CEZAR A. MORTARI

INTRODUÇÃO À LÓGICA

1ª reimpressão

Editora UNESP

imprensaoficial

$Mc \wedge Lc$ teria o valor **V**, pois é tanto verdade que Claudia Schiffer é uma mulher, quanto que ela é loura.

Como você viu pelos exemplos acima, a partir do valor de verdade das fórmulas atômicas, poderemos especificar as condições em que as fórmulas moleculares (e, como veremos depois, também as gerais) são verdadeiras. Tudo depende dos valores das fórmulas atômicas. Veremos depois como obtê-los.

No capítulo seguinte, vamos ver como é que se calcula o valor de uma fórmula molecular a partir dos valores de seus componentes (ou componente, em se tratando de uma negação). As interpretações que veremos nele, portanto, vão ser bem restritas. Mais tarde veremos como tratar do resto.

CAPÍTULO 9

VALORAÇÕES

Neste capítulo vamos começar a ver com mais detalhes a semântica para as nossas linguagens artificiais, investigando um tipo muito simples de interpretação, as interpretações proposicionais, ou *valorações*. Apesar de simples, tais interpretações já nos dão elementos suficientes para determinar o valor de verdade de fórmulas moleculares e, a partir disso, definir uma primeira noção de conseqüência lógica, que funciona para uma parte do **CQC** denominada *lógica proposicional*.

9.1 Lógica proposicional

As interpretações que vamos examinar neste capítulo não são para linguagens de primeira ordem, mas para subconjuntos dessas linguagens, chamados *linguagens proposicionais*. Essas linguagens compreendem apenas letras sentenciais (isto é, símbolos de predicados zero-ários), operadores, e parênteses. Ficam de fora as constantes e variáveis individuais, os quantificadores e qualquer símbolo de propriedade ou relação. Como você vê, uma linguagem proposicional é bem mais restrita. Uma definição mais precisa de linguagens proposicionais (ou linguagens de ordem zero) é a seguinte:

Definição 9.1 *Uma linguagem proposicional é um subconjunto da linguagem geral do* **CQC** *que contém apenas os símbolos dos operadores, os* *parênteses, e na qual todas as constantes de predicado (das quais há ao menos uma) são letras sentenciais.*

O *cálculo proposicional clássico*, **CPC**, ou simplesmente *lógica proposicional*, é uma parte do **CQC** caracterizada pelo uso de linguagens proposicionais. Dito de outra forma, o **CPC** engloba aquelas formas de argumento cuja validade pode ser mostrada já em uma linguagem proposicional.

Contudo, ainda que as linguagens proposicionais sejam mais restritas que as linguagens de primeira ordem, há muitas formas de argumento que são proposicionalmente válidas. Considere os dois exemplos abaixo:

P_1	Se é dia, então há luz.	P_1	Se todos os gatos são pretos, Miau é preto.
P_2	É dia.	P_2	Todos os gatos são pretos.
▶	Há luz.	▶	Miau é preto.

O primeiro dos argumentos acima pode ser formalizado (isto é, transcrito para uma linguagem artificial) simplesmente da seguinte maneira:

P_1 $A \to B$
P_2 A
▶ B

Porém, nada nos impede de formalizar o segundo igualmente da mesma forma, com A significando 'Todos os gatos são pretos' e B significando 'Miau é preto'. O segundo argumento pode ser formalizado, é claro, de um modo mais detalhado, como segue:

P_1 $\forall x(Gx \to Px) \to Pm$
P_2 $\forall x(Gx \to Px)$
▶ Pm

Isso, contudo, não é necessário para mostrar sua validade. Ou seja, os dois argumentos, no final das contas, têm a mesma forma: há uma premissa que é um condicional, e uma outra que afirma o antecedente desse condicional. A conclusão é o conseqüente do condicional.

Essa forma de argumento, a propósito, é chamada de *Afirmação do Antecedente*, ou ainda *Modus Ponens*.

Resumindo, então, há muitas formas válidas de argumento que se podem adequadamente representar fazendo uso simplesmente de linguagens proposicionais. Claro que tais linguagens não são suficientes para representar muitas outras formas (se fossem, não precisaríamos talvez do **CQC**). Note que, do ponto de vista proposicional, temos então apenas dois tipos de fórmula:

- fórmulas atômicas (letras sentenciais), como A, B, C etc.
- fórmulas moleculares, como $A \land B$, $\neg(C \to D)$, $A \lor E$ etc.

9.2 Funções de verdade

Voltando, agora, a falar de semântica, que é o que nos interessa no momento, temos a considerar o seguinte: as interpretações que vamos ver neste capítulo nos dão condições de calcular apenas o valor de fórmulas moleculares a partir de suas subfórmulas imediatas. Assim, o que precisamos é determinar, primeiro, qual o valor dessas subfórmulas. Obviamente, se uma subfórmula imediata for *outra* fórmula molecular, a pergunta se repete com relação às subfórmulas imediatas desta, e assim sucessivamente. Mas o que acontece, afinal, quando chegamos a uma fórmula atômica (isto é, uma letra sentencial)? De onde tiramos os valores destas?

De novo, um exemplo. Tomemos a conjunção $A \land B$. Para saber seu valor de verdade, precisaríamos primeiro dos valores de A e de B: mas como obtê-los? Bem, o que importa é que, seja lá qual for a situação, sejam lá quais forem as proposições que A e B estejam representando, A e B são, obviamente, ou verdadeiras ou falsas. Isto é, elas têm ou o valor de verdade **V**, ou o valor **F**.[1] Assim, digamos que temos alguma interpretação em que A e B são verdadeiras; neste caso, podemos dizer que a conjunção $A \land B$, relativamente a essa interpretação, é verdadeira, uma vez que seus dois elementos o são.

[1]Conforme indicado no capítulo anterior, veremos mais tarde como especificar as condições de verdade para as demais fórmulas atômicas.

A razão pela qual podemos calcular o valor de uma fórmula molecular a partir dos valores de suas subfórmulas é que os operadores do **CQC** são *funções de verdade*. Você está acostumado a lidar com funções numéricas, como a soma, em virtude de ter estudado aritmética na escola. A soma é uma função numérica porque toma dois números como argumentos e associa a eles um terceiro número, que corresponde à soma dos dois. Assim, aos números 2 e 5, a função soma associa o número 7. Aos números 4 e 5, a soma associa 9.

Funções de verdade são parecidas: são funções que tomam como argumentos valores de verdade e associam a estes um outro valor de verdade. Vamos ver como é isso, examinando os operadores caso a caso.

9.2.1 Negação

Suponhamos que temos uma sentença como 'Pedro é músico', representada aqui simplesmente pela letra sentencial A, que sabemos ser verdadeira. Qual seria o valor de sua negação, isto é, 'Pedro não é músico'? Como vimos no exemplo do capítulo anterior, que falava (mais uma vez) a respeito de Claudia Schiffer, se A tem o valor **V**, $\neg A$ recebe o valor **F**. Do mesmo modo, caso A tenha o valor **F**, sua negação recebe **V**.

Essa propriedade da negação pode ser resumida na seguinte tabelinha, que deve lembrar a você a tabuada da escola primária. É basicamente a mesma coisa, apenas aqui estamos trabalhando com valores de verdade, e não com números.

α	$\neg\alpha$
V	**F**
F	**V**

Explicando: na primeira coluna da tabela, temos uma fórmula α qualquer, que pode ser verdadeira ou falsa. Essas duas possibilidades são representadas pelas duas linhas na tabela. Na primeira, supomos que α tem o valor **V**; na segunda, que tem **F**. Na segunda coluna, temos, para cada linha, o valor correspondente de $\neg\alpha$. Quando α

tem **V**, isto é, como na linha 1, $\neg\alpha$ tem **F**. Quando α tem **F**, como na linha 2, $\neg\alpha$ tem **V**.

É claro que isso permite calcular o valor de fórmulas ainda mais complicadas. Por exemplo, sabendo que B é verdadeira, qual seria o valor de $\neg\neg B$? Bem, se B tem **V**, $\neg B$ tem obviamente **F**. Segue-se que a negação de $\neg B$, que é $\neg\neg B$, terá **V**. Simples, não é?

9.2.2 Conjunção

Como mencionado anteriormente, quando afirmamos uma conjunção $\alpha \wedge \beta$ estamos pretendendo dizer que as duas fórmulas, α e β, são verdadeiras. Se uma delas for falsa, então não diríamos que $\alpha \wedge \beta$ é verdadeira. Isso é resumido na seguinte tabela:

α	β	$\alpha \wedge \beta$
V	**V**	**V**
F	**V**	**F**
V	**F**	**F**
F	**F**	**F**

No caso, temos, agora, uma tabela com quatro linhas. Por quê? Ora, isso corresponde às quatro combinações possíveis de valores que duas fórmulas α e β quaisquer podem ter: ambas verdadeiras (na primeira linha), ambas falsas (na quarta linha), ou, alternadamente, uma verdadeira e a outra falsa (segunda e terceira linhas). No caso da negação, que é uma função de verdade de um argumento, temos apenas duas linhas: o argumento — uma fórmula α qualquer — é verdadeiro, ou falso. A conjunção, contudo, é uma função de verdade de dois argumentos. Assim, temos que considerar os quatro casos possíveis, e dizer que valor a conjunção leva em cada um deles.

