. Para recordar, o primeiro passo ao se definir a linguagem de uma teoria lógica é especificar o conjunto de símbolos que serão utilizados — é o que fizemos até aqui (mas não terminamos ainda). O segundo passo, como foi mencionado no início deste capítulo, é dizer, a respeito das expressões formadas por esses símbolos, quais são *bem-formadas*, e quais não são. Por exemplo, tanto 'gato' como 'existem gatos pretos' como 'xrtga' são expressões do português. Entretanto, somente as duas primeiras são ditas "bem-formadas" — ou seja, correspondem, respectivamente, a uma *palavra* e a uma *sentença* do português. A terceira, 'xrtga', não é nem palavra nem sentença.

Contudo, critérios para decidir se algo é uma palavra, ou uma sentença, em uma linguagem natural, às vezes podem ser imprecisos. Isso ocorre porque as línguas evoluem, e demora sempre um pouco até que, digamos, uma nova expressão ache o caminho do dicionário. Em uma linguagem artificial, por outro lado, o objetivo é eliminar qualquer inexatidão; logo, a caracterização de uma expressão bem-formada é feita por meio de uma definição rigorosa. A linguagem do **CQC** que vimos até agora está longe de ser completa, mas vamos fazer uma pausa aqui e começar a definir o que são suas expressões bem-formadas.

O primeiro grupo de expressões bem-formadas, claro, nós já vimos: são os *termos*, isto é, as constantes e variáveis individuais. O segundo grupo, que começaremos a definir agora, são as chamadas *fórmulas bem-formadas*, ou, simplesmente, *fórmulas*.

A definição de fórmula que teremos aqui é *indutiva*. Isso consiste em apresentar elementos iniciais do conjunto a ser definido, e depois listar regras que permitem obter novos elementos a partir daqueles já existentes. No caso de nossa definição de fórmula, começarei apresentando a base de tudo, as fórmulas atômicas. Mais tarde, vou mostrar como fórmulas complexas podem ser construídas a partir delas.

As fórmulas atômicas são definidas por meio da seguinte cláusula:

(1) Se $\mathbf{P}$ é um símbolo de predicado n-ário, para algum número natural n, e $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$ são termos, então $\mathbf{P}\mathbf{t}_1 \ldots \mathbf{t}_n$ é uma fórmula.

Vejamos alguns comentários sobre isso. Primeiro, note que o símbolo '**P**' (que está em **negrito**) não faz parte da linguagem do **CQC**: é uma *variável metalingüística* (ou *variável sintática*) que representa uma constante de predicado qualquer — que pode ser A, B, C etc. (Note que as letras que fazem parte do alfabeto do **CQC** estão sendo escritas em *itálico*.) Do mesmo modo, '$\mathbf{t}_1$',...,'$\mathbf{t}_n$' também são metavariáveis que indicam termos (constantes ou variáveis individuais) quaisquer. A cláusula acima, como foi dito, define as fórmulas atômicas: elas consistem em um símbolo de predicado n-ário seguido de n termos — notando-se que n pode ser zero, claro. Assim, se o símbolo de predicado é, por exemplo, ternário, deve ser seguido de *exatamente* três termos, nem mais, nem menos. Se for zero-ário, zero termos (ou seja, nenhum). Se for unário, um termo. E assim por diante.

Resta-nos considerar o caso da conclusão do argumento (A1), que afirma que Cleo é um peixe e Miau é um gato. Este é um caso mais complicado, e vamos tratá-lo na próxima seção, depois de alguns exercícios.

Exercício 6.2 Usando a notação sugerida, traduza as sentenças abaixo para a linguagem do CQC.
c: Cleo; m: Miau; t: Tweety; F: x é um peixe; P: x é um pássaro; G: x é um gato; M: x é maior do que y; L: x gosta mais de y do que de z.

(a) Cleo é um pássaro.
(b) Miau é um peixe.
(c) Miau é maior que Cleo.
(d) Tweety é um gato.
(e) Tweety é maior que Miau.
(f) Miau é maior que Tweety.
(g) Miau gosta mais de Cleo do que de Tweety.
(h) Tweety gosta mais de Miau do que de Cleo.
(i) Cleo gosta mais de si mesma do que de Miau.

Exercício 6.3 Traduza as seguintes sentenças para a linguagem do CQC, usando a notação sugerida:

(a) Carla é pintora. (c: Carla; P: x é pintora)
(b) Paulo é jogador de futebol. (p: Paulo; J: x é jogador de futebol)
(c) Carla é mais alta que Paulo. (A: x é mais alto que y)
(d) Paulo é irmão de Carla. (I: x é irmão de y)
(e) Paulo ama Denise. (d: Denise; A: x ama y)
(f) Denise ama Paulo.
(g) Carla gosta de si própria. (G: x gosta de y)
(h) A Lua é um satélite da Terra. (l: a Lua; t: a Terra; S: x é um satélite de y)
(i) Carla deu a Paulo o livro de Denise. (D: x dá a y o livro de z)
(j) Paulo deu a Carla o livro de Denise.
(k) Paulo é filho de Alberto e Beatriz. (a: Alberto; b: Beatriz; F: x é filho de y e z)
(l) Florianópolis fica entre Porto Alegre e Curitiba. (f: Florianópolis; p: Porto Alegre; c: Curitiba; E: x fica entre y e z)
(m) Curitiba fica entre Florianópolis e São Paulo. (s: São Paulo)

(n) Paulo comprou em Curitiba um quadro de Matisse para presentear Denise. (m: Matisse; C: x comprou em y um quadro de z para presentear w)
(o) Alberto comprou em São Paulo um quadro de van Gogh para presentear Beatriz. (g: van Gogh)

6.3 Operadores e fórmulas moleculares

Voltemos agora a considerar a conclusão do argumento (A1) anteriormente apresentado, a saber, 'Cleo é um peixe e Miau é um gato'. Como vimos, essa é uma sentença molecular ou complexa, e contém as duas premissas do argumento como partes. Um outro exemplo de sentença molecular é:

João é músico ou João é pintor.

Aqui a expressão que faz a composição das sentenças 'João é músico' e 'João é pintor' é a conjunção 'ou'. A esse tipo de expressão do português, que forma sentenças a partir de sentenças mais simples, damos o nome de *operador lógico* ou *conectivo*. Como exemplos de operadores, temos os seguintes (as reticências indicam o lugar a ser ocupado por uma sentença):

- não é verdade que …
- se … então …
- nem … nem …
- ou … ou …
- … e …
- é impossível que …
- Darth Vader acredita que …
- será o caso que …

Existe um número muito grande de operadores nas linguagens naturais: a lista acima é apenas uma pequena amostra. Contudo, nem todos eles vão ser de interesse para o CQC. Entre aqueles que são formalizados no CQC, temos o operador de *negação*, em português geralmente indicado pela expressão 'não'. Dada uma sentença como 'Cleo é um peixe', podemos formar sua negação, dizendo

Cleo *não* é um peixe. (4)

Outras maneiras de indicar a negação são possíveis por meio do uso de expressões como 'não é verdade que', 'é falso que', ou por certos prefixos, como 'in-', 'a-' etc. Por exemplo, se dizemos algo como

'Sua afirmação é incorreta', estamos, de fato, dizendo 'Sua afirmação não é correta'. Nem sempre, contudo, há uma equivalência entre as duas versões. Se dissermos, por um lado, 'Sócrates não é feliz' e, por outro, 'Sócrates é infeliz', queremos dizer exatamente a mesma coisa com as duas sentenças? Há quem defenda que não ser feliz não implica necessariamente ser infeliz — haveria um meio termo, neutro, entre felicidade e infelicidade. Portanto, você deve tomar um certo cuidado ao formalizar prefixos negativos usando o operador de negação, pois uma formalização deve procurar, obviamente, ser o mais fiel possível ao texto original. Dito de outra forma, com a formalização pretendemos fazer uma tradução do português para a linguagem artificial do CQC — e, claro, gostaríamos portanto de preservar ao máximo o significado da expressão original.

Para representar o operador de negação vamos utilizar o símbolo $\neg$. Assim, a sentença (4) acima poderia ser formalizada no CQC da seguinte maneira (lembrando que c representa Cleo, e P a propriedade 'x é um peixe'):

$$\neg Pc.$$

Note que o símbolo de negação apareceu *antes* da sentença negada, enquanto, na versão em português, ele ocorre "dentro" dela, por assim dizer. Se quiser, você pode ler $\neg Pc$ como 'Não é verdade que Cleo é um peixe'.

Uma fórmula como $\neg Pc$ é chamada de fórmula *molecular*. É fácil ver que ela não é atômica: ela contém outra fórmula — a saber, Pc — como uma parte própria. Esse tipo de construção pode ser repetido. Por exemplo, se quisermos agora fazer a negação da fórmula $\neg Pc$, basta colocar $\neg$ na frente dela: $\neg\neg Pc$.

Note que $\neg\neg Pc$ e Pc são fórmulas *diferentes*. É claro que elas parecem ser a mesma coisa; afinal, negar duas vezes não é o mesmo que afirmar? Afirmar '*não é verdade que* a Terra *não* é redonda' não é o mesmo que afirmar 'a Terra é redonda'? Em certo sentido, claro que sim, mas note que são duas sentenças distintas em português (uma começa com 'não', a outra com 'a'). Do mesmo modo, as fórmulas são distintas: Uma começa com '$\neg$'; a outra, com 'P'.

O operador de negação tem uma característica interessante: configura o que chamamos de uma *função de verdade*. No caso da negação, isso quer dizer que podemos determinar se uma sentença negativa, como $\neg Pc$, é verdadeira ou falsa se soubermos se a sentença Pc, que está sendo negada, é verdadeira ou falsa. Por exemplo, se é verdade que Cleo é um peixe, então a sentença 'Cleo não é um peixe' será falsa. Por outro lado, se é falso que Cleo é um peixe, então a sentença 'Cleo não é um peixe' será verdadeira. Assim, a negação é uma função de verdade, como os outros operadores que vão nos interessar no CQC. Nem todo operador, contudo, tem essa característica: os últimos três operadores na lista apresentada anteriormente não são funções de verdade. Tome um operador como 'João acredita que ...'. O fato de uma proposição ser verdadeira não acarreta que João acredite nela — e João bem pode acreditar em proposições falsas. (Falaremos mais sobre funções de verdade, caracterizando-as com mais precisão, num dos próximos capítulos.)