Uma questão interessante, que se coloca neste momento, diz respeito à correspondência (ou não) desse sentido "lógico" da conjunção, e do 'e' em português. Podemos, em princípio, dizer que essa análise da conjunção (apresentada na tabelinha acima) se aproxima muito do nosso sentido intuitivo de conjunção. Contudo, alguns cuidados devem ser tomados. Considere, por exemplo, a sentença abaixo:

João pulou do edifício e morreu. (1)

Com certeza, estamos afirmando duas proposições atômicas: que João pulou do edifício, e que João morreu. Isso pode ser representado em uma linguagem proposicional por uma fórmula como $A \wedge B$. Contudo, é fácil ver que, se $A \wedge B$ é verdadeira, a fórmula $B \wedge A$ também o é. E esta, retraduzida, diz o seguinte:

João morreu e pulou do edifício. (2)

Ora, em uma leitura, a sentença (2) acima é verdadeira: é tanto verdade que João morreu, quanto que pulou do edifício. Mas a interpretação usual de (1), e também de (2), é que há uma conexão *temporal* entre A e B: João pulou do edifício, *e então* João morreu. Nessa segunda leitura, é claro que (1) é verdadeira, mas (2) é falsa.

A moral da história é que a conjunção, como definida pela tabela apresentada anteriormente, é uma "pasteurização", digamos, da conjunção (ou das conjunções) que temos em uma linguagem natural como o português. Algo similar ocorre com 'mas', que também é formalizado usando-se $\wedge$. Nesse caso, as duas sentenças abaixo, cujo sentido é diferente em português,

Pedro é inteligente e preguiçoso,

Pedro é inteligente, mas preguiçoso,

seriam formalizadas como, digamos, $Ip \wedge Pp$ — ou $A \wedge B$ numa linguagem proposicional. Em ambos os casos, estamos, de fato, afirmando duas proposições: que Pedro é inteligente e que ele é preguiçoso. As nuances de sentido que distinguem 'mas' de 'e' ficam, feliz ou infelizmente, perdidas.

9.2.3 Disjunção

A disjunção, como você recorda, corresponde a 'ou' em português. Mas, em português, existem dois sentidos diferentes de 'ou': um exclusivo e um inclusivo. O sentido inclusivo é aquele de 'e/ou', isto é, temos uma possibilidade, ou a outra ou, eventualmente, as duas coisas. Por exemplo, podemos dizer que ou chove ou faz sol: normalmente temos uma coisa, ou a outra — mas, às vezes, acontece

de termos as duas coisas ao mesmo tempo (nos casamentos de viúva, como se costuma dizer).

Por outro lado, existe um outro sentido da disjunção, o exclusivo, que representa uma alternação legítima: ou uma coisa, ou a outra, mas não as duas. Por exemplo, ou João será eleito prefeito de Florianópolis, ou José será eleito. Obviamente, não pode acontecer que os dois sejam eleitos ao mesmo tempo: as alternativas se excluem mutuamente.

Na interpretação inclusiva, uma disjunção é verdadeira se um dos disjuntos o for, ou, eventualmente, se os dois forem. Já no caso da disjunção exclusiva, se os dois disjuntos forem verdadeiros, a disjunção será falsa. Assim, o que ocorre é que temos duas funções de verdade correspondentes à disjunção. Contudo, no **CQC**, o operador $\vee$ é costumeiramente usado para representar a disjunção *inclusiva*, que é caracterizada pela seguinte tabela:

α	β	$\alpha \vee \beta$
V	**V**	**V**
F	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**F**	**F**

Como você vê, na primeira linha, em que tanto α quanto β são verdadeiras, a disjunção $\alpha \vee \beta$ também é verdadeira. Uma disjunção só será falsa se os dois disjuntos forem falsos.

Uma tabela para uma disjunção exclusiva, a propósito, seria igual àquela apresentada acima, apenas trocando **V** por **F** na primeira linha. Isto é, se α e β são verdadeiras, $\alpha \vee \beta$ recebe **F**.

Com relação aos problemas de tradução, note que, pelo sentido da disjunção que foi definido pela tabela apresentada, uma sentença como

A Terra é um planeta ou Beethoven é italiano

é considerada verdadeira, ainda que, intuitivamente, não consideramos haver uma alternativa legítima entre as sentenças 'A Terra é um planeta' e 'Beethoven é italiano', pois uma coisa não tem nada a ver com a outra.

9.2.4 Implicação material

Vamos, agora, examinar a tabela de verdade para $\rightarrow$, nossa implicação material. Aqui, você tem que prestar bastante atenção, pois as coisas são um pouco complicadas.

A discussão sobre a verdade de um condicional é antiga. Para falar a verdade, desde a Grécia, e há muitas opiniões divergentes — começando por filósofos como Diodoro Cronus (séc. IV a. C.) e seu discípulo, Philo de Mégara. Todo mundo parece concordar, para início de conversa, que, se o antecedente de uma implicação for verdadeiro, e o conseqüente falso, então a implicação, como um todo, será falsa.

Porém, o que dizer dos outros casos? Suponhamos que α e β sejam verdadeiras: o que concluir a respeito do valor de $\alpha \rightarrow \beta$? Pode ser que α implique β, e pode ser que não. O que fazer?

A lógica clássica, seguindo inclusive a análise dos condicionais feita por Philo, toma uma decisão radical: fora o caso visto acima, em que uma implicação é falsa, em todos os outros, ela será verdadeira; conforme a tabela abaixo:

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Você há de concordar que esta é uma situação muito esquisita. Por exemplo, nessa análise uma sentença como 'Se $2+2=5$ então a Lua é feita de queijo' é uma implicação verdadeira. Mas, certamente, não estamos dispostos a concordar que $2+2=5$ implica que a Lua é feita de queijo, pois uma coisa não tem nada a ver com a outra.[2] De modo análogo, os dois condicionais seguintes são considerados verdadeiros:

(i) Se o califa Omar não queimou a Biblioteca de Alexandria, então alguma outra pessoa o fez.

[2] Há algumas situações, contudo, em que afirmamos tranqüilamente condicionais em que o antecedente nada tem a ver com o conseqüente. Por exemplo, 'se isto é uma obra de arte, então sou um mico de circo'. Isso, porém, é apenas uma outra maneira de afirmar 'isto *não* é uma obra de arte'.

(ii) Se o califa Omar não tivesse queimado a Biblioteca de Alexandria, então alguma outra pessoa o teria feito.

Contudo, intuitivamente, o primeiro é verdadeiro, enquanto o segundo é considerado falso. Condicionais como estes são chamados de *contrafactuais*, pois seus antecedentes são falsos em virtude dos fatos (eles afirmam algo contra os fatos). Porém, pela tabela de verdade acima, qualquer condicional com antecedente falso é verdadeiro.

O problema todo com relação à implicação é que existem vários tipos de condicional em português. A expressão 'se... então...' é usada para exprimir várias relações de dependência entre proposições, mas a maioria delas não é adequadamente reproduzida pela interpretação dada pelo **CQC** para $\rightarrow$. A razão de a lógica clássica ter escolhido o caminho que escolheu é que essa análise do condicional, diz-se, é adequada para trabalhar na matemática. Como os iniciadores da lógica contemporânea eram, em sua maioria, matemáticos, eles acharam que tal análise era suficiente. (É a análise mais simples que se pode fazer, na verdade.) Mas essa maneira de representar a implicação, realmente, deixa muito a desejar. Como veremos no final deste livro, existem tentativas diferentes de formalizar uma implicação mais sensata, começando com lógicas modais, mas, principalmente, por meio de lógicas relevantes. Mas isso é um assunto para mais tarde. Por enquanto, você tem que se conformar com a tabelinha acima.

Talvez ajude a entender isso se você pensar em $\alpha \rightarrow \beta$ como apenas uma maneira mais simples de dizer $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$. Isto, afinal, é o que diz a tabela de verdade: temos $\alpha \rightarrow \beta$ quando não acontece, na situação presente, que α é verdadeira e β é falsa. Nada mais. (Mas claro que ninguém é obrigado a gostar disso. Voltaremos a falar no assunto no capítulo 18.)

9.2.5 Bi-implicação

A análise dos bicondicionais tem, obviamente, os mesmos problemas da análise dos condicionais. Uma bi-implicação corresponde a uma implicação nas duas direções: $\alpha \leftrightarrow \beta$ é o mesmo que $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$. A partir disso, fica fácil calcular, usando as tabelas de conjunção e implicação, os valores da tabela do bicondicional:

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	**V**	**V**
F	**V**	**F**
V	**F**	**F**
F	**F**	**V**

Uma outra maneira de entender isso é pensar que $\alpha \leftrightarrow \beta$ afirma que α é equivalente a β. Sendo α e β equivalentes, elas deveriam ter o *mesmo* valor. Assim, nas linhas onde α e β têm o mesmo valor (ambas verdadeiras, ou ambas falsas), o bicondicional $\alpha \leftrightarrow \beta$ tem o valor **V** (primeira e quarta linhas). Caso α e β tenham valores diferentes, $\alpha \leftrightarrow \beta$ terá o valor **F** (segunda e terceira linhas).

9.3 Valorações

A partir das tabelas básicas para os operadores, que apresentamos acima, podemos definir um primeiro tipo, simplificado, de interpretação: uma *interpretação proposicional*, ou *valoração*. Você recorda, da discussão anterior, que, na lógica proposicional, consideramos que as fórmulas moleculares são construídas a partir de fórmulas atômicas (no caso, letras sentenciais apenas) pelo uso de operadores. Uma vez que o valor de uma fórmula molecular pode ser obtido a partir do valor de seus componentes, uma valoração só precisa atribuir um valor de verdade a cada uma das fórmulas atômicas. E é justamente isso que uma valoração é: uma atribuição de valor de verdade a todas as fórmulas atômicas. Podemos definir uma valoração, portanto, como uma função que toma argumentos no conjunto de todas as fórmulas atômicas, e dá a elas valores no conjunto dos valores de verdade $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$.

Por exemplo, digamos que temos as seguintes fórmulas: A, B, C, e D. Uma certa valoração, vamos chamá-la de v_1, poderia atribuir a essas fórmulas os seguintes valores: **V**, **F**, **V**, e **F**, respectivamente. Isto é:

$$v_1(A) = \mathbf{V}, \quad v_1(B) = \mathbf{F}, \quad v_1(C) = \mathbf{V}, \quad v_1(D) = \mathbf{F}.$$

A expressão '$v_1(A) = \mathbf{V}$', claro, significa que o valor de verdade de A na valoração v_1 é **V**. Outras valorações diferentes, que poderíamos denominar v_2 e v_3, poderiam atribuir a essas fórmulas os seguintes valores:

$$v_2(A) = \mathbf{F}, \quad v_2(B) = \mathbf{V}, \quad v_2(C) = \mathbf{V}, \quad v_2(D) = \mathbf{V},$$
$$v_3(A) = \mathbf{F}, \quad v_3(B) = \mathbf{F}, \quad v_3(C) = \mathbf{F}, \quad v_3(D) = \mathbf{F}.$$

É bom lembrar que uma valoração atribui um valor de verdade a *todas* as fórmulas atômicas de uma linguagem proposicional. O que apresentamos acima foi apenas uma parte minúscula de v_1, v_2 e v_3.

Agora, como o valor de uma fórmula molecular numa valoração v qualquer pode ser calculado a partir dos valores que suas fórmulas mais simples tomam, uma vez que tenhamos uma fórmula α, e saibamos que valores v atribui às letras sentenciais que ocorrem em α, podemos calcular o valor de α com respeito a v. Isto é, podemos estender v de forma a que ela atribua um valor a qualquer fórmula, não somente às fórmulas atômicas.

Vamos a mais um exemplo: tomemos a fórmula $(C \wedge B) \rightarrow \neg D$, e seja v_1 como acima. Uma vez que $v_1(C) = \mathbf{V}$, e $v_1(B) = \mathbf{F}$, a tabela da conjunção nos diz que $v_1(C \wedge B) = \mathbf{F}$. E, uma vez que $v_1(D) = \mathbf{F}$, $\neg D$ terá o valor **V** com respeito a v_1. Tendo, assim, os valores tanto do antecedente quanto do conseqüente da implicação principal, o resultado final será que $v_1((C \wedge B) \rightarrow \neg D) = \mathbf{V}$. Como você vê na figura 9.1.

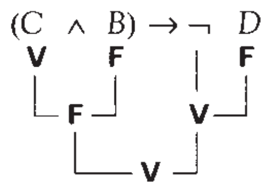

FIGURA 9.1 — Calculando o valor de $(C \wedge B) \rightarrow \neg D$ em v_1.

E qual seria o valor da mesma fórmula na valoração v_2? Bem, como $v_2(C) = v_2(B) = \mathbf{V}$, temos que $v_2(C \wedge B) = \mathbf{V}$. E como $v_2(D) = \mathbf{V}$, $v_2(\neg D) = \mathbf{F}$. Logo, $v_2((C \wedge B) \rightarrow \neg D) = \mathbf{F}$. Confira na figura 9.2.

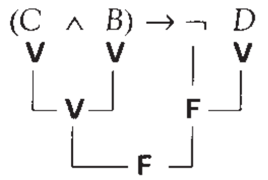

FIGURA 9.2 — Calculando o valor de $(C \wedge B) \rightarrow \neg D$ em v_2.

Podemos, enfim, dizer que uma fórmula α é verdadeira em uma valoração v se $v(\alpha) = \mathbf{V}$. O valor de uma fórmula atômica é dado pela valoração, e o valor de uma fórmula molecular pode ser calculado usando-se as tabelas básicas.

Uma outra maneira de definir uma valoração, porém, e que é a definição que vamos adotar oficialmente daqui por diante, é a seguinte:

Definição 9.2 *Uma valoração v é uma função do conjunto de todas as fórmulas de uma linguagem proposicional no conjunto de valores de verdade $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$, tal que:*

(a) $v(\neg\alpha) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = \mathbf{F}$;
(b) $v(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = v(\beta) = \mathbf{V}$;
(c) $v(\alpha \vee \beta) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = \mathbf{V}$ *ou* $v(\beta) = \mathbf{V}$;
(d) $v(\alpha \rightarrow \beta) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = \mathbf{F}$ *ou* $v(\beta) = \mathbf{V}$;
(e) $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = v(\beta)$.

Algumas observações sobre essa definição. Primeiro, note que ela foi especificada em termos de condições necessárias e suficientes, usando 'ssc' (isto é, 'se e somente se'). Considere a letra (a), por exemplo:

$$v(\neg\alpha) = \mathbf{V} \text{ sse } v(\alpha) = \mathbf{F}.$$

A idéia é que $\neg\alpha$ recebe o valor **V** exatamente quando α tem o valor **F**. Obviamente, então $\neg\alpha$ recebe o valor **F** quando α tem o valor **V**. Isso é equivalente ao seguinte:

$$v(\neg\alpha) = \mathbf{V}, \quad \text{se} \quad v(\alpha) = \mathbf{F};$$
$$v(\neg\alpha) = \mathbf{F}, \quad \text{se} \quad v(\alpha) = \mathbf{V}.$$

As condições para as outras fórmulas são analogamente formuladas.

Segundo, observe que as condições especificadas nessa definição de verdade espelham os requisitos das tabelas básicas. Por exemplo, uma condição necessária e suficiente para $\alpha \wedge \beta$ ser verdadeira é que tanto α quanto β sejam verdadeiras; $\alpha \wedge \beta$ será falsa se α for, ou se β for. O caso da implicação é curioso: $\alpha \rightarrow \beta$ é verdadeira se α (o antecedente) for falsa, ou se β (o conseqüente) for verdadeira. Se você conferir na tabela da implicação, você verá que isso faz sentido: se o antecedente de uma implicação é falso, ela é automaticamente verdadeira, independentemente de que valor de verdade possa ter o conseqüente. Analogamente, se o conseqüente for verdadeiro.

Exercício 9.1 Supondo que A, B, C, e D têm valores **V**, **F**, **F**, e **V**, respectivamente, numa certa valoração v, calcule o valor em v das fórmulas abaixo.

(a) $\neg A \wedge B$
(b) $\neg B \rightarrow (A \vee B)$
(c) $(C \vee A) \leftrightarrow \neg\neg C$
(d) $A \vee (A \rightarrow B)$
(e) $(D \vee \neg A) \rightarrow \neg C$
(f) $\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg(C \wedge B)$
(g) $\neg\neg D \wedge \neg(A \rightarrow A)$
(h) $(\neg A \vee C) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg C)$

9.4 Tabelas de verdade

Para determinar a validade de um argumento, contudo, precisamos saber o valor de certas fórmulas não apenas com respeito a uma certa valoração (que poderia, digamos, corresponder ao mundo real), mas em todos os casos possíveis. Por exemplo, suponhamos que temos algum conjunto de premissas, de onde se pretende tirar, como conclusão, a fórmula $(\neg A \wedge B) \rightarrow \neg A$. Como calcular, em todos os casos possíveis, o valor dessa fórmula, para que possamos determinar se, sempre que as premissas são verdadeiras, essa fórmula também é verdadeira?

A solução é simples: basta examinar o que são os 'casos possíveis' mencionados acima. Em princípio, isso corresponderia a todas as valorações — mas note que o número de valorações distintas pode ser até infinito, se tivermos um conjunto infinito de fórmulas atômicas (isto é, de letras sentenciais). Entretanto, as coisas não são tão ruins assim. Examinando $(\neg A \wedge B) \to \neg A$, vemos que estão envolvidas apenas *duas* fórmulas atômicas, A e B. Uma vez que, seja lá que valoração tivermos, elas podem apenas ser ou verdadeiras ou falsas, o número de combinações possíveis, que listamos na tabela a seguir, é *quatro*:

A	B
V	**V**
F	**V**
V	**F**
F	**F**

Assim, apesar do número infinito de valorações distintas, com relação a A e B as valorações se dividem em quatro grupos: as que dão **V** às duas fórmulas (linha 1 da tabela); as que dão **F** a A e **V** a B (linha 2); as que dão **V** a A e **F** a B (linha 3); e, finalmente, aquelas que dão **F** às duas fórmulas. Seja lá qual for a valoração, com relação a A e B ela cai em uma dessas quatro possibilidades, não havendo outras.