O operador de negação é o que se chama de um operador *unário*, pois é aplicado a *uma* sentença apenas, para gerar uma sentença nova. Os demais operadores que vamos considerar são *binários*, ou seja, aplicam-se a *duas* sentenças para formar uma terceira. Vamos começar pelo 'e' mencionado acima, que tem o nome de *conjunção*. A conjunção é expressa em português por locuções como 'e', 'mas', 'todavia' etc. Claro que 'e' e 'mas' não têm exatamente o mesmo sentido em português, mas ambas as expressões têm em comum a característica de ligar duas sentenças, afirmando ambas. Se dizemos 'Pedro é inteligente e preguiçoso', ou 'Pedro é inteligente, mas preguiçoso', em ambos os casos estamos afirmando duas coisas de Pedro: que é inteligente *e também* que é preguiçoso. Ou seja, em ambos os casos, temos uma conjunção. Como você vê, a linguagem do CQC faz uma certa idealização com respeito à linguagem natural — as nuances de sentido diferenciando 'mas' e 'e' ficam, infelizmente, perdidas.

O símbolo que usaremos para a conjunção será $\wedge$. Podemos, enfim, escrever a conclusão do argumento (A1) na linguagem do CQC da seguinte maneira:

$$(Pc \wedge Gm).$$

Cada um dos elementos de uma conjunção chama-se um *conjuntivo*, ou *conjunto*. (Nota: não confundir com os conjuntos da teoria de conjuntos — e nem a palavra 'conjunção' com as conjunções da gramática!) Você deve ter notado que a fórmula acima inclui parênteses: estes serão nossos sinais de pontuação, e falaremos logo a seguir a respeito da razão de seu uso. Mas vamos ver, antes, quais são os demais operadores.

Um outro operador que aparece no CQC é o de *disjunção*, que corresponde a 'ou' em português. O símbolo que vamos utilizar é $\vee$. Assim, a frase 'João gosta de Maria ou Maria gosta de João' poderia ser simbolizada da seguinte forma:

$$(Gjm \vee Gmj),$$

em que G simboliza 'x gosta de y', e j e m, obviamente, denotam João e Maria. Outras locuções em português usadas para indicar disjunção são 'ou ... ou ...', 'ora ... ora ...', e até mesmo '... e/ou ...'. Os elementos de uma disjunção são chamados de *disjuntivos*, ou *disjuntos*.

Talvez você estranhe o fato de incluirmos a expressão 'e/ou' entre os modos de expressar uma disjunção em português. É que há um sentido da disjunção, em português, que admite que ambas as alternativas se verifiquem. Quando dizemos, por exemplo, 'chove ou faz sol', admitimos que possa acontecer as duas coisas. Isto é, uma sentença disjuntiva será verdadeira quando pelo menos uma das alternativas o for, e, se as duas são verdadeiras, é óbvio que pelo menos uma o é. Mas falaremos disto mais tarde, e com mais detalhes, quando estudarmos a semântica para o CQC.

O próximo operador é conhecido como *implicação* (*material*), e pretende-se que corresponda ao 'se ... então ...' em português. Uma sentença do tipo 'se ... então ...' é também chamada de *sentença condicional*, ou, simplesmente, de um *condicional*. (Como veremos mais tarde, o nome 'implicação' para esse operador não é nada apropriado.) O símbolo que utilizaremos para a implicação é $\rightarrow$. Desta forma, se usarmos a letra sentencial N para indicar 'Neva', e F para 'Faz muito frio', a sentença 'Se neva, então faz muito frio' seria formalizada assim:

$$(N \rightarrow F).$$

Dado um condicional, chamamos de *antecedente* à sentença que ocorre à esquerda de $\rightarrow$, ou seja, aquela que está com a partícula 'se': 'neva', no exemplo acima. À sentença que ocorre à direita de

$\rightarrow$, ou seja, vinculada à partícula 'então', chamamos de *conseqüente*: 'faz muito frio', no exemplo acima. Nem sempre, contudo, o antecedente é dito primeiro em português: uma versão costumeira da sentença anterior seria 'Faz muito frio, se neva', em que temos primeiro o conseqüente e só depois o antecedente. Outras maneiras em português que indicam o condicional 'Se neva, então faz muito frio' seriam (usando N e F como acima):

se N, F,
N somente se F,
F, se N,
N é condição suficiente para F,
F é condição necessária para N.

Vamos falar um pouco sobre isto. Intuitivamente, temos um condicional verdadeiro quando, se o antecedente for verdadeiro, o conseqüente também o é. Ou seja, não acontece que o antecedente seja verdadeiro e o conseqüente falso. Note que não estamos pretendendo que haja uma conexão *causal* ou *temporal* entre o antecedente e o conseqüente — recorde que, no CQC, fazemos abstração de considerações temporais. Não pretendemos dizer, com 'se neva, então faz muito frio', que o fato de estar nevando seja uma causa do fazer frio. O que queremos dizer é que, se é verdade que neva, isto é suficiente para que possamos afirmar que faz muito frio. Por outro lado, dissemos que fazer muito frio é uma condição necessária para que esteja nevando. Mais uma vez, isso não significa que primeiro esteja fazendo muito frio para depois nevar; queremos dizer apenas que não acontece que esteja nevando, mas que não esteja muito frio. Este é o sentido: você não pode ter neve sem ter muito frio. As mesmas observações se aplicam a 'neva somente se faz muito frio'.

O último operador que nos falta considerar é a *bi-implicação*. Uma proposição em que aparece uma bi-implicação é chamada *bicondicional*. Como o nome já sugere, é um condicional nas duas direções, correspondendo às expressões '... se e somente se ...' e '... é equivalente a ...'. O símbolo que usamos é $\leftrightarrow$. Portanto, $(N \leftrightarrow F)$ formaliza a sentença 'Neva se e somente se faz muito frio'.

A razão de 'N se e somente se F' ser um bicondicional é que, se olharmos bem, há dois condicionais envolvidos. Isto corresponde a:

[N, se F] e [N somente se F].

Ora, 'N, se F' é a mesma coisa que 'se F, então N'. Igualmente, 'N somente se F' é o mesmo que 'se N, então F'. Portanto, 'N se e somente se F' equivale a

[se F, então N] e [se N, então F],

o que caracteriza uma implicação nas duas direções: uma bi-implicação.

Concluindo esta seção, além das constantes individuais e de predicado, temos na linguagem do **CQC** os cinco símbolos de operadores, com os quais formamos as fórmulas moleculares: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, e $\leftrightarrow$. Além disso, temos os parênteses, que funcionam como sinais de pontuação.

Vamos continuar agora com nossa definição de fórmula, apresentando a segunda cláusula, que trata das fórmulas moleculares:

(2) Se α e β são fórmulas, então $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ são fórmulas.

Aqui aparecem outra vez metavariáveis: 'α' e 'β' são usadas para indicar uma fórmula qualquer. Note que isso tanto pode se referir a fórmulas atômicas, quanto a fórmulas moleculares; assim, se α é a fórmula Pc e β a fórmula $(Gmx \leftrightarrow \neg Km)$, a conjunção de α e β, por exemplo, é $(Pc \wedge (Gmx \leftrightarrow \neg Km))$.

Neste livro vamos adotar a convenção de usar as letras gregas minúsculas α, β, γ e δ como metavariáveis para fórmulas (eventualmente, usando subscritos também, se necessário; α_1, por exemplo). É importante lembrar que elas são variáveis *metalingüísticas*, isto é, elas não fazem parte da linguagem do **CQC**. Assim, se alguém perguntar a você se a expressão '$(\neg\alpha \rightarrow \beta)$' é uma fórmula do **CQC**, você pode dizer tranqüilamente que *não*. Ela é, no máximo, um *esquema* de fórmula; algo que podemos transformar em uma fórmula substituindo 'α' e 'β' por fórmulas.

Você notou que, no caso dos operadores binários, as fórmulas são escritas *entre parênteses*. Isso garante que não haja ambigüidades: se dois operadores binários ocorrem numa fórmula, sempre haverá parênteses para indicar qual dos dois é o principal. Vamos falar sobre isso agora.

6.4 Sinais de pontuação

Os exemplos de sentença que você viu até agora eram bastante simples, envolvendo, em sua maioria, apenas um operador (além, claro, de constantes individuais e de predicado). Contudo, o usual é que tenhamos sentenças de maior complexidade, onde um operador é aplicado a sentenças que já são complexas para formar sentenças mais complexas ainda. Considere o exemplo abaixo:

Se Sócrates é um filósofo e é grego, então Sócrates é mortal.

Obviamente, essa sentença é um condicional, e seu antecedente uma conjunção. Veja:

Se [(Sócrates é um filósofo) e (é grego)], então [Sócrates é mortal].

Admitindo que usemos s para designar Sócrates, e F, G e M para simbolizar as propriedades 'x é um filósofo', 'x é grego', e 'x é mortal', teríamos:

$$((Fs \wedge Gs) \rightarrow Ms).$$

Note que a fórmula acima também é um condicional e que corresponde ao condicional em português: o antecedente é a fórmula $(Fs \wedge Gs)$, e o conseqüente, a fórmula Ms.

Imagine agora que *não tivéssemos* os parênteses como sinais de pontuação. A fórmula anterior seria então escrita como

$$Fs \wedge Gs \rightarrow Ms.$$

Contudo, a expressão acima é ambígua, pois ela pode ser lida de duas maneiras, que distinguimos pela colocação de parênteses:

$$((Fs \wedge Gs) \rightarrow Ms) \quad \text{ou} \quad (Fs \wedge (Gs \rightarrow Ms)).$$

No primeiro caso temos o condicional que queríamos, enquanto, no segundo, temos uma *conjunção*: o conjuntivo da esquerda é Fs, e o da direita, o condicional $(Gs \rightarrow Ms)$.

Uma situação parecida acontece na matemática. Se alguém lhe pedisse para calcular o valor da expressão $2 \times 3 + 5$, você provavelmente diria que é 11 — mas por quê? Bem, você deve ter aprendido na escola alguma regra parecida com "primeiro a multiplicação, depois a soma". Essa regra é que diferencia o caso anterior de $2\times(3+5)$: aqui, você *tem* que usar parênteses para indicar que 2 multiplica o valor da expressão $3+5$, e o resultado final é então 16.

Na lógica, temos[1] que fazer a mesma coisa. Nada indica, à primeira vista, que $Fs \land Gs \to Ms$ deva ser lida como pretendíamos — 'Se Sócrates é um filósofo e é grego, então Sócrates é mortal' — em vez de 'Sócrates é um filósofo e, se Sócrates é grego, então Sócrates é mortal'. Note que são duas sentenças diferentes, como mencionamos acima: uma é um condicional (cujo antecedente é uma conjunção); a outra é uma conjunção (onde um dos conjuntivos é um condicional). Assim, devemos também, neste caso, utilizar parênteses para indicar qual é a leitura desejada. Parênteses são *sinais de pontuação* e constituem mais um tipo de símbolo que faz parte da linguagem do CQC.

Para encerrar, uma observação importante: todas as fórmulas moleculares têm parênteses ao redor — exceto as negações. Parênteses só são necessários quando temos operadores binários. Assim, para cada operador binário que ocorrer em uma fórmula, deverá haver nela o par de parênteses correspondente a ele.