A partir daí, fica fácil calcular o resto. O que precisamos fazer é completar o lado direito da tabela com as subfórmulas imediatas de $(\neg A \wedge B) \to \neg A$ — mas, antes disto, com as subfórmulas imediatas destas, e assim por diante, na ordem que vai das mais simples para as mais complexas. Ou seja, precisamos fazer a lista de todas as subfórmulas de $(\neg A \wedge B) \to \neg A$, pois, para calcular o valor de qualquer fórmula, precisamos, obviamente, do valor de suas subfórmulas imediatas. Ora, a lista das subfórmulas de $(\neg A \wedge B) \to \neg A$ é

$$A, B, \neg A, \neg A \wedge B,$$

e o que fazemos, então, é simplesmente acrescentar isso à tabela, colocando $(\neg A \wedge B) \to \neg A$ no final:

A	B	$\neg A$	$\neg A \wedge B$	$(\neg A \wedge B) \to \neg A$
V	**V**			
F	**V**			
V	**F**			
F	**F**			

Agora, calculemos. Para obter o valor de $\neg A$ em uma linha, olhamos que valor A tem nessa linha. Assim, usando as tabelas básicas dos operadores, e seguindo as colunas da esquerda para a direita, ficamos, afinal, com o seguinte resultado:

A	B	$\neg A$	$\neg A \wedge B$	$(\neg A \wedge B) \to \neg A$
V	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**V**

Como você vê, a coluna final, embaixo da fórmula $(\neg A \wedge B) \to \neg A$, nos dá o valor que ela tem para cada valoração. Curiosamente, essa fórmula ficou com o valor **V** em todas as linhas. Falaremos logo mais sobre isso, mas, antes, vamos ver mais um exemplo. Seja a fórmula $(\neg A \vee C) \leftrightarrow \neg B$. A lista de todas as suas subfórmulas é a seguinte:

$$A, B, C, \neg A, \neg B, \neg A \vee C.$$

Examinando essa lista, vemos que existem três fórmulas atômicas: A, B, C. Como temos três fórmulas, teremos *oito* combinações diferentes de valores de verdade. Como você vê a seguir:

A	B	C
V	**V**	**V**
F	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**F**	**V**
V	**V**	**F**
F	**V**	**F**
V	**F**	**F**
F	**F**	**F**

Dado um número n de fórmulas atômicas, fica fácil calcular o número l de linhas que a tabela vai ter, através da seguinte equação:

$$l = 2^n.$$

No nosso exemplo, uma vez que $n = 3$, o número de linhas l será 2^3, isto é, $l = 8$. A tabela completa, tendo sido calculados todos os valores, fica assim:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee C$	$(\neg A \vee C) \leftrightarrow \neg B$
V	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**

Exercício 9.2 Construa tabelas de verdade para as fórmulas do exercício 9.1.

9.5 Tautologias, contradições e contingências

Se voltarmos a examinar as tabelas de verdade construídas no exercício anterior, poderemos notar a existência de algumas fórmulas cujo valor de verdade é sempre verdadeiro, qualquer que seja o valor atribuído às fórmulas atômicas que nela ocorrem. Em outras palavras, há fórmulas que obtêm **V** em todas as linhas de sua tabela, o que significa que elas têm o valor **V** em toda e qualquer valoração. Por exemplo, considere a tabela de verdade para a fórmula $A \rightarrow (A \vee C)$:

A	C	$A \vee C$	$A \rightarrow (A \vee C)$
V	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**

Como você vê, em cada uma das possíveis atribuições de valores de verdade às fórmulas atômicas A e C, a fórmula $A \rightarrow (A \vee C)$ resulta verdadeira. Uma vez que sua verdade é independente dos valores de verdade de seus componentes mais elementares (as fórmulas atômicas), poderíamos dizer que uma tal fórmula é verdadeira apenas em função do significado dos operadores que nela ocorrem. A fórmulas com essa característica damos o nome de *tautologia*.

Um outro tipo de fórmula é o daquelas cujo valor de verdade é sempre falso, como $A \wedge \neg A$ no exemplo seguinte:

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**

A fórmulas com essa característica damos o nome de *contradição*. Note que a negação de uma tautologia é, obviamente, uma contradição; e a negação de uma contradição, uma tautologia. Se uma fórmula tem sempre o valor **V**, sua negação sempre terá o valor **F**, e vice-versa. Um outro nome para estas fórmulas é *logicamente falsas*, ou *inconsistentes*. (Há autores que preferem reservar o nome 'contradição' a fórmulas da forma $\alpha \wedge \neg\alpha$, ou seja, a conjunção de uma fórmula com sua negação.)

Naturalmente, como você já percebeu no exercício anterior, nem todas as fórmulas são tautologias ou contradições. Um terceiro tipo de fórmula é o daquelas cuja tabela de verdade tem **V** em pelo menos uma linha, e **F**, igualmente, em ao menos uma linha. A esse tipo de fórmula denominamos *contingência*. Contingências são fórmulas cuja verdade ou falsidade não pode ser determinada apenas por meio de uma análise lógica: é necessário recorrer à observação para isso. Ou seja, elas fazem uma descrição do mundo. Por isso costuma-se dizer que o conteúdo informacional de tautologias e contradições é vazio — sendo verdadeiras ou falsas independentemente da realidade, elas não dizem nada sobre o mundo real, ao contrário das contingências.

Podemos resumir as considerações anteriores na seguinte definição:

Definição 9.3 *Uma fórmula α é uma tautologia se, para toda valoração v, $v(\alpha) =$* **V**. *Dizemos que α é uma contradição se, para toda valoração v, $v(\alpha) =$* **F**. *E α é uma contingência se não for uma coisa nem outra, ou seja, se existe pelo menos uma valoração v_1 tal que $v_1(\alpha) =$* **V**, *e ao menos uma valoração v_2 tal que $v_2(\alpha) =$* **F**.

Por serem sempre verdadeiras — logicamente verdadeiras — as tautologias são aquelas fórmulas a que se costuma dar o nome de *leis lógicas*. Nesse sentido, se caracterizarmos um sistema de lógica como um conjunto de "leis", o conjunto das tautologias caracteriza uma determinada lógica: o cálculo proposicional clássico, **CPC**.

Abaixo, você tem uma lista contendo algumas das tautologias mais conhecidas (note que estamos apresentando *esquemas* de fórmulas):

Princípio de identidade	$\alpha \to \alpha$
Princípio de não-contradição	$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
Princípio do terceiro excluído	$\alpha \vee \neg\alpha$
Dupla negação	$\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$
Idempotência da disjunção	$(\alpha \vee \alpha) \leftrightarrow \alpha$
Idempotência da conjunção	$(\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow \alpha$
Comutatividade da disjunção	$(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\beta \vee \alpha)$
Comutatividade da conjunção	$(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$
Comutatividade da equivalência	$(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \alpha)$
Associatividade da disjunção	$(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$
Associatividade da conjunção	$(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$
Associatividade da equivalência	$(\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma)$
Leis de De Morgan	$\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
	$\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
Contraposição	$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \to \neg\alpha)$
Distributividade	$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$
	$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$
Modus ponens	$(\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to \beta$
Modus tollens	$(\neg\beta \wedge (\alpha \to \beta)) \to \neg\alpha$
Silogismo disjuntivo	$((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \to \beta$
Silogismo hipotético	$((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$
Lei de Peirce	$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$
Lei de Duns Scot	$\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
Prefixação	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$
Antilogismo	$((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \neg\gamma) \to \neg\beta)$
Exportação/Importação	$((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \leftrightarrow (\alpha \to (\beta \to \gamma))$

As três primeiras fórmulas dessa lista exprimem (em uma linguagem proposicional) três dos princípios fundamentais da lógica, que já haviam sido reconhecidos por Aristóteles. Quanto às outras tautologias notáveis, a lei de Dupla Negação confirma o fato de que uma proposição como 'Não é o caso que não chove' é realmente equivalente a 'Chove'. As leis comutativas e associativas mostram que, no caso de disjunções, conjunções e equivalências, a ordem dos elementos não importa, e que, numa seqüência de fórmulas ligadas por um desses operadores, não importa de que modo colocamos os parênteses para agrupá-las. Que a implicação, contudo, não é associativa você pode ver no item (h) do exercício 9.3 mais abaixo. A implicação também não é comutativa, claro. As leis de De Morgan são assim chamadas em razão do lógico inglês Augustus De Morgan (1806–1871), que primeiro as formulou. Observações similares valem para as leis de Peirce e Duns Scot. A propósito, a lei de Duns Scot e a prefixação são dois dos chamados "paradoxos" da implicação material e mostram que a formalização, no **CPC** (e, portanto, no **CQC**), da noção de implicação não corresponde realmente a nossas idéias intuitivas sobre o que uma implicação deveria ser.

Existem, naturalmente, muitas outras tautologias além das poucas mencionadas nessa lista. De fato, há um número infinito delas, e por isso é importante que se disponha de um teste efetivo, como o das tabelas de verdade, para determinar se uma fórmula é uma tautologia — ou, como definiremos logo a seguir, se uma fórmula é ou não conseqüência lógica de outras.

Exercício 9.3 Determine se as fórmulas seguintes são tautologias, contradições ou contingências:

(a) $\neg\neg A \leftrightarrow (A \vee A)$
(b) $B \vee \neg(B \wedge C)$
(c) $(A \to B) \wedge \neg(\neg A \vee B)$
(d) $((A \to B) \wedge \neg B) \to \neg A$
(e) $\neg(F \vee B) \leftrightarrow (\neg F \vee \neg B)$
(f) $\neg(B \to B) \vee (A \wedge \neg A)$
(g) $\neg(\neg D \to G) \to (\neg G \vee \neg D)$
(h) $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \to B) \to C)$

9.6 Implicação e equivalência tautológicas

Agora que dispomos das valorações — que são interpretações simples, no nível proposicional —, já temos os elementos necessários para dar uma definição precisa de conseqüência lógica, ou seja, definir quando é que alguma fórmula α é conseqüência lógica de algum conjunto de fórmulas Γ. Vamos começar com um caso mais simples, tomando apenas duas fórmulas, α e β: quando é que, digamos, β é conseqüência lógica de α? Isso é definido da seguinte maneira:

Definição 9.4 *Uma fórmula α implica tautologicamente uma fórmula β (ou β é uma conseqüência tautológica de α) se, para toda valoração v tal que $v(\alpha) = \mathbf{V}$, temos que $v(\beta) = \mathbf{V}$.*

Vamos explicar isso. Em primeiro lugar, estamos definindo conseqüência (ou implicação) *tautológica*: esse é um caso particular de conseqüência lógica, a saber, conseqüência lógica no nível de interpretações proposicionais, ou seja, para o **CPC**. Como veremos posteriormente, a noção de conseqüência lógica para o **CQC** é mais ampla do que a noção de conseqüência tautológica. Em segundo lugar, note como a definição é parecida com nossa idéia informal de conseqüência lógica: β é conseqüência de α se, sempre que α for verdadeira, β também for verdadeira. (Ou, dito de modo mais preciso, se em toda valoração v tal que $v(\alpha) = \mathbf{V}$, temos $v(\beta) = \mathbf{V}$).

Para dizer que α implica tautologicamente β, vamos usar o símbolo '$\vDash$' e escrever

$$\alpha \vDash \beta.$$

Essa noção de implicação ou conseqüência pode ser naturalmente estendida a conjuntos de fórmulas, que é o que realmente nos interessa. Primeiro, precisamos dizer quando uma valoração é *modelo* de um conjunto de fórmulas.

Definição 9.5 *Uma valoração v é modelo de um conjunto de fórmulas Γ se, para toda $\gamma \in \Gamma$, $v(\gamma) = \mathbf{V}$.*

Ou seja, uma valoração v é modelo de Γ se todas as fórmulas desse conjunto têm o valor $\mathbf{V}$ em v. Escrevemos '$v \vDash \Gamma$' para indicar que v é modelo de Γ. Obviamente, se existir alguma $\gamma \in \Gamma$ tal que $v(\gamma) = \mathbf{F}$, então v *não é* modelo de Γ, o que escrevemos assim: $v \nvDash \Gamma$.

Para exemplificar, considere o conjunto Γ e as duas valorações v_1 e v_2 a seguir:

$$\Gamma = \{A \to B, \neg A, \neg B\},$$
$$v_1(A) = \mathbf{F}, \quad v_1(B) = \mathbf{F},$$
$$v_2(A) = \mathbf{F}, \quad v_2(B) = \mathbf{V}.$$

É fácil ver que $v_1 \vDash \Gamma$: como A e B têm $\mathbf{F}$ em v_1, $\neg A$ e $\neg B$ ganham $\mathbf{V}$. Analogamente, $A \to B$ também ganha $\mathbf{V}$. Assim, todas as fórmulas de Γ são verdadeiras em v_1. Pela definição, v_1 é modelo de Γ, $v_1 \vDash \Gamma$. Por outro lado, como $v_2(B) = \mathbf{V}$, $\neg B$ tem $\mathbf{F}$ em v_2. Como há ao menos uma fórmula de Γ que é falsa em v_2, v_2 não é modelo de Γ, $v_2 \nvDash \Gamma$.

Definição 9.6 *Seja Γ um conjunto de fórmulas, e α uma fórmula. Dizemos que α é uma conseqüência tautológica de Γ (ou que Γ implica tautologicamente α) se, para toda valoração v tal que $v \vDash \Gamma$, $v(\alpha) = \mathbf{V}$.*

Escrevemos '$\Gamma \vDash \alpha$' para indicar que α é uma conseqüência tautológica do conjunto Γ. O que a definição acima está dizendo, claro, é que α é conseqüência tautológica de Γ se α tiver o valor $\mathbf{V}$ em toda valoração que for modelo de Γ, ou seja, em toda valoração que dá $\mathbf{V}$ a todas as fórmulas de Γ. Isso corresponde à idéia informal de "sempre que as fórmulas em Γ são verdadeiras, α é verdadeira". Dito ainda de outra forma, $\Gamma \vDash \alpha$ se não existe nenhuma valoração v tal que $v \vDash \Gamma$ e $v(\alpha) = \mathbf{F}$.

Um conceito relacionado ao de implicação tautológica é o de *equivalência tautológica* entre duas fórmulas, que definimos como se segue:

Definição 9.7 *Uma fórmula α é tautologicamente equivalente a uma fórmula β se, qualquer que seja a valoração v, $v(\alpha) = v(\beta)$.*

Uma vez que definimos conseqüência tautológica, podemos aplicar isso, por exemplo, no teste de validade de um argumento. Suponhamos que tivéssemos um argumento formalizado da seguinte maneira:

P1 $(A \vee B) \to C$
P2 $\neg B$
► $A \to C$

e quiséssemos testar sua validade. É claro que o argumento, assim formalizado, será válido se sua conclusão, $A \to C$, for conseqüência tautológica de suas premissas. O que significa dizer que $A \to C$ deve ser verdadeira em toda valoração que for modelo das premissas.

É claro que não precisaremos examinar *todas* as valorações para isso. Como você viu anteriormente, tendo um número finito n de fórmulas atômicas, teremos 2^n valorações diferentes com respeito a elas — o que corresponde a 2^n linhas em uma tabela de verdade.

O que precisamos fazer, então, é construir uma tabela de verdade na qual apareçam todas as fórmulas envolvidas: as premissas e a conclusão do argumento formalizado. Com respeito àquele argumento apresentado acima, temos então:

				P1	P2	▶
A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \to C$	$\neg B$	$A \to C$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	$\boxed{\textbf{V}}$	$\boxed{\textbf{V}}$	**V**
F	**F**	**V**	**F**	$\boxed{\textbf{V}}$	$\boxed{\textbf{V}}$	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	$\boxed{\textbf{V}}$	$\boxed{\textbf{V}}$	**V**

Construída a tabela acima, que lista todas as valorações possíveis para as fórmulas atômicas A, B, e C, e calculado o valor das premissas e da conclusão em cada linha, só precisamos verificar se toda valoração que é modelo do conjunto de premissas atribui **V** também à conclusão. As linhas em que todas as premissas recebem **V** são as linhas 3, 4 e 8 (o que está indicado, na tabela, por meio dos quadradinhos). E, como você vê, em todas essas linhas a conclusão $A \to C$ também recebe o valor **V**. Dito de outra forma, não existe nenhuma linha na qual $(A \vee B) \to C$ e $\neg B$ sejam verdadeiras, e $A \to C$ seja falsa. Assim, $A \to C$ é uma conseqüência tautológica de P_1 e P_2.

Vamos ver, agora, um contra-exemplo. Digamos que temos um argumento que foi formalizado assim:

P_1 $B \to A$
P_2 $\neg B$
▶ $\neg A$

Para testar sua validade, construímos uma tabela na qual apareçam as premissas e conclusão. Como temos apenas duas fórmulas atômicas, B e A, esta tabela terá quatro linhas:

		P1	P2	▶
A	B	$B \to A$	$\neg B$	$\neg A$
V	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	$\boxed{\textbf{V}}$	$\boxed{\textbf{V}}$	**F***
F	**F**	$\boxed{\textbf{V}}$	$\boxed{\textbf{V}}$	**V**

Note que existem duas linhas que são modelo das premissas: 3 e 4. E, embora na linha 4 a conclusão tenha o valor **V**, na linha 3 (marcada com um asterisco) ela tem **F**. Ou seja, existe uma linha (uma valoração) na qual as premissas são verdadeiras, e a conclusão é falsa. Em conseqüência, $\neg A$ *não é* conseqüência lógica de $B \to A$ e $\neg B$.

De modo similar ao que foi feito acima, se quisermos mostrar que duas fórmulas α e β são tautologicamente equivalentes, podemos construir uma tabela de verdade em que as duas apareçam, e verificar se elas têm o mesmo valor em todas as linhas. Se tiverem, são tautologicamente equivalentes; caso contrário, não.

Exercício 9.4 Usando tabelas de verdade, verifique se as conclusões indicadas abaixo de fato são conseqüência tautológica das premissas, ou não:

(a) $A \vee B, \neg A \models B$
(b) $A \leftrightarrow B, \neg A \models \neg B$
(c) $\neg(A \wedge B) \models \neg B \wedge \neg A$
(d) $A \to B \models A \vee B$
(e) $\neg A \to \neg B \models A \to B$
(f) $A, A \to C \models A \leftrightarrow C$
(g) $B \to \neg C \models \neg(B \wedge C)$
(h) $\neg(A \vee B), F \leftrightarrow A \models \neg F$
(i) $\neg(A \wedge B), D \leftrightarrow A \models \neg D$
(j) $A \models (A \to (B \wedge A)) \to (A \wedge B)$
(k) $(B \wedge C) \to F, \neg B, \neg C \models \neg F$
(l) $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \models A \leftrightarrow C$
(m) $A \to (B \vee C), (B \wedge C) \to D \models A \to D$
(n) $(\neg A \vee B) \vee C, (B \vee C) \to D \models A \to D$
(o) $(A \to B) \to A \models A$

Exercício 9.5 Usando tabelas de verdade, verifique se os pares de fórmulas abaixo são tautologicamente equivalentes ou não:

(a) $A \to B$ e $\neg A \vee B$
(b) $A \wedge B$ e $\neg(\neg A \vee \neg B)$
(c) $A \to B$ e $B \to A$
(d) $A \leftrightarrow B$ e $(A \to B) \wedge (B \to A)$
(e) $A \to (B \to C)$ e $(A \to B) \to C$
(f) $\neg\neg A$ e A

9.7 Outros comentários sobre as valorações

Podemos resumir o que fizemos neste capítulo da seguinte maneira: escolhemos uma sublinguagem da linguagem do **CQC** (uma linguagem proposicional, contendo apenas operadores, parênteses e símbolos de predicado zero-ários) e definimos o que são interpretações para ela (valorações). Ainda que simples, as valorações já nos possibilitaram definir validade e conseqüência lógica, o que nos permite testar a validade de muitos argumentos, ainda que isso não seja suficiente para o **CQC** todo.