Antes de passarmos aos exercícios, vamos ver mais um exemplo de como traduzir uma sentença para a linguagem do CQC. Digamos que você queira formalizar o seguinte:

> Salma Hayek é morena, mas Claudia Schiffer e Cameron Díaz não o são.

Como proceder? Bem, obviamente a sentença acima (ou a proposição que ela expressa) envolve três indivíduos — as três damas em questão. Portanto, seria bom ter uma constante individual para cada uma delas. Por exemplo, s, c, e d, respectivamente. Agora, quais são os predicados envolvidos na história? De Salma Hayek, estamos

[1] Na verdade, não temos. Existe um tipo de notação, a *notação polonesa*, que dispensa o uso de parênteses. Basicamente, consiste em escrever o símbolo de operador primeiro, seguido então da ou das expressões a que ele está sendo aplicado. Por exemplo, em vez de escrevermos $(Fs \to Ms)$, escrevemos $\to FsMs$. É fácil então ver a diferença entre $((Fs \land Gs) \to Ms)$ e $(Fs \land (Gs \to Ms))$. A primeira seria escrita assim: $\to\land FsGsMs$. A segunda, por outro lado, ficaria assim: $\land Fs\to GsMs$.

dizendo que é morena; logo, precisamos de uma constante de propriedade, M por exemplo, para 'x é morena'. Algo mais? Aparentemente não, você concorda? O que estamos dizendo tanto de Claudia como de Cameron é que *não são morenas*. Assim, nenhuma constante de predicado, além de M, é necessária.

Escolhido esse conjunto de símbolos (constantes individuais e de predicado), vamos então tentar escrever a fórmula. Se olharmos bem para a estrutura da sentença em questão, veremos que ela é assim (usando colchetes para indicar os agrupamentos):

> [Salma Hayek é morena] mas [Claudia Schiffer e Cameron Díaz não o são],

ou seja,

> [Salma Hayek é morena] mas [Claudia Schiffer não é morena e Cameron Díaz não é morena].

Trocando agora 'Salma Hayek é morena' etc. pelas fórmulas correspondentes, ficamos com

$$Ms \text{ mas [não } Mc \text{ e não } Md].$$

Finalmente, só precisamos dos operadores e parênteses:

$$(Ms \land (\neg Mc \land \neg Md)).$$

Exercício 6.4 Diga, das expressões abaixo, se são fórmulas ou não, e por que, supondo que A é um símbolo de predicado zero-ário, P e Q são símbolos de propriedade, e R, de relação binária:

(a)	Rab	(e)	$((\neg Rxa \leftrightarrow Qb) \land Pc)$
(b)	$\neg Px$	(f)	$(\alpha \lor \neg\beta)$
(c)	aRb	(g)	$((\neg Rxy \to Qc) \land \neg(Pb \lor A))$
(d)	$(Ra \to Qb)$	(h)	$(A \to (Pb \lor Rcc))$

Exercício 6.5 Usando a notação sugerida, transcreva as sentenças abaixo para a linguagem do CQC.
c: Cleo; m: Miau; t: Tweety; F: x é um peixe; P: x é um pássaro; G: x é um gato; M: x é maior do que y; L: x gosta mais de y do que de z.

(a) Cleo não é um pássaro.
(b) Miau não é um peixe.
(c) Miau é um gato ou é um pássaro.
(d) Miau é um gato e é maior que Cleo.
(e) Tweety não é um gato.
(f) Ou Tweety é maior que Miau, ou Miau é maior que Tweety.
(g) Se Miau é maior que Tweety, então Tweety não é maior que Miau.
(h) Miau é maior que Tweety, se Tweety não é maior que Miau.
(i) Se Miau é um gato, então não é um peixe.
(j) Miau gosta mais de Cleo do que de Tweety se e somente se Tweety é um pássaro.
(k) Tweety gosta mais de Miau do que de Cleo, mas Miau não gosta mais de Cleo do que Tweety.
(l) Nem Miau nem Cleo são pássaros.
(m) Tweety não é um gato ou não é um peixe.
(n) Não é verdade que Tweety é um gato e um peixe.
(o) Não é o caso que, se Miau é um gato, então é um peixe.

Exercício 6.6 Formalize as sentenças abaixo, usando a notação sugerida:

(a) Carla é pintora, mas Paulo é jogador de futebol. (*c*: Carla; *p*: Paulo; *P*: *x* é pintora; *J*: *x* é jogador de futebol)
(b) Ou Paulo é um engenheiro, ou Carla o é. (*E*: *x* é engenheiro)
(c) Carla é pintora, mas Paulo é engenheiro ou jogador de futebol.
(d) Se Sócrates é o mestre de Platão, então Platão é um filósofo. (*s*: Sócrates; *p*: Platão; M: *x* é o mestre de *y*; *F*: *x* é um filósofo)
(e) Paulo ama Denise, que ama Ricardo. (*d*: Denise; *r*: Ricardo; *A*: *x* ama *y*)
(f) Paulo ama a si próprio se e somente se ele é narcisista. (*A*: *x* ama *y*; *N*: *x* é narcisista)
(g) Chove ou faz sol. (*C*: chove; *S*: faz sol)
(h) Não chove, mas nem faz sol nem está frio. (*F*: está frio)
(i) João vai à praia, se o tempo estiver bom. (*j*: João; *P*: *x* vai à praia; *T*: o tempo está bom)
(j) Se o tempo estiver bom, e não fizer muito frio, João irá à praia. (*F*: faz muito frio)
(k) Se o tempo não estiver bom, então, se fizer muito frio, João não irá à praia.

(l) A Terra é um planeta, e a Lua gira em torno da Terra. (*t*: a Terra; *l*: a Lua; *P*: *x* é um planeta; G: *x* gira em torno de *y*)
(m) Saturno é um planeta, mas não gira em torno de Alfa Centauri. (*s*: Saturno; *a*: Alfa Centauri)
(n) A Lua não é um planeta, nem gira em torno de Saturno.
(o) Miau é um gato preto. (*m*: Miau; G: *x* é um gato; *P*: *x* é preto)
(p) Miau é um gato angorá que não é preto. (*A*: *x* é angorá)
(q) Carla é mais alta que Paulo somente se Paulo é mais baixo que Carla. (*A*: *x* é mais alto que *y*; *B*: *x* é mais baixo que *y*)
(r) Carla não é mais alta que Paulo somente se for mais baixa ou tiver a mesma altura que ele. (*T*: *x* tem a mesma altura que *y*)

Exercício 6.7 Traduzir as fórmulas abaixo da linguagem do CQC para o português, sendo que:
a: Antonio; *b*: Bernardo; *c*: Cláudia; *d*: Débora;
F: *x* é um filósofo; G: *x* gosta de *y*; *D*: *x* detesta *y*.

(a)	Gbd	(f)	$(\neg Gcb \vee \neg Gbc)$
(b)	$(Fb \wedge Fd)$	(g)	$(Gbb \to Dcb)$
(c)	$(Fb \wedge \neg Fa)$	(h)	$(Gbd \leftrightarrow Dcd)$
(d)	$(Fa \wedge Gac)$	(i)	$(Dbd \to (Fb \vee Fd))$
(e)	$(Gbd \wedge Ddb)$	(j)	$((Fa \wedge Fc) \to (Gac \wedge Gca))$

6.5 Quantificadores e fórmulas gerais

Com o que vimos até agora da linguagem do CQC, podemos formalizar um grande número de argumentos. Mas que isso ainda é pouco você pode ver pelo exemplo abaixo:

(A2) P Aristóteles é um filósofo.
► Alguém é um filósofo.

A premissa do argumento não oferece problema: podemos formalizá-la por *Fa*, onde *F* representa a propriedade '*x* é um filósofo', e *a* designa Aristóteles. Porém, que fazer com a conclusão? Estamos afirmando que alguém é um filósofo; logo, a simbolização deveria ser algo como

$$F\ldots$$

Porém, o que vamos colocar no lugar das reticências? Obviamente não podemos colocar aí a constante a, pois Fa significa que *Aristóteles* é um filósofo, o que não é a mesma coisa que dizer que *alguém* é um filósofo. É fácil ver que também não podemos colocar uma outra constante individual, tal como b, para preencher as reticências. Lembre-se de que as constantes funcionam como nomes de indivíduos determinados; assim, b estaria designando, digamos, Beatriz, e Fb estaria dizendo que Beatriz é uma filósofa. Note que, com a sentença 'alguém é um filósofo', estamos falando, sim, de algum indivíduo, mas não sabemos *qual*; sabemos que ele existe, mas não sabemos seu *nome*.

A solução para esse pequeno impasse é a utilização de variáveis, claro. Contudo, escrever somente

$$Fx$$

para representar a conclusão do argumento apresentado ainda não é o suficiente. Essa fórmula diz apenas que

x é um filósofo,

o que não parece afirmar que haja alguém que o seja. Para entender melhor esse ponto, considere a expressão aritmética $x < 2$. Suponha que estejamos falando dos números naturais: fica difícil dizer se essa expressão é verdadeira ou falsa, não é mesmo? O problema é que não sabemos o que é x; não sabemos se estamos falando de um certo x, ou de qualquer x. Compare isso agora com as duas afirmações abaixo:

existe ao menos um x tal que $x < 2$, (5)

qualquer que seja x, $x < 2$. (6)

Nesses dois casos, podemos decidir sobre a verdade ou falsidade das afirmações. A primeira é verdadeira, pois existe, de fato, um número natural menor do que 2 (o número 1, por exemplo), enquanto a segunda é falsa: nem todo número natural é menor que 2 (o número 4, por exemplo, é maior que 2). O que fizemos em (5) e (6), ao contrário do caso $x < 2$ anterior, foi introduzir um *quantificador* para agir sobre a variável.

O quantificador em (5) é chamado *quantificador existencial*, e corresponde, em português, às expressões 'existe pelo menos um', 'alguns', 'algum', 'alguém' etc. (É claro que, em português, a palavra 'alguns', estando no plural, dá a entender que há mais de um indivíduo envolvido, mas, de qualquer forma, está garantido que há pelo menos um — e é assim que entendemos o quantificador existencial.) Agora, como você vê em (5) acima, a expressão 'existe ao menos um' vem associada a uma *variável*: 'existe ao menos um x tal que'. Para representar o quantificador existencial, portanto, vamos utilizar o símbolo $\exists$, que sempre empregamos seguido de uma variável: $\exists x$, por exemplo, ou $\exists y$. Dito de outra forma, um quantificador existencial é uma expressão da forma $\exists \mathbf{x}$, em que $\mathbf{x}$ é uma variável individual. (Usaremos '$\mathbf{x}$', '$\mathbf{y}$', e '$\mathbf{z}$', em negrito, como metavariáveis para as variáveis da linguagem do CQC.)