O que é importante mencionar ainda é que não precisaríamos ter restringido as valorações apenas a linguagens com letras sentenciais. Elas podem ser definidas para toda a linguagem do **CQC**. Para ver como é isso, considere mais uma vez um argumento (formalizado) que foi apresentado anteriormente, a saber:

P$_1$ $\forall x(Gx \to Px) \to Pm$
P$_2$ $\forall x(Gx \to Px)$
▶ Pm

Tendo o argumento já sido transcrito dessa maneira para a linguagem do **CQC**, é simples alterar a definição de valoração para mostrar sua validade, sem ter que reformalizá-lo assim:

P$_1$ $A \to B$
P$_2$ A
▶ B

Lembre-se de que a idéia básica de uma valoração é permitir-nos calcular o valor de uma fórmula molecular a partir do valor de seus componentes. Ora, podemos considerar que uma fórmula molecular é composta a partir de, basicamente, fórmulas atômicas ou fórmulas gerais (nestas, claro, pode haver fórmulas moleculares que sejam subfórmulas, mas isso não importa).

Vamos definir uma *fórmula elementar* como qualquer fórmula que seja ou atômica ou geral. Por exemplo, tanto Pab quanto $\forall z \neg Qz$ e $\forall x \exists y(\neg Fx \to Gy)$ são fórmulas elementares (a primeira é atômica; as outras, gerais). Por outro lado, fórmulas como $\neg Pab$ e $\forall x \exists y Lxy \to \forall z Qz$ não são elementares, pois são moleculares.

Podemos definir, agora, uma valoração como uma função não apenas do conjunto das letras sentenciais no conjunto dos valores de verdade, mas do conjunto de todas as fórmulas elementares no conjunto $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$. Ou, de outro modo, como fizemos na definição 9.2, mas generalizando para qualquer linguagem de primeira ordem:

Definição 9.8 *Uma valoração v é uma função do conjunto de todas as fórmulas de uma linguagem de primeira ordem no conjunto de valores de verdade $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$, tal que:*

(a) $v(\neg\alpha) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = \mathbf{F}$;
(b) $v(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = v(\beta) = \mathbf{V}$;
(c) $v(\alpha \vee \beta) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = \mathbf{V}$ *ou* $v(\beta) = \mathbf{V}$;
(d) $v(\alpha \to \beta) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = \mathbf{F}$ *ou* $v(\beta) = \mathbf{V}$;
(e) $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = \mathbf{V}$ *sse* $v(\alpha) = v(\beta)$.

(Essa passa a ser, de agora em diante, nossa definição final de valoração.)

Feita essa definição, note que tudo vai continuar como antes, exceto que as tautologias, por exemplo, também podem agora ser fórmulas numa linguagem qualquer de primeira ordem — desde que verdadeiras em toda valoração. Para entender isso, observe o seguinte: na relação de tautologias que vimos anteriormente, encontramos, por exemplo, o esquema de fórmula $\neg\neg\alpha \to \alpha$. Isso significa que qualquer fórmula da forma $\neg\neg\alpha \to \alpha$ é uma tautologia. Ora, isso deveria — e agora pode — incluir uma fórmula como

$$\neg\neg Pa \to Pa,$$

ou ainda

$$\neg\neg\forall x Px \to \forall x Px,$$

ou mesmo ainda

$$\neg\neg(Pa \vee \exists y \exists z Fzy) \to (Pa \vee \exists y \exists z Fzy).$$

Todas as fórmulas acima são instâncias, ou seja, casos particulares, de $\neg\neg\alpha \to \alpha$. E todas as três fórmulas são verdadeiras em qualquer valoração. Não importa que significado vamos dar depois a P

e F; $\neg\neg(Pa \vee \exists y \exists z Fzy) \to (Pa \vee \exists y \exists z Fzy)$ vai continuar sendo sempre verdadeira.

Assim, tendo definido as valorações dessa nova maneira, tendo como caso-base qualquer fórmula atômica, ou qualquer fórmula geral (pois não temos condições de obter ainda o valor de verdade de fórmulas gerais a partir de outras coisas), podemos aplicar as valorações a toda a linguagem do **CQC**, e determinar a validade de muitas outras formas de argumento que envolvam mais do que apenas símbolos de predicados zero-ários. Claro que haverá argumentos válidos que as valorações demonstrarão inválidos, mas isso é porque elas ainda são demasiado simples.

Finalmente, pode-se mostrar, da seguinte maneira, que o argumento apresentado anteriormente nesta seção é válido: ele contêm duas fórmulas elementares, a saber, as fórmulas $\forall x(Gx \to Px)$ e Pm. Uma tabela de verdade, portanto, teria quatro linhas. E o resto continua como antes. Assim:

P_2 $\forall x(Gx \to Px)$	▶ Pm	P_1 $\forall x(Gx \to Px) \to Pm$
$\boxed{V}$	V	$\boxed{V}$
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Como você pode ver, o argumento é (proposicionalmente) válido. Na única linha (que é a linha 1) em que as premissas são verdadeiras, a conclusão também o é. Assim, a conclusão é conseqüência tautológica das premissas, e o argumento é válido.

Exercício 9.6 Usando a nova definição de valoração, determine se as fórmulas à direita de $\vDash$ são ou não conseqüência lógica das demais:

(a) $Pa \vee Qb, \neg Pa \vDash Qb$
(b) $(Pa \wedge Fc) \to \exists xHx, \neg Pa, \neg\exists xHx \vDash \neg Fc$
(c) $\neg(Rbc \wedge Gm), D \leftrightarrow Rbc \vDash \neg Gm$
(d) $\forall xAx \leftrightarrow \forall xBx, \forall xBx \leftrightarrow \exists xHx \vDash \forall xAx \to \exists xHx$
(e) $(\neg A \vee Qb) \vee \forall x\exists yRxy, (Qb \vee \forall x\exists yRxy) \to Lab \vDash A \to Lab$

CAPÍTULO 10

ESTRUTURAS E VERDADE

Neste capítulo, você vai ver, enfim, como interpretar linguagens de primeira ordem. Vamos iniciar examinando de maneira informal as noções de estrutura, e de verdade em uma estrutura, deixando para apresentar as definições completas num segundo momento.

10.1 O valor semântico das expressões

Vamos começar com o argumento apresentado como exemplo no início do capítulo 8, e com sua tradução para uma linguagem de primeira ordem:

P_1	Todo planeta joviano tem anéis.	P_1	$\forall x(Jx \to Ax)$
P_2	Netuno é um planeta joviano.	P_2	Jn
▶	Netuno tem anéis.	▶	An

Conforme mencionei anteriormente, ao especificar uma linguagem de primeira ordem já temos em vista um certo domínio de aplicação, e os símbolos (não-lógicos) vão sendo escolhidos já com um certo significado informal a eles associado. Vimos também que essa interpretação informal não é suficiente para nossos propósitos de analisar a validade (ou invalidade) de um argumento. Assim, no capítulo anterior, nos ocupamos de um tipo simples de interpretação formal:

CAPÍTULO 12

TABLÔS SEMÂNTICOS

Neste capítulo, vamos nos ocupar de um método que nos permite mostrar a validade ou invalidade de uma fórmula do **CQC**, ou determinar se alguma fórmula é conseqüência lógica, ou não, de algum conjunto de fórmulas: o método dos *tablôs semânticos* (ou, como também é conhecido, das *árvores de refutação*).

12.1 Procedimentos de prova

No final do capítulo anterior, nos vimos diante do problema de como determinar se alguma fórmula α é válida, ou se é ou não conseqüência lógica de um conjunto Γ qualquer de fórmulas. Este parece ser um problema difícil, pois não temos como examinar *todas* as estruturas possíveis para uma certa linguagem de modo a verificar se α é verdadeira em qualquer estrutura, ou se é verdadeira naquelas que são modelo de Γ. Gostaríamos, portanto, de encontrar algum tipo de procedimento que nos permitisse ter uma resposta (positiva ou negativa) para as questões acima, dentro de um tempo razoável: um *procedimento* (ou *sistema*) *de prova*.

Idealmente, um tal procedimento deveria ser mecânico e determinístico: um conjunto de instruções formulado de maneira tão precisa que possa ser executado por um computador; um procedimento que

não exija nenhuma criatividade ou engenhosidade para a sua execução. E, claro, um procedimento que *sempre* dê uma resposta (sim ou não) à pergunta feita. Para usar um termo técnico, gostaríamos de ter um *algoritmo* para decidir sobre a validade de uma fórmula do **CQC**, ou se uma fórmula é implicada logicamente por um conjunto de fórmulas.

Um *algoritmo* pode ser definido como um *procedimento computacional efetivo*, isto é, um *procedimento*, executável por um *computador*, que sempre termina após um número finito de passos (*efetivo*). Você conhece vários tipos de algoritmo. Para dar um exemplo simples, suponhamos que você queira calcular $n!$, o fatorial de n, para algum número natural positivo n. O algoritmo é simples, bastando multiplicar $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Sendo n um número natural positivo qualquer, é óbvio que o procedimento de cálculo sempre vai terminar, ainda que isso possa demorar bastante, se n for muito grande. (A propósito, a diferença entre algoritmos e procedimentos em geral é que um procedimento pode não chegar ao fim de sua execução em alguns casos.)

Mas não basta ter um algoritmo para decidir se uma fórmula é válida ou não: gostaríamos, além disso, de que esse algoritmo fosse *eficiente*, isto é, que nos desse uma resposta o mais rápido possível. Bem, para sermos sinceros, que nos desse uma resposta num tempo razoável, já que "o mais rápido possível" pode, às vezes, demorar demais. Por exemplo, um algoritmo que, ao ser executado, leva dez anos para dar uma resposta não é lá muito interessante do ponto de vista prático — ainda que a resposta venha no tempo mais rápido possível para o algoritmo!

No capítulo 9, ao falar de valorações, vimos que o método de tabelas de verdade é um tal procedimento efetivo que pode ser aplicado à lógica proposicional para decidir se algo é ou não uma tautologia. Note, primeiro, que as instruções para construir uma tabela de verdade podem ser executadas por uma máquina: descobrir quais são as fórmulas elementares de uma fórmula α qualquer, listar as subfórmulas de α, calcular o número de linhas da tabela e gerar as combinações de valores, calcular o valor de uma fórmula numa coluna, decidir se a fórmula é uma tautologia ou não verificando se ela tem **V** em todas as colunas... Todas estas instruções são mecânicas. Depois, note que a construção de uma tabela de verdade sempre termina após um número finito de passos. Como qualquer fórmula tem um comprimento finito, há apenas um número finito de fórmulas elementares envolvidas, um número finito de linhas e um número finito de colunas a calcular. Mais cedo ou mais tarde, uma tabela de verdade sempre fica pronta. E, estando pronta, temos sempre uma resposta, positiva ou negativa, sobre se certa fórmula é tautologia ou não, se é conseqüência tautológica de outras ou não.

Em virtude do que foi dito acima, as tabelas de verdade constituem um *procedimento de decisão* para o conjunto das tautologias, ou para a relação de conseqüência tautológica, ou seja, um procedimento de decisão para o **CPC**. Assim, o conjunto das tautologias é dito *decidível* pelo método de tabelas de verdade. (No geral, dizemos que uma classe de perguntas é decidível se há um algoritmo para obter uma resposta a qualquer pergunta da classe.)

Contudo, tabelas de verdade se aplicam apenas à lógica proposicional, não conseguindo lidar, claro, com quantificadores. Além disso, elas são bastante ineficientes: pode acontecer que você faça uma tabela com, digamos, 32 linhas, para descobrir que, exatamente na última delas, a fórmula α que você está investigando recebe o valor **F**, e não é uma tautologia! O ideal, se existe alguma linha onde α é falsa, é que pudéssemos achá-la diretamente, e não ficar perdendo tempo com as outras 31. De mais a mais, o número de linhas de uma tabela de verdade aumenta exponencialmente em função do número de fórmulas elementares envolvidas, ou seja, se temos n fórmulas elementares, o número de linhas será 2^n. Suponha, então, que temos um computador capaz de construir uma linha de uma tabela em um microssegundo: se a tabela tiver cinqüenta fórmulas elementares, mesmo assim o computador precisará de 35,7 *anos* para construí-la! E uma tabela envolvendo cem fórmulas elementares, por exemplo, teria 2^{100} linhas. Nesse caso, seriam necessários quatrocentos trilhões de séculos para terminar a tabela. (Lembre-se de que o universo começou há meros 15 bilhões de anos.)

Resumindo, o que precisamos é de algum outro método, que seja, por um lado, mais eficiente que tabelas de verdade e, por outro, que possa lidar também com fórmulas gerais. Além disso, há duas outras características desejáveis de qualquer procedimento ou sistema de prova:

(i) ele deve ser *correto*, isto é, provar *apenas* as fórmulas válidas;

(ii) ele dever ser *completo*, isto é, provar *todas* as fórmulas válidas.

A primeira característica, a da correção (também chamada *legitimidade*), justifica-se por que queremos ter certeza de que uma fórmula é mesmo válida quando o procedimento de prova diz que é (ou seja, ele não prova nenhuma fórmula que não seja válida). Quanto à segunda, queremos também ter certeza de que uma fórmula não é válida, quando o procedimento não diz que é.

O método de *tablôs semânticos* é um passo nessa direção, embora tenha também suas limitações (com relação à eficiência, sobre o que vamos falar mais tarde). A história dos tablôs começa em 1935, com a introdução, por Gerhard Gentzen, dos sistemas de prova conhecidos hoje em dia como *cálculos de seqüentes*. A característica desses sistemas de prova é que eles obedecem à chamada propriedade das subfórmulas: ou seja, na prova de que alguma fórmula α é válida, precisamos apenas considerar as subfórmulas de α. (Que isso é uma propriedade maravilhosa vai ficar claro quando estudarmos outros métodos em capítulos posteriores!) O trabalho original de Gentzen foi depois desenvolvido por E. Beth, e mais tarde por Raymond Smullyan, resultando nos tablôs que você vai aprender agora.

A característica principal desse procedimento de prova por tablô é que ele é um *método de refutação*: para mostrar que alguma fórmula α é válida, começamos supondo que ela não o é, e derivamos as conseqüências dessa suposição. Se isso nos levar a algum absurdo (como alguma fórmula ter que ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo), então a suposição inicial estava errada. Caso contrário, os tablôs nos dão imediatamente um *contra-exemplo* à fórmula α em questão, isto é, a receita para construir uma estrutura onde α é falsa. (Bem, isso vale realmente no caso da lógica proposicional. Para o **CQC** em geral, às vezes a situação se complica, como veremos depois.)

A idéia que está por trás dos procedimentos de refutação é o seguinte teorema, que podemos demonstrar a respeito do **CQC**:

Teorema 12.1 *Seja* Γ *um conjunto de fórmulas qualquer.* $\Gamma \vDash \alpha$ *sse* $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ *é insatisfatível.*

Prova. Suponhamos, primeiro, que $\Gamma \vDash \alpha$. Isso significa que α é verdadeira em qualquer estrutura em que todas as fórmulas de Γ sejam verdadeiras. Agora, se $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ fosse satisfatível, deveria haver uma estrutura $\mathfrak{A}$ tal que todas as fórmulas de Γ, bem como $\neg\alpha$, sejam verdadeiras em $\mathfrak{A}$. Mas isto não pode ser, pois, se $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$, $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathbf{V}$, e portanto, $\neg\alpha$ tem que ser falsa em $\mathfrak{A}$. Logo, não existe uma tal estrutura que seja modelo de $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$. De onde se segue que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ é insatisfatível.

Suponhamos agora que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ é insatisfatível. Se $\Gamma \nvDash \alpha$, deve haver uma estrutura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$, e $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathbf{F}$. Ora, obviamente $\neg\alpha$ é verdadeira nesta estrutura. Logo, $\mathfrak{A} \vDash \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$, e, portanto, $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ é satisfatível, o que é absurdo, pois contraria nossa hipótese. Logo, $\Gamma \vDash \alpha$.

Um caso particular do teorema acima, obviamente, é quando $\Gamma = \varnothing$, e então temos:

$$\vDash \alpha \quad \text{sse} \quad \{\neg\alpha\} \text{ é insatisfatível.}$$

Assim, para mostrar que uma fórmula é válida, basta mostrar que sua negação é sempre falsa. É essa a idéia que norteia um procedimento de prova como os tablôs.

12.2 Exemplos de tablôs

Suponhamos que quiséssemos mostrar que $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$ é uma fórmula válida (você pode verificar que é, pois é uma tautologia, construindo uma tabela de verdade para ela). A primeira coisa a fazer — o passo inicial na construção de um tablô para essa fórmula — é supor que ela *não é válida*. Por definição, se $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$ não é válida, deve existir alguma estrutura onde ela é falsa. Indicamos isto escrevendo essa fórmula numa linha, precedida do símbolo F:

$$\mathsf{F}\,(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$$

Para continuar, note que essa fórmula é uma implicação, e só há um caso em que uma implicação $\alpha \rightarrow \beta$ é falsa: quando seu antecedente α é verdadeiro, e seu conseqüente β é falso. Assim, podemos escrever, abaixo de $\mathsf{F}(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$, as expressões $\mathsf{V}\,A \wedge B$ e $\mathsf{F}\,A \vee B$, e ficamos com o seguinte:

$$\begin{array}{c} \checkmark\,\mathsf{F}\,(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B) \\ \mathsf{V}\,A \wedge B \\ \mathsf{F}\,A \vee B \end{array}$$

Note que, além de acrescentar as expressões $\mathsf{V}\,A \wedge B$ e $\mathsf{F}\,A \vee B$ ao tablô, colocamos a marca '$\checkmark$' ao lado de $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$: isso significa que essa fórmula foi usada (para concluir as duas linhas que seguem) e que, portanto, não precisamos mais nos ocupar dela. (Dizemos também que a fórmula foi *processada*, ou *reduzida*.) Nosso tablô, então, tem agora três fórmulas: uma já utilizada e duas novas fórmulas ainda por usar. Vamos, então, reduzir $\mathsf{V}\,A \wedge B$. Há igualmente apenas um caso em que uma conjunção $\alpha \wedge \beta$ é verdadeira: quando ambas, α e β, são verdadeiras. Indicamos isso como segue, marcando $\mathsf{V}\,A \wedge B$ com '$\checkmark$' para indicar que já foi usada, como mostra a figura 12.1a.