Dispondo do quantificador existencial, a conclusão do argumento (A2) pode ser formalizada assim:

$$\exists x Fx,$$

que afirma que existe ao menos um x no universo de discurso que tem a propriedade de ser filósofo. Ou seja, alguém é filósofo.

O outro tipo de quantificador, aquele que aparece em (6), é o *quantificador universal*, que corresponde às locuções 'para todo', 'qualquer que seja', 'todos', 'cada', e assim por diante. Para representá-lo, usaremos o símbolo $\forall$ — naturalmente, seguido de uma variável. Ou seja, um quantificador universal é uma expressão da forma $\forall \mathbf{x}$, onde $\mathbf{x}$ é uma variável individual. Assim, se quisermos formalizar a sentença 'Todos são filósofos', teremos

$$\forall x Fx.$$

Uma variante disso pode ser

$$\forall y Fy.$$

Essas duas fórmulas dizem a mesma coisa: não importa se usamos a variável x, ou y, estamos afirmando que todo indivíduo do universo tem a propriedade de ser filósofo.

Com a introdução de quantificadores temos, então, um terceiro tipo de fórmula, além das atômicas e moleculares que já vimos no capítulo anterior: as fórmulas *gerais*, que são, naturalmente, aquelas que se iniciam por um quantificador. A cláusula correspondente, em nossa definição de fórmula, é a seguinte:

(3) Se **x** é uma variável e α é uma fórmula na qual **x** ocorre, então $\forall \mathbf{x}\alpha$ e $\exists \mathbf{x}\alpha$ são fórmulas.

Dizendo de outra forma o que está escrito acima, basta tomar uma fórmula α qualquer e prefixá-la com um quantificador universal ou existencial (ou seja, uma expressão da forma $\forall$x ou $\exists$x) para obter uma fórmula geral — claro, com a restrição de que a variável **x** do quantificador ocorra na fórmula. Por exemplo, se tomarmos a fórmula $(Px \to Qy)$ e colocarmos um quantificador à frente dela, como em $\forall x(Px \to Qy)$, teremos uma fórmula geral. E se prefixarmos agora essa fórmula com um quantificador existencial como $\exists y$, ficamos com $\exists y \forall x(Px \to Qy)$, que, obviamente, também é uma fórmula geral.

Note agora que, segundo a definição acima, expressões como $\exists xPa$ e $\forall x(Py \vee Qy)$ não são fórmulas gerais. Em ambos os casos, claro, o quantificador é desnecessário; mas a razão pela qual não são fórmulas é que a variável do quantificador, x no caso, não ocorre na fórmula sendo quantificada: x não ocorre nem em Pa, nem em $Py \vee Qy$. Por outro lado, é claro que $\forall y(Py \vee Qy)$ é uma fórmula geral. Como $(Py \vee Qy)$ é uma fórmula (molecular), e y é uma variável que ocorre nela, $\forall y(Py \vee Qy)$ também é fórmula.

A nossa definição de fórmula geral, contudo, não elimina alguns casos estranhos de quantificadores supérfluos. Por exemplo, está claro que $(\forall xPx \vee \forall xQx)$ é uma fórmula — molecular, no caso. O que aconteceria agora se prefixássemos essa fórmula com um quantificador, ficando com, digamos, $\exists x(\forall xPx \vee \forall xQx)$. Você diria que o resultado é uma fórmula?

Pensando bem, é, pois $(\forall xPx \vee \forall xQx)$ é fórmula na qual x ocorre, e $\exists x$ é um quantificador. Mas é claro que, nesse caso, o quantificador para x não vai ter influência alguma sobre o restante da fórmula: ele é supérfluo. (Existem, de fato, outras maneiras de definir fórmula que eliminam casos como esses, porém, às custas de uma definição um pouco mais complicada.)

Como você viu pela definição, podemos classificar as fórmulas em três grandes grupos: as atômicas, as moleculares e as gerais. Você pode dizer que as fórmulas atômicas são aquelas cujo primeiro símbolo é um símbolo de predicado (ou único símbolo, no caso de um predicado zero-ário). Já as moleculares iniciam com $\neg$ ou com o parêntese esquerdo (, como em $\neg Fx$ ou $(Fa \to Qb)$. As fórmulas gerais, então, são aquelas cujo primeiro símbolo é $\forall$ ou $\exists$.

Para encerrar este capítulo, vamos ver mais alguns exemplos simples de como formalizar no **CQC** sentenças envolvendo quantificação. Usando L para a relação binária 'x gosta de y', vamos formalizar a sentença 'alguém gosta de Miau'. O resultado é

$$\exists xLxm.$$

Ou seja, existe algum indivíduo, x, tal que x gosta de m, Miau. Por outro lado, se quisermos escrever na linguagem do **CQC** que todos gostam de Miau, podemos fazê-lo através de

$$\forall xLxm,$$

ou seja, qualquer que seja x, x gosta de Miau. Note que isso é diferente de

$$\forall xLmx,$$

pois essa fórmula afirma que, qualquer quer seja x, Miau gosta de x. Em outras palavras, Miau gosta de todos. De modo análogo, 'Miau gosta de alguém' torna-se

$$\exists xLmx.$$

E como faríamos com 'Se alguém gosta de Miau, então Miau gosta de alguém'? É simples. Obviamente temos um condicional (usando colchetes para indicar seus elementos):

Se [alguém gosta de Miau], então [Miau gosta de alguém].

Assim, basta transcrever o antecedente e o conseqüente, colocando $\to$ entre ambos, e parênteses ao redor:

$$(\exists xLxm \to \exists xLmx).$$

Se agora combinarmos um quantificador com o operador de negação, poderemos transcrever para a linguagem do **CQC** outras expressões que também envolvem quantificação — expressões como 'ninguém', 'nem todos', 'nada', e assim por diante. Para dar um exemplo, vamos simbolizar a sentença

Ninguém é um filósofo.

Obviamente, ao dizer que ninguém é um filósofo estamos negando que alguém o seja. Portanto:

$$\neg\exists xFx.$$

Isto é, não há nenhum x no universo que tenha a propriedade de ser filósofo. Porém, isso também pode ser dito usando o quantificador universal: se ninguém é um filósofo (isto é, se não existem filósofos), então qualquer que seja o indivíduo x no universo, x *não é* um filósofo. Assim:

$$\forall x\neg Fx.$$

Ou seja, dizer que ninguém é um filósofo é a mesma coisa que dizer que todos não são filósofos.

Agora, é claro que existe uma diferença entre dizer que *ninguém* é filósofo e que *nem todos* são filósofos. Afirmar 'nem todos são filósofos' é negar que todos sejam filósofos, isto é, estamos fazendo a negação de 'todos são filósofos', o que pode ser formalizado assim:

$$\neg\forall xFx.$$

Ou então, já que afirmar que nem todos são filósofos é afirmar que existe alguém que não é, assim:

$$\exists x\neg Fx.$$

Espero que esses exemplos iniciais tenham dado a você uma pequena idéia do que se pode fazer com os quantificadores. Mais tarde veremos como formalizar algumas sentenças bem mais complicadas. Por enquanto, tente ir resolvendo os exercícios a seguir.

Exercício 6.8 Supondo que C é um predicado zero-ário, que P e Q são predicados unários, e que T e R são predicados binários, diga quais das expressões abaixo são fórmulas e, caso sejam, se são atômicas, moleculares, ou gerais.

(a) $\forall x(Px \vee Tay)$
(b) $(\exists xQx)$
(c) $(\neg C \rightarrow \forall xC)$
(d) $\exists Rax \leftrightarrow Pab$
(e) $(\neg Rax \leftrightarrow Tab)$
(f) $\neg\forall w(\neg Rxy \rightarrow (Qx \vee Tzw))$

Exercício 6.9 Transcreva as sentenças abaixo para a linguagem do **CQC**, usando a notação sugerida:

(a) Algo é branco. (B: x é branco)
(b) Tudo é azul. (A: x é azul)
(c) Alguma coisa não é azul. (A: x é azul)
(d) Algo é bonito. (B: x é bonito)
(e) Todos são mortais. (M: x é mortal)
(f) Nada é insubstituível. (I: x é insubstituível)
(g) Nem tudo dura para sempre. (D: x dura para sempre)
(h) Centauros não existem. (C: x é um centauro)
(i) Alguma coisa não é verde. (G: x é verde)
(j) Cada objeto é igual a si mesmo. (I: x é igual a y)
(k) Há objetos que não são iguais a si mesmos.
(l) Nem tudo é cor-de-rosa. (R: x é cor-de-rosa)
(m) Nada é cor-de-rosa.
(n) Alguém é mais velho que Pedro. (p: Pedro; O: x é mais velho que y)
(o) Ninguém é mais velho que Pedro.
(p) Matusalém é mais velho que alguém. (m: Matusalém)
(q) Matusalém é mais velho que todos.
(r) Não é verdade que Matusalém é mais velho que todos.
(s) Alguém gosta de si mesmo. (G: x gosta de y)
(t) Todos gostam de si mesmos.
(u) Ninguém gosta de Miau. (m: Miau)
(v) Alguém não gosta de si mesmo.
(w) Não existe alguém que goste de si mesmo.
(x) Não existe alguém que não goste de si mesmo.
(y) Ninguém gosta mais de Paulo do que de Denise. (p: Paulo; d: Denise; L: x gosta mais de y do que de z)
(z) Nem todos gostam mais de Paulo do que de Denise.

CAPÍTULO 7

A SINTAXE DO CÁLCULO DE PREDICADOS (II)

Neste capítulo, vamos nos ocupar, de forma mais sistemática, da linguagem do cálculo de predicados de primeira ordem.

7.1 Linguagens de primeira ordem

Vamos começar relembrando como é constituída a linguagem do CQC.

Definição 7.1 A *linguagem geral do cálculo de predicados de primeira ordem consiste em:*

(1) *um conjunto enumerável de constantes individuais;*
(2) *para cada número natural $n \geq 0$, um conjunto enumerável de constantes de predicado n-árias;*
(3) *um conjunto enumerável de variáveis individuais;*
(4) *operadores;*
(5) *quantificadores;*
(6) *sinais de pontuação.*

As expressões em (3), (4), (5) e (6) são chamadas *símbolos lógicos*, enquanto aquelas em (1) e (2) são chamadas *símbolos não-lógicos*. Observe que temos um número infinito de variáveis e constantes individuais: isso nos garante um suprimento inesgotável delas, caso

precisemos. Temos também um número infinito de símbolos de predicado. Na verdade, para cada número natural $n \geq 0$, temos infinitos predicados n-ários. A intenção disso é também a de ter tantos símbolos quantos possamos eventualmente precisar, sejam eles símbolos de propriedades, relações binárias, relações ternárias, e assim por diante.

Você poderia objetar que, na prática (por exemplo, nos exercícios feitos até agora), sempre acabamos usando não mais que uma dúzia de constantes individuais e de predicado. Por que insistir em ter um número infinito delas?

Bem, a definição acima é da linguagem *geral* do CQC. O que acontece é que usualmente trabalhamos apenas com algum subconjunto dessa linguagem geral — e a esses subconjuntos (que, a propósito, incluem todos os símbolos lógicos) chamamos de *uma* linguagem de primeira ordem.

Definição 7.2 *Uma linguagem de primeira ordem é qualquer subconjunto da linguagem geral do* CQC *que inclua todos os símbolos lógicos e pelo menos uma constante de predicado.*

A restrição colocada acima de que tenhamos ao menos uma constante de predicado tem a seguinte razão de ser: ainda que você não disponha de constantes individuais, você pode construir fórmulas se dispuser de pelo menos um símbolo de predicado. Por exemplo, se o único símbolo não-lógico for o símbolo de propriedade F, ainda assim você pode gerar as fórmulas Fx, $(\neg Fx \vee \forall y Fy)$ etc. Contudo, mesmo dispondo de constantes individuais, sem símbolos de predicado nenhuma fórmula pode ser gerada: lembre-se de que as fórmulas moleculares são construídas a partir das atômicas, e que estas *começam com um símbolo de predicado*.

Vamos ver agora um exemplo de uma linguagem de primeira ordem. Suponha que estamos formalizando sentenças e argumentos que falam de gatos, peixes e estrelas, e de alguns deles em particular, como Miau, Cleo e Alfa Centauri. Assim, precisamos ter símbolos para propriedades como 'x é um gato' (um peixe, uma estrela), para o que podemos usar G, P, e E, bem como constantes para os indivíduos mencionados: digamos, m, c e a. Mas, se tudo o que pretendemos dizer a respeito desses indivíduos pode ser dito usando os símbolos acima, é claro que não vamos precisar de outros. Deste modo, nossa linguagem — vamos chamá-la de '$\mathcal{L}_1$' — se resume ao seguinte conjunto:

$$\mathcal{L}_1 = \{a, c, m, G, E, P\},$$

que inclui, além desses símbolos, todos os símbolos lógicos (que não vamos repetir aqui). Por outro lado, se estivermos formalizando, por exemplo, demonstrações aritméticas, envolvendo números naturais, então introduziremos símbolos para relações entre números, como M para 'x é menor que y', ou P para 'x é um número par' etc. Além disso, provavelmente gostaríamos de ter constantes individuais para denotar cada um dos números; digamos, a para 0, a_1 para 1, ou seja, no geral, a_n para um número n. (Note que não podemos usar 0, 1 etc., como constantes individuais, pois convencionamos que nossas constantes têm que ser *letras minúsculas*, eventualmente com subscritos.) Teremos então a linguagem

$$\mathcal{L}_2 = \{a, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, M, P\}.$$

Desse modo, em cada domínio de investigação em que estejamos pretendendo trabalhar — em cada *teoria* que fazemos —, usamos um subconjunto da linguagem geral de primeira ordem definida anteriormente. Conforme foi acima observado, esses subconjuntos devem incluir obrigatoriamente todos os símbolos lógicos: variáveis, operadores, quantificadores e parênteses. No entanto, como todas as linguagens de primeira ordem incluem os símbolos lógicos, ao especificar uma delas basta que indiquemos quais são seus símbolos *não-lógicos*. É o que fizemos acima com as linguagens $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$.[1]

Uma última observação: claro que uma das linguagens de primeira ordem possíveis é justamente a linguagem geral; aquela que contém *todos* os símbolos não-lógicos que podemos especificar. Mas, como eu

[1]Pode parecer um abuso usar o termo 'linguagem' para designar simplesmente um conjunto de símbolos — afinal, não havíamos dito que, para especificar uma linguagem formal, precisamos do alfabeto *e de uma gramática*? Mas, claro, no caso de linguagens de primeira ordem, a gramática já está dada: as definições de 'termo' e 'fórmula'.

disse, na prática, dificilmente precisaremos de mais que algum número pequeno de símbolos não-lógicos.

Uma *expressão* de uma linguagem de primeira ordem é qualquer seqüência finita de símbolos do alfabeto dessa linguagem: por exemplo, tanto $(\neg Ex \vee Ea)$ quanto $m \rightarrow \rightarrow \forall \neg$ são expressões de $\mathcal{L}_1$ acima (i.e., expressões construídas a partir dos símbolos de $\mathcal{L}_1$). Porém, nem todas as expressões de uma linguagem são bem-formadas, ou seja, no nosso caso, termos e fórmulas. Vamos recordar primeiro o que são os *termos* de uma linguagem.

Definição 7.3 *Os termos de uma linguagem de primeira ordem são suas variáveis e constantes individuais.*

E, a seguir, a definição das fórmulas de uma linguagem:

Definição 7.4 *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem. Dizemos que:*

(1) Se $\mathbf{P}$ *é um símbolo de predicado n-ário, para um número natural $n \geq 0$, e* $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$ *são termos, então* $\mathbf{P}\mathbf{t}_1 \ldots \mathbf{t}_n$ *é uma fórmula (atômica);*

(2) Se α e β são fórmulas, então $\neg\alpha$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ são fórmulas (moleculares);

(3) Se $\mathbf{x}$ *é uma variável e α é uma fórmula na qual* $\mathbf{x}$ *ocorre, então* $\forall\mathbf{x}\alpha$ *e* $\exists\mathbf{x}\alpha$ *são fórmulas (gerais);*

(4) Nada mais é uma fórmula.

Essa definição repete as três cláusulas que já havíamos visto, e acrescenta uma nova. Note, primeiramente, que, na cláusula (1) o valor de n pode ser igual a zero, caso em que teremos uma letra sentencial. A cláusula (4), por outro lado, garante que apenas as expressões que são definidas pelas cláusulas (1)–(3) sejam fórmulas; tudo o mais não. Isto evita que, eventualmente, pudéssemos ter outras expressões que fossem fórmulas, mas cuja regra de formação não conhecemos. Por exemplo, será que $x\exists xP$ é uma fórmula? Bem, basta verificar se essa expressão se enquadra em alguma das três primeiras cláusulas da definição acima. Ela certamente não é uma fórmula atômica, pois o primeiro caractere de uma fórmula atômica tem que ser uma letra maiúscula. Ela não é uma fórmula molecular, pois o primeiro caractere de uma fórmula molecular é ou o símbolo de negação, $\neg$, ou o parêntese esquerdo (. Finalmente, $x\exists xP$ não é uma fórmula geral, pois o primeiro caractere de uma fórmula geral deve ser ou $\forall$ ou $\exists$. Assim, se ela não se enquadra em nenhuma das três primeiras cláusulas da definição, ela poderia ser uma fórmula? Não: a cláusula (4) proíbe isso explicitamente.

Como eu havia mencionado, o tipo de definição que demos para as fórmulas chama-se *definição indutiva*, ou *recursiva*. Temos um caso-base — as fórmulas atômicas — e as demais fórmulas são obtidas a partir destas, usando-se operadores, quantificadores e parênteses. Isso nos permite construir fórmulas bastante longas e complexas — não há limite para o tamanho que uma fórmula possa ter (embora, claro, todas elas tenham um comprimento finito).

Noções relacionadas à noção de fórmula são as de *subfórmula* e *subfórmula imediata*. Vamos ilustrar isso tomando $((\neg Qb \land \forall x(Px \to Qx)) \to \neg Pb)$ como exemplo.

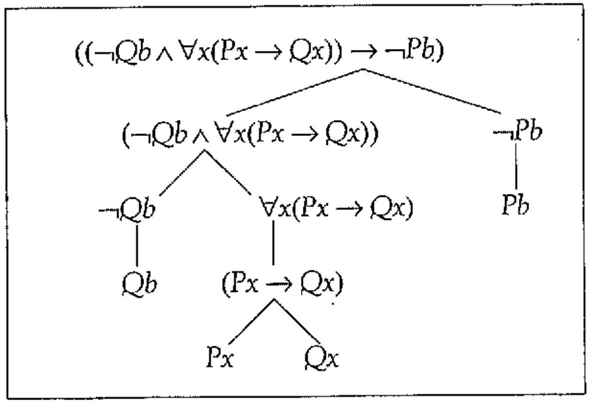

FIGURA 7.1 — $((\neg Qb \land \forall x(Px \to Qx)) \to \neg Pb)$ e suas subfórmulas.

Na figura 7.1, temos essa fórmula, que é um condicional, na parte de cima, e imediatamente abaixo dela, seus componentes esquerdo e direito — que chamamos de suas *subfórmulas imediatas*, a saber, $(\neg Qb \land \forall x(Px \to Qx))$ e $\neg Pb$. Para cada uma dessas duas fórmulas temos também suas subfórmulas imediatas (ou subfórmula imediata, se for só uma: no caso, $\neg Pb$ tem apenas um componente, que é Pb).

Repetindo esse procedimento, você vê que chegamos a um nível básico, onde temos as fórmulas atômicas.

Vamos aproveitar a ocasião e definir, do modo seguinte, o que são as *subfórmulas imediatas* de uma fórmula qualquer:

(i) fórmulas atômicas não têm subfórmulas imediatas;

(ii) a subfórmula imediata de $\neg\alpha$ é α;

(iii) as subfórmulas imediatas de $(\alpha \land \beta)$, $(\alpha \lor \beta)$, $(\alpha \to \beta)$, e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ são α e β;

(iv) a subfórmula imediata de $\forall \mathbf{x}\alpha$ e de $\exists \mathbf{x}\alpha$ é α.

De modo análogo, podemos definir o conjunto de todas as *subfórmulas* de α: isso inclui as subfórmulas imediatas de α, as subfórmulas imediatas destas, e assim por diante, até chegarmos às fórmulas atômicas. Dito de outra forma, o conjunto das subfórmulas de α inclui sua(s) subfórmula(s) imediata(s), bem como todas subfórmulas dela(s). A figura 7.1, portanto, apresenta todas as subfórmulas de $((\neg Qb \land \forall x(Px \to Qx)) \to \neg Pb)$. Nessa figura temos o que se chama a *árvore de formação* da fórmula. Ela mostra como a fórmula foi construída a partir das fórmulas atômicas que a compõem.

Além de atômicas, moleculares, gerais, há uma outra maneira de classificar as fórmulas: por meio daquelas que são *abertas*, e das que são *fechadas*. Mas, para definir isso, precisamos primeiro falar sobre *escopo* de quantificadores e sobre ocorrências *livres* e *ligadas* de variáveis.

Os quantificadores agem apenas sobre a fórmula que inicia imediatamente após a variável do quantificador. O âmbito de ação de um quantificador é chamado de *escopo* do quantificador, e pode ser definido da seguinte maneira: numa fórmula da forma $\forall \mathbf{x}\alpha$ ou $\exists \mathbf{x}\alpha$, o escopo do quantificador é α. Em outras palavras, o escopo de um quantificador é apenas a fórmula que o segue, aquela cujo primeiro símbolo ocorre imediatamente após o quantificador. Vamos ver alguns exemplos, começando por

$$\forall x(Px \to Qx). \tag{1}$$

Nesse caso, o escopo do quantificador $\forall x$ é a fórmula que se inicia imediatamente após a ocorrência de $\forall x$, ou seja, a fórmula cujo primeiro símbolo é o parêntese esquerdo: $(Px \rightarrow Qx)$.

Considere agora a seguinte fórmula:

$$(\forall xPx \rightarrow \forall y\exists zFzy). \tag{2}$$

Nesse caso, o escopo de $\forall x$ — a fórmula que se inicia imediatamente após a variável — é Px. E apenas isto: $\forall y\exists zFzy$ já está *fora* do escopo de $\forall x$. Note que (2) não é uma fórmula geral: seu primeiro símbolo é o parêntese esquerdo, logo, é uma fórmula molecular. Com relação ao escopo de $\exists z$, na fórmula acima, ele é claramente a fórmula Fzy. E o escopo de $\forall y$? Obviamente, a fórmula que se inicia imediatamente após $\forall y$, ou seja, a fórmula cujo primeiro símbolo é $\exists$: a fórmula $\exists zFzy$.

Dizemos agora que uma ocorrência de uma variável $\mathbf{x}$ é *ligada*, numa fórmula α, se $\mathbf{x}$ ou faz parte de um quantificador, ou está no escopo de um quantificador para $\mathbf{x}$ em α. Isto é, se $\mathbf{x}$ ocorre em alguma parte de α que é da forma $\forall \mathbf{x}\beta$ ou $\exists \mathbf{x}\beta$. Por exemplo, na fórmula

$$(\forall x\forall zLxz \wedge Qz) \tag{3}$$

temos duas ocorrências da variável x: a primeira faz parte do quantificador, e a segunda, após o L, em Lxz. Ambas as ocorrências de x são ligadas: a primeira, por ser a variável do quantificador, e a segunda, por estar dentro de seu escopo. Dito de outra forma, porque ocorre em uma parte de $(\forall x\forall zLxz \wedge Qz)$ que é da forma $\forall x\beta$, a saber, $\forall x\forall zLxz$ (onde $\beta = \forall zLxz$).

Por outro lado, qualquer ocorrência de alguma variável $\mathbf{x}$ numa fórmula α que esteja fora do escopo de qualquer quantificador para $\mathbf{x}$ é chamada de uma ocorrência *livre* dessa variável em α. A última ocorrência da variável z na fórmula (3) acima, portanto, é livre, pois o quantificador $\forall z$ não está agindo sobre ela (a fórmula é molecular, o operador principal é $\wedge$, e o escopo de $\forall z$ é apenas a fórmula Lxz).

É preciso mencionar que uma ocorrência de variável é sempre livre ou ligada *relativamente a alguma fórmula*. Por exemplo, embora todas as ocorrências de x em $\forall x\neg Lxx$ sejam ligadas, as ocorrências de x em $\neg Lxx$ são livres.

Uma fórmula é chamada *aberta* se possui pelo menos uma ocorrência livre de alguma variável, como $\forall x\exists zQxyz$ ou $(Fw \rightarrow \forall wFw)$, nas quais as variáveis y e w, respectivamente, ocorrem livres. Note que as outras duas ocorrências de w em $(Fw \rightarrow \forall wFw)$ estão ligadas — mas isto não importa; basta *uma* ocorrência livre, seja de que variável for, e a fórmula é aberta.

De modo análogo, uma fórmula é chamada de *fechada* caso não possua nenhuma ocorrência livre de variável, como $(\forall x(Px \rightarrow Qx) \wedge \exists wRw)$. As fórmulas fechadas são chamadas ainda de *sentenças*.

Antes de passarmos aos exercícios, introduziremos uma pequena convenção para facilitar um pouquinho na escrita das fórmulas. Conforme vimos no capítulo anterior, o uso de parênteses elimina as ambigüidades. Contudo, como você já deve ter notado, um excesso de parênteses pode acabar prejudicando a facilidade em ler uma fórmula. Em razão disso, é usual introduzir-se uma série de abreviações, ou seja, convenções que nos permitem, em alguns casos, eliminar parênteses "desnecessários". Por exemplo, a primeira coisa que se pode fazer é dispensar os parênteses externos de uma fórmula molecular, se ela está escrita isoladamente. Assim, podemos escrever

$$(Fs \wedge Gs) \rightarrow Ms$$

como uma abreviação de

$$((Fs \wedge Gs) \rightarrow Ms),$$

e

$$\forall x\forall yRxy \wedge \exists z(Qz \vee Pz)$$

como uma abreviação de

$$(\forall x\forall yRxy \wedge \exists z(Qz \vee Pz)).$$

Essa vai ser nossa primeira convenção com respeito a abreviaturas. Por enquanto, ela será a única; bem mais tarde veremos algumas outras.

Uma última observação. Suponha que tenhamos escrito uma fórmula sem os parênteses externos; digamos, $Rab \rightarrow (Px \wedge Qx)$. Se quisermos agora tomar essa fórmula e negá-la (por exemplo), teremos que *recolocar* os parênteses: $\neg(Rab \to (Px \wedge Qx))$. Se não fizermos isso, a ausência de parênteses deixaria $\to$ como o operador principal da fórmula. Ou seja, $\neg Rab \to (Px \wedge Qx)$ é obviamente um condicional. Por quê? Bem, como os únicos parênteses que deixamos de escrever, pela nossa convenção, são os externos, se fôssemos reintroduzi-los em $\neg Rab \to (Px \wedge Qx)$ teríamos $(\neg Rab \to (Px \wedge Qx))$ — um condicional.

De modo similar, se quisermos quantificar universalmente a fórmula $Rab \to (Px \wedge Qx)$, ela deve obviamente ser recolocada entre parênteses. O resultado seria a fórmula $\forall x(Rab \to (Px \wedge Qx))$. Resumindo, se quisermos tomar $Rab \to (Px \wedge Qx)$ para fazer com ela qualquer operação, primeiro recolocamos os parênteses. Lembre-se de que ela não é uma fórmula verdadeira, apenas a *abreviação* de uma fórmula. Os parênteses externos, embora não apareçam mais, devem ser entendidos como ainda "estando lá", escondidos.

A partir dos exercícios abaixo essa convenção já está em uso.

Exercício 7.1 Construa a árvore de formação para cada uma das fórmulas abaixo, e faça a lista de suas subfórmulas:

(a)	$\neg Fa \wedge Gb$	(d)	$(\forall x\exists yRxy \vee \neg Fa) \to \neg Rab$
(b)	$\neg(Fa \wedge (\neg Gb \to Rab))$	(e)	$\neg(Fa \wedge Gb) \to \neg(Rbc \wedge Gb)$
(c)	$Rtp \leftrightarrow \forall x(Rtx \wedge \exists yRxy)$	(f)	$\neg\neg\forall x\exists yRxy \wedge (Fa \to Rbc)$

Exercício 7.2 Diga se as fórmulas abaixo são sentenças ou não, qual é o escopo de cada quantificador e quais são variáveis que ocorrem livres ou ligadas nelas.

(a)	Fx	(h)	$\exists x\forall yGxy \to \forall y\exists xGyx$
(b)	$\forall xFx$	(i)	$\forall xFx \vee \neg Fx$
(c)	Pa	(j)	$Pa \to (Pa \to Pa)$
(d)	$\forall y\neg Py$	(k)	$Ax \to \forall xAx$
(e)	$\neg\forall xFx \vee Ga$	(l)	$(\exists x(Qa \leftrightarrow Qx) \leftrightarrow Qa) \leftrightarrow Qx$
(f)	$\forall xPx \to Qb$	(m)	$\neg Pa \wedge \neg Qb$
(g)	$\forall x(\forall yRxy \to Ryx)$	(n)	$\forall x\exists y\forall z((Sxyz \wedge Szya) \to Cx)$

7.2 Proposições categóricas

No restante deste capítulo, vamos ver alguns exemplos mais complicados de como traduzir, para a linguagem do CQC, sentenças que

envolvem quantificação. Alguns desses exemplos, clássicos na história da lógica, dizem respeito às proposições (ou sentenças) *categóricas*, da teoria do silogismo de Aristóteles. As proposições categóricas são aquelas que correspondem a uma das quatro formas seguintes:

- Todo A é B (universal afirmativa)
- Nenhum A é B (universal negativa)
- Algum A é B (particular afirmativa)
- Algum A não é B (particular negativa)

em que as letras A e B funcionam como variáveis para expressões que especificam classes, como 'homem', 'gato', 'mamífero aquático', 'professor de violino que mora no Canto da Lagoa' etc. Como tais proposições são o material de que os silogismos são construídos, e como a teoria do silogismo era considerada a lógica até meados do século passado, seria interessante ver como dar conta delas usando a linguagem do CQC.

A propósito, há várias maneiras em português de expressar uma proposição categórica. Por exemplo, no caso de uma universal afirmativa como 'Todo gato é mamífero', poderíamos dizer também: 'Todos os gatos são mamíferos', 'Os gatos são mamíferos', 'Gatos são sempre mamíferos', 'Somente (só, apenas) os mamíferos são gatos', 'Se algo é um gato, então é um mamífero' etc. Variações estilísticas semelhantes são também possíveis para os outros casos.

Você pode estar se perguntando se não houve um erro a respeito de uma das variações acima. 'Somente os mamíferos são gatos' diz a mesma coisa que 'todos os gatos são mamíferos'? É isso mesmo?

É isso mesmo. Veja, há uma diferença entre dizer que *somente* os mamíferos são gatos e que *todos* os mamíferos são gatos, concorda? A segunda afirmação é falsa, pois nem todos os mamíferos são gatos (há os morcegos e ornitorrincos, por exemplo). Por outro lado, que dizer de 'somente os mamíferos são gatos'? Parafraseando isso, chegamos a algo como 'não existe algo que não seja mamífero, mas que seja um gato'. Ou seja, se algo é um gato, tem que ser um mamífero. Ou seja, mais uma vez, todos os gatos são mamíferos.

Vamos então ver como traduzir proposições categóricas para a nossa linguagem artificial, começando pelas particulares afirmativas. Por exemplo, digamos que queremos formalizar a sentença 'alguns peixes são azuis' — ou, de modo equivalente em português, 'algum peixe é azul', ou 'alguma coisa é um peixe azul'. Bem, se quiséssemos formalizar 'Cleo é um peixe azul', teríamos, como você se recorda do capítulo anterior,

$$Pc \wedge Ac$$

(já tendo eliminado os parênteses externos). Mas como ficaria, então, 'alguns peixes são azuis'? Obviamente teremos que utilizar variáveis e o quantificador existencial. Parafraseando a sentença em questão, temos algo assim:

Há ao menos um x que é um peixe e é azul,

ou seja,

Há ao menos um x tal que: x é um peixe e x é azul.

O resultado final, portanto, é

$$\exists x(Px \wedge Ax),$$

que diz que existe ao menos um x que tem as duas propriedades: ser peixe e ser azul.

Note que, na fórmula acima, os parênteses não podem ser esquecidos! Você ainda recorda a distinção entre, digamos, $\neg Pc \wedge Ac$ e $\neg(Pc \wedge Ac)$? No primeiro caso, temos uma conjunção; no segundo, a negação de uma conjunção. Assim, se escrevermos

$$\exists x Px \wedge Ax,$$

apenas a variável em Px está sendo quantificada; a ocorrência de x em Ax está fora do escopo do quantificador e, portanto, livre.

Se quiséssemos agora formalizar a sentença a seguir:

Algo é um cachorro, e algo é um peixe. (4)

teríamos

$$\exists x Cx \wedge \exists x Px. \quad (5)$$

Note, primeiro, que a sentença (4) acima não é categórica. Depois, as duas ocorrências de $\exists x$ acima são completamente independentes: de um lado estamos afirmando que alguma coisa é um cachorro, $\exists x Cx$, enquanto, de outro, afirmamos que algo é um peixe: $\exists x Px$. E esses indivíduos podem ser (no caso de peixes e cachorros, certamente são) distintos. Observe que a fórmula acima é diferente de

$$\exists x(Cx \wedge Px).$$

Esta, sim, diz que há um indivíduo que tem as duas propriedades: a de ser um cachorro e a de ser um peixe, o que no mundo real não é verdade. Se quiser enfatizar a possibilidade de que os indivíduos sejam distintos, você poderia ter formalizado a sentença (4) por meio de

$$\exists x Cx \wedge \exists y Py,$$

mas isso não altera muita coisa, uma vez que as duas fórmulas são equivalentes. Como eu disse, as duas ocorrências de $\exists x$ em (5) são independentes uma da outra, e tanto faz que variável você utiliza — o uso de variáveis distintas não quer dizer que haja dois indivíduos diferentes envolvidos na história.

Vejamos agora um exemplo de uma proposição categórica do tipo particular negativa, como 'algum pingüim não mora na Antártida'. O que queremos dizer com isso é que existe pelo menos um indivíduo que tem a propriedade de ser um pingüim, mas que não tem a propriedade de morar na Antártida. Parafraseando isso, temos:

Há pelo menos um x tal que: x é um pingüim e
x não mora na Antártida.

Ou seja, usando P para 'x é um pingüim', e A para 'x mora na Antártida':

$$\exists x(Px \wedge \neg Ax).$$

Mas nem todas as expressões que representam classes nas proposições categóricas precisam ser propriedades simples como 'x é um peixe'. Podemos ter coisas mais complexas, envolvendo vários símbolos de predicado. Digamos que pretendemos formalizar a sentença 'algum pingüim que mora na Antártida não gosta de frio'. Isso é um outro exemplo de uma particular negativa: algum A (um pingüim que mora na Antártida) não é um B (um indivíduo que gosta de frio). Ou seja:

> Algum [pingüim que mora na Antártida] não é [um indivíduo que gosta de frio].

Usando F para 'x gosta de frio', temos então:

$$\exists x((Px \wedge Ax) \wedge \neg Fx).$$

Vamos agora examinar alguns exemplos com o quantificador universal, começando com uma universal afirmativa como 'todo peixe é azul'. Tentemos fazer uma paráfrase dessa sentença. Podemos começar com 'Qualquer peixe é azul', ou 'qualquer coisa que seja um peixe azul', ou 'para qualquer coisa, é verdade que, se esta coisa é um peixe, então é azul'.

Esta última paráfrase já nos coloca mais próximos do que desejamos. Note que apareceu nela um operador, o nosso 'se ... então ...'. Assim, nossa paráfrase ficará mais ou menos como segue, substituindo x por 'esta coisa':

> Para qualquer x, se x é um peixe então x é azul.

Isto corresponde a

$$\forall x(x \text{ é peixe} \rightarrow x \text{ é azul}),$$

que é imediatamente formalizável da seguinte maneira:

$$\forall x(Px \rightarrow Ax).$$

Note, portanto, que na estrutura da sentença 'todo peixe é azul' está escondida uma implicação.

Obviamente, não podemos formalizar a sentença 'todo peixe é azul' com

$$\forall x(Px \wedge Ax).$$

Esta fórmula, na verdade, está dizendo que

> qualquer que seja o indivíduo x, x é um peixe *e* x é azul,

ou seja, que todos os indivíduos do universo têm as duas propriedades: ser peixe e ser azul. Isso só é verdade, claro, num universo de peixes azuis — i.e., num universo onde todos os indivíduos, sem exceção, são peixes azuis. Contudo, não é isso que a sentença original afirmava. Você percebe a diferença entre '*Todos* são peixes azuis' e '*Todos os peixes* são azuis', não é mesmo? O segundo caso significa dizer que, para qualquer x, vale o seguinte: *se* ele for peixe, *então* é azul. Mas um certo x pode, claro, não ser um peixe, e ter outra cor.

De modo análogo, uma sentença como 'nenhum peixe é azul' pode ser parafraseada como 'se algo é um peixe, então *não é* azul', e podemos formalizar isso assim:

$$\forall x(Px \rightarrow \neg Ax).$$

Ou seja: para qualquer x, se x é um peixe, então x não é azul. Alternativamente, poderíamos usar

$$\neg\exists x(Px \wedge Ax),$$

ou seja, não existe algo que seja um peixe azul.

Na teoria clássica do silogismo, letras como A e B serviam para propriedades. Mas como o CQC também nos permite trabalhar com relações, sentenças que as envolvem também podem ser formalizadas. Por exemplo,

> Todos os filhos de João são estudantes.

Esta sentença tem a mesma forma de uma universal afirmativa; veja:

> Todo [filho de João] é [estudante].

Se começarmos a formalizar isso, teremos

$$\forall x(x \text{ é filho de João} \rightarrow x \text{ é estudante}).$$

Precisamos, agora, apenas de uma constante individual e de constantes de predicado. Por exemplo, j para João, F para 'x é filho de y' e E para 'x é estudante'. Assim:

$$\forall x(Fxj \rightarrow Ex).$$

Considere agora um exemplo mais complicado:

Nenhum filho adolescente de João é estudante.

Essa sentença tem a forma 'Nenhum A é B', uma universal negativa:

Nenhum [filho adolescente de João] é [estudante].

Como um início de formalização, temos:

$$\forall x(x \text{ é filho adolescente de João} \to \neg x \text{ é estudante}).$$

Ou seja:

$$\forall x((x \text{ é filho de João} \wedge x \text{ é adolescente}) \to \neg x \text{ é estudante}).$$

E, usando A para 'x é adolescente', temos, finalmente:

$$\forall x((Fxj \wedge Ax) \to \neg Ex).$$

Como você vê, muitas sentenças de estrutura mais complexa podem ser reduzidas a uma das quatro formas básicas de proposição categórica. O quadro seguinte resume o que vimos até agora:

Todo A é B	$\forall x(Ax \to Bx)$
Nenhum A é B	$\forall x(Ax \to \neg Bx)$
Algum A é B	$\exists x(Ax \wedge Bx)$
Algum A não é B	$\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$

Entretanto, isso é apenas uma pequena parte da história, pois há muitos outros tipos de proposição (ou sentença). Antes de passarmos aos exercícios, porém, um último exemplo. Tomemos a sentença

Os gatos e os cachorros são animais domésticos.

Obviamente, estamos falando de todos os gatos e cachorros. Assim, usando os predicados G, C e A, temos:

$$\forall x((Gx \vee Cx) \to Ax).$$

Note, agora, uma coisa curiosa: embora na sentença em português tenha aparecido uma conjunção — 'gatos *e* cachorros' —, na fórmula usamos $\vee$. Para perceber a razão disso, compare a fórmula anterior com a seguinte:

$$\forall x((Gx \wedge Cx) \to Ax).$$

Essa última está dizendo que qualquer coisa que seja *um gato e um cachorro* é um animal doméstico. Mas certamente não existe um indivíduo que seja gato e cachorro ao mesmo tempo. Assim, para exprimir corretamente o que estava em português, precisamos usar a disjunção: qualquer x que seja um gato *ou* que seja um cachorro é um animal doméstico, o que é justamente o que pretendíamos.

Exercício 7.3 Traduza as sentenças abaixo para a linguagem do CQC, usando a notação sugerida:

(a) Alguns homens não são sinceros. (H: x é homem; S: x é sincero)
(b) Todas as mulheres são lindas. (M: x é mulher; L: x é linda)
(c) Nenhum peixe é anfíbio. (P: x é peixe; A: x é anfíbio)
(d) Alguns metais são líquidos. (M: x é um metal; S: x é líquido)
(e) Nenhum animal é vegetal. (A: x é um animal; T: x é um vegetal)
(f) Nem todos os animais são invertebrados. (I: x é invertebrado)
(g) Alguns papagaios não são vermelhos. (P: x é um papagaio; R: x é vermelho)
(h) Nenhum papagaio é vermelho.
(i) Há ao menos um papagaio vermelho.
(j) Há ao menos um papagaio, e ao menos uma coisa vermelha.
(k) Alguns números naturais são ímpares. (N: x é um número natural; I: x é ímpar)
(l) Tudo que é azul é bonito. (A: x é azul; B: x é bonito)
(m) Todo poeta é romântico. (P: x é um poeta; R: x é romântico)
(n) Nenhum poeta romântico vende muitos livros. (L: x vende muitos livros)
(o) Qualquer pessoa que seja persistente pode aprender lógica. (P: x é uma pessoa; T: x é persistente; L: x pode aprender lógica)
(p) Há crianças que gostam de brincar. (C: x é criança; G: x gosta de brincar)
(q) Toda criança gosta de brincar.
(r) Toda criança travessa gosta de brincar. (T: x é travessa)

(s) Toda criança travessa gosta de brincar e de ir ao cinema. (K: x gosta de ir ao cinema)
(t) Qualquer amigo de Pedro é amigo de João. (p: Pedro; j: João; A: x é amigo de y)
(u) Nem todos os espiões são mais perigosos do que Boris. (b: Boris; S: x é um espião; D: x é mais perigoso do que y)
(v) Nenhum espião é mais perigoso do que Natasha. (n: Natasha)
(w) Qualquer um que seja mais perigoso do que Natasha é mais perigoso do que Boris.
(x) Nenhum espião que seja mais perigoso do que Natasha é mais perigoso do que Boris.
(y) Alguém é mais perigoso do que Boris e Natasha.
(z) Há um espião que não é mais perigoso do que Boris e nem do que Natasha.

7.3 Quantificação múltipla

Na seção anterior, nos restringimos a formalizar principalmente proposições categóricas, que, como você notou, envolvem apenas um quantificador (existencial ou universal). No entanto, é também comum termos sentenças em que aparecem mais de um quantificador. Já havíamos visto alguns exemplos na seção anterior (como a última sentença do exercício acima). Mas é óbvio que podemos tomar, digamos, duas proposições categóricas quaisquer e fazer sua conjunção (ou disjunção etc.):

Os gatos são pretos, e os cisnes são brancos.

A tradução para a linguagem do **CQC** é óbvia:

$$\forall x(Gx \to Px) \wedge \forall x(Cx \to Bx)$$

Deve estar claro também que você pode tomar quaisquer sentenças gerais e com elas, através de operadores e quantificadores, formar sentenças mais complexas. Por exemplo, considere a sentença

Se todos os gatos são pretos, então não existem gatos cor-de-laranja.

Usando G, P e L para as propriedades envolvidas, teremos:

$$\forall x(Gx \to Px) \to \neg\exists x(Gx \wedge Lx),$$

que, claro, não é uma fórmula geral, mas uma implicação. Um outro exemplo:

Nem todos os gatos são pretos, nem há gatos maiores que Miau que sejam cor-de-laranja.

Usando agora, além do que já tínhamos, M para a relação 'x é maior que y', obtemos

$$\neg\forall x(Gx \to Px) \wedge \neg\exists x((Gx \wedge Mxm) \wedge Lx).$$

Os casos mais interessantes envolvendo quantificadores, porém, ocorrem quando há mais de um quantificador e um ocorre dentro do escopo do outro. Por exemplo, considere a sentença 'todos gostam de alguém'. Ela pode ser parafraseada do seguinte modo: 'qualquer que seja x, há um y do qual ele gosta', i.e.:

qualquer que seja x, há um y tal que x gosta de y.

Na linguagem do **CQC**, usando G para 'x gosta de y':

$$\forall x \exists y Gxy.$$

A propósito, a ordem dos quantificadores é de fundamental importância. A fórmula seguinte, parecida com a anterior, mas com a ordem dos quantificadores invertida, diz algo bem diferente:

$$\exists y \forall x Gxy.$$

Isso afirma que existe algum indivíduo, y, tal que, qualquer que seja x, x gosta de y. Em outras palavras (e símbolos), existe algum indivíduo y do qual todos gostam: João gosta de y, Maria gosta de y etc. O que é falso, pois, de modo geral, ninguém é uma unanimidade. Por outro lado, 'todos gostam de alguém' é provavelmente verdadeira: para qualquer pessoa, há alguém de quem ela gosta, e duas pessoas diferentes podem bem gostar de outras pessoas distintas: João gosta de Maria, Maria gosta de Pedro, Pedro gosta de Etelvina etc. (Basta acrescentar que Carlos também gosta de Etelvina e já teremos material para uma novela!)

Digamos que queremos agora formalizar as sentenças 'há alguém que não gosta de ninguém' e 'há alguém que não gosta de todos'. A primeira fica como se segue:

$$\exists x \forall y \neg Gxy,$$

que diz que há um x tal que, qualquer que seja y, x não gosta de y. Isto é, x não gosta de nenhum y mesmo — não gosta de ninguém. Diferentemente disso, a segunda sentença, que diz que alguém não gosta de todos, é ambígua. Por um lado, ela pode estar significando que há alguém que, embora goste de algumas pessoas, não gosta de todas elas sem exceção. Isto é, temos o seguinte:

$$\exists x \neg \forall y Gxy,$$

ou seja, para algum x, não é verdade que ele goste de todo e qualquer y. Por outro lado, a sentença 'há alguém que não gosta de todos' pode também significar que há alguém que não gosta de qualquer pessoa — ou seja, que não gosta de ninguém. Neste caso, essa sentença diz o mesmo que a primeira acima mencionada, e a fórmula correspondente é a mesma.

Mais um exemplo, neste caso envolvendo três quantificadores: dados três indivíduos quaisquer, se o primeiro é pai do segundo, e o segundo é mãe do terceiro, então o primeiro é avô (materno) do terceiro. Usando P, M, e A para as relações 'x é pai de y', 'x é mãe de y' e 'x é avô materno de y', respectivamente, ficamos com

$$\forall x \forall y \forall z((Pxy \wedge Myz) \rightarrow Axz).$$

E algo ligeiramente parecido: se um indivíduo é avô materno de outro, então há um terceiro de quem o primeiro é o pai, e que é mãe do segundo. Isto é: quaisquer que sejam x e y, se x é avô materno de y, então há um z tal que x é pai de z e z é mãe de y. Ou seja:

$$\forall x \forall y(Axy \rightarrow \exists z(Pxz \wedge Mzy)).$$

Para encerrar, vamos tomar uma sentença bem complicada, e ver como podemos traduzi-la para a linguagem do CQC. Digamos que eu peça a você para formalizar a sentença

Todo marciano verde que é rico possui uma casa em Syrtis Major.

Suponhamos também que você deva fazer isso utilizando a seguinte notação:

M: x é um marciano;	C: x é uma casa;
G: x é verde;	S: x fica em Syrtis Major;
R: x é rico;	P: x possui y.

Parece complicado, mas na verdade não é tanto. Para começar, note que estamos tratando de uma proposição categórica — uma universal afirmativa:

Todo [marciano verde que é rico] [possui uma casa em Syrtis Major],

ou seja, o resultado final terá que ter a seguinte estrutura:

$$\forall x(x \text{ é marciano, verde e rico } \rightarrow x \text{ possui uma casa em Syrtis Major}). \quad (6)$$

A primeira parte é fácil, pois 'x é marciano, verde e rico' equivale a 'x é marciano e x é verde e x é rico'. Em símbolos: '$Mx \wedge (Gx \wedge Rx)$'. Podemos substituir isso em (6), ficando com:

$$\forall x((Mx \wedge (Gx \wedge Rx)) \rightarrow x \text{ possui uma casa em Syrtis Major}). \quad (7)$$

Mas como vamos agora representar 'x possui uma casa em Syrtis Major'? A resposta é mais ou menos imediata:

há um y, tal que y é uma casa, y fica em Syrtis Major, e x possui y.

Ou seja: $\exists y(Cy \wedge (Sy \wedge Pxy))$. Substituindo isso em (7), temos a solução:

$$\forall x((Mx \wedge (Gx \wedge Rx)) \rightarrow \exists y(Cy \wedge (Sy \wedge Pxy))).$$

Não é uma beleza? E agora, divirta-se com os exercícios abaixo. (Afinal, o que você faria nas tardes de sábado se não houvesse exercícios de lógica, não é mesmo?)

Exercício 7.4 Traduza as sentenças abaixo para a linguagem do CQC, usando a notação sugerida:
m: Miau; G: x gosta de y; A: x ama y.

(a) Todos amam alguém.
(b) Alguém ama alguém.
(c) Todos são amados por alguém.
(d) Alguém é amado por todos.
(e) Todos são amados por todos.
(f) Alguém não ama todos.
(g) Alguém não é amado por todos.
(h) Se todos gostam de Miau, Miau gosta de todos.
(i) Alguém gosta de alguém, se Miau gosta de todos.
(j) Todos gostam de Miau, mas Miau não gosta de ninguém.
(k) Todos amam alguém que não os ama.
(l) Todos amam alguém que não ama ninguém.
(m) Todos amam alguém, mas ninguém ama a todos.
(n) Ou alguém é amado por todos, ou alguém ama todos e alguém não ama ninguém.

Exercício 7.5 Traduza as sentenças abaixo para a linguagem do CQC, usando a notação sugerida:

(a) Nenhum amigo de Pedro é amigo de João. (p: Pedro; j: João; A: x é amigo de y)
(b) Qualquer amigo de Pedro que não seja um político é amigo de João. (P: x é um político)
(c) Qualquer amigo de Pedro ou Carlos é amigo de João. (c: Carlos)
(d) Qualquer amigo de Pedro é amigo de algum amigo de João.
(e) Qualquer amigo de Pedro ou Carlos é amigo de qualquer amigo de João.
(f) Nenhuma mulher é feia, mas algumas mulheres não são bonitas. (M: x é uma mulher; F: x é feia; B: x é bonita)
(g) Se todos os humanos são imortais, então Sócrates é imortal ou Sócrates não é humano. (s: Sócrates; H: x é humano; I: x é imortal)
(h) Nem todas as aves voam, se Tweety não voa. (t: Tweety; A: x é uma ave; F: x voa)
(i) Todo fazendeiro tem um burro no qual ele bate. (F: x é um fazendeiro; B: x é um burro; T: x pertence a y; H: x bate em y)

(j) Algum fazendeiro tem um burro no qual ele não bate.
(k) Todo homem ama uma mulher que o ama. (H: x é um homem; M: x é uma mulher; A: x ama y)
(l) Nem todo homem ama uma mulher que o ama.
(m) Todo homem ama uma mulher que ama alguém.
(n) Se todos os filósofos espertos são cínicos e apenas mulheres são filósofos espertos, então, se há algum filósofo esperto, alguma mulher é cínica. (F: x é um filósofo; M: x é uma mulher; E: x é esperto; C: x é cínico)

Exercício 7.6 Traduza as sentenças abaixo (algumas são um pouco complicadas!) para a linguagem do CQC, usando a notação sugerida:
a: Alice; b: Beatriz; c: Cláudia; L: x é um livro; P: x é um psicólogo; F: x é um filósofo; G: x gosta de y; D: x dá y para z.

(a) Alice gosta de algum filósofo que gosta dela.
(b) Todo filósofo gosta de algum livro.
(c) Há um livro do qual todos os filósofos gostam.
(d) Os filósofos gostam de todos os livros.
(e) Há um livro do qual nenhum psicólogo gosta.
(f) Nenhum psicólogo gosta de livros.
(g) Filósofos não gostam de psicólogos.
(h) Um filósofo deu um livro para Alice.
(i) Um filósofo deu um livro para Alice, do qual ela não gostou.
(j) Alice e Beatriz deram um livro para Cláudia.
(k) Um filósofo e um psicólogo deram um livro para Beatriz.
(l) Nem os filósofos nem os psicólogos gostam de si mesmos.
(m) Se algum psicólogo gosta de Beatriz, então algum filósofo também gosta.
(n) Se algum psicólogo gosta de alguém, então algum filósofo gosta desta mesma pessoa.
(o) Se algum psicólogo gosta de alguém, então algum filósofo também gosta de alguém.
(p) Ou os filósofos gostam de todos os livros, ou não gostam de nenhum.
(q) Alice e Beatriz gostam de todos os filósofos, se algum filósofo dá algum livro para alguém.
(r) Todos gostam dos filósofos, se todo filósofo dá algum livro para alguém.