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \checkmark\,\mathsf{F}\,(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B) \\ \checkmark\,\mathsf{V}\,A \wedge B \\ \mathsf{F}\,A \vee B \\ \mathsf{V}\,A \\ \mathsf{V}\,B \\ \\ \\ \\ (a) \end{array} & \begin{array}{c} \checkmark\,\mathsf{F}\,(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B) \\ \checkmark\,\mathsf{V}\,A \wedge B \\ \checkmark\,\mathsf{F}\,A \vee B \\ \mathsf{V}\,A \\ \mathsf{V}\,B \\ \mathsf{F}\,A \\ \mathsf{F}\,B \\ (b) \qquad \times \end{array} \end{array}$$

FIGURA 12.1 — Tablô para $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$.

Temos agora cinco fórmulas no tablô: duas que foram usadas (as duas primeiras, e não vamos usá-las mais) e duas que são atômicas: A e B. Com estas nada podemos fazer, pois elas não têm subfórmulas próprias. Resta a fórmula $\mathsf{F}\,A \vee B$, que é uma disjunção falsa. Mais uma vez, só há um caso em que uma disjunção $\alpha \vee \beta$ é falsa: quando tanto α quanto β são falsas. Vamos acrescentar isso ao nosso tablô, e marcar $\mathsf{F}\,A \vee B$ como usada; o resultado está na figura 12.1b.

Chegamos agora a um ponto em que não há mais fórmulas moleculares a reduzir, pois todas elas foram utilizadas. Porém, se você observar bem, vai verificar que há uma inconsistência, ou contradição, nesse tablô: por exemplo, ele contém VA e FA. Ou seja, A está sendo considerada *verdadeira e falsa*. Mas isso, obviamente, é um absurdo; não há nenhuma estrutura onde uma fórmula α seja verdadeira e falsa. Assim, nossa suposição inicial de que $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$ não era válida, ou seja, podia ser falsa numa estrutura, leva-nos a uma inconsistência. Isso foi representado, na figura acima, colocando-se '×' ao final do tablô — o que significa que não podemos seguir por esse caminho. E uma vez que nossa suposição inicial nos conduz a uma contradição, ela estava *errada*: $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$, ao contrário do que havíamos suposto, é, de fato, válida.

Vamos resumir o que aconteceu. Pretendíamos mostrar que uma certa fórmula é válida: começamos supondo que *não era*, e continuamos aplicando às fórmulas disponíveis no tablô algumas regras. Por exemplo, tendo uma conjunção V$\alpha \wedge \beta$, pudemos escrever Vα e Vβ. Como, no decorrer desse processo, chegamos a um absurdo (A tinha que ser verdadeira e falsa, por exemplo), concluímos que nossa hipótese inicial estava errada e que a fórmula original é mesmo válida.

Mas o que acontece se testamos alguma fórmula e não achamos absurdo nenhum? Vamos tomar $(A \wedge B) \rightarrow C$ como exemplo. (Essa fórmula é obviamente inválida.) Um tablô para ela começa supondo que ela seja falsa: F$(A \wedge B) \rightarrow C$. Como essa é uma implicação falsa, seu antecedente é verdadeiro e seu conseqüente é falso. O resultado você vê na figura 12.2a.

(a)	(b)
✓F $(A \wedge B) \rightarrow C$	✓F $(A \wedge B) \rightarrow C$
V $A \wedge B$	✓V $A \wedge B$
F C	F C
	V A
	V B
	?

FIGURA 12.2 — Tablô para $(A \wedge B) \rightarrow C$.

Temos agora uma conjunção verdadeira, $A \wedge B$: concluímos que tanto A quanto B são verdadeiras. O resultado está na figura 12.2b. E agora? Note que não temos nenhum absurdo, isto é, não há nenhuma fórmula α no tablô tal que Vα e Fα apareçam. E, por outro lado,

todas as fórmulas moleculares foram utilizadas: não há mais nada a fazer. Como não chegamos a uma inconsistência, nossa hipótese de que $(A \wedge B) \rightarrow C$ não fosse válida *estava correta*: ela não é válida mesmo. Note que o procedimento acima nos indica como construir uma estrutura em que $(A \wedge B) \rightarrow C$ é falsa. Isto é bem simples. A, B, e C são letras sentenciais, isto é, predicados zero-ários. Seja então $\mathcal{L} = \{A, B, C\}$ uma linguagem de primeira ordem (note que $\mathcal{L}$ contém como símbolos não-lógicos apenas aqueles que ocorrem na fórmula em questão), e seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura em que o universo é o conjunto cujo único elemento é Miau,[1] e tal que a função interpretação I é como segue:

$$I(A) = \mathsf{V}, \qquad I(B) = \mathsf{V}, \qquad I(C) = \mathsf{F}.$$

E é claro que $(A \wedge B) \rightarrow C$ é falsa na estrutura $\mathfrak{A}$. (Se você quiser, pode também verificar que, numa tabela de verdade, numa linha onde A e B são verdadeiras, e C falsa, a fórmula $(A \wedge B) \rightarrow C$ será falsa.) Assim, se uma fórmula não é válida, um tablô nos dá meios de construir uma estrutura (ou uma valoração, no caso proposicional) que mostre isso: um contra-exemplo.

Vamos ver agora mais um exemplo, ainda sem usar quantificadores. Digamos que pretendemos mostrar que $((Pa \rightarrow Pb) \wedge \neg Pb) \rightarrow \neg Pa$ é válida. Como sempre, começamos por supor que essa fórmula pode ser falsa em alguma estrutura: F$((Pa \rightarrow Pb) \wedge \neg Pb) \rightarrow \neg Pa$. Mais uma vez, temos uma implicação falsa. Logo, seu antecedente é verdadeiro e o conseqüente, falso. Como esse antecedente é uma conjunção (verdadeira), o resultado de processá-la nos permite acrescentar seus dois elementos. O resultado de tudo isso você encontra na figura 12.3a.

Os dois próximos passos, agora, são simples: de F$\neg Pa$ podemos concluir VPa; e de V$\neg Pb$ concluímos FPb. (Veja a figura 12.3b.) Note, porém, que até agora não achamos inconsistência alguma. É provavelmente desnecessário dizer, mas Pa e Pb são fórmulas *distintas*; logo, VPa e FPb não caracterizam uma inconsistência, e você ainda

[1] Recorde-se de que o universo de uma estrutura deve ter pelo menos um elemento. No caso, podemos escolher um indivíduo qualquer para garantir isso, como Miau.

(a)	(b)
✓F $((Pa \to Pb) \land \neg Pb) \to \neg Pa$	✓F $((Pa \to Pb) \land \neg Pb) \to \neg Pa$
✓V $(Pa \to Pb) \land \neg Pb$	✓V $(Pa \to Pb) \land \neg Pb$
F $\neg Pa$	✓F $\neg Pa$
V $Pa \to Pb$	V $Pa \to Pb$
V $\neg Pb$	✓V $\neg Pb$
	V Pa
	F Pb

FIGURA 12.3 — Tablô para $((Pa \to Pb) \land \neg Pb) \to \neg Pa$.

não pode fechar este tablô. (Você não estava mesmo pensando que podia, não é?) Contudo, ainda temos uma fórmula não-utilizada: V$Pa \to Pb$. Agora as coisas ficam um pouco mais difíceis, pois não há apenas um único caso em que uma implicação é verdadeira. Porém, se você conferir na definição de verdade 10.2, você verá que há uma cláusula que diz:

$$\mathfrak{A}(\alpha \to \beta) = \mathsf{V} \quad \text{sse} \quad \mathfrak{A}(\alpha) = \mathsf{F} \text{ ou } \mathfrak{A}(\beta) = \mathsf{V}.$$

Ou seja, uma implicação $\alpha \to \beta$ é verdadeira (numa estrutura, numa valoração) se, *ou* α é falsa, *ou* β é verdadeira. Vamos escrever isso no nosso tablô fazendo uma *bifurcação*, ou *ramificação*. Passamos a ter agora duas continuações possíveis para o tablô: dois *ramos*.

✓F $((Pa \to Pb) \land \neg Pb) \to \neg Pa$
✓V $(Pa \to Pb) \land \neg Pb$
✓F $\neg Pa$
✓V $Pa \to Pb$
✓V $\neg Pb$
V Pa
F Pb

F Pa V Pb
×   ×

FIGURA 12.4 — Ramificação em um tablô.

Esses dois ramos, como você pode ver na figura 12.4, têm uma parte em comum: todas as sete fórmulas, desde a primeira linha até FPb, pertencem aos dois. O ramo da esquerda, além disso, tem no final FPa, enquanto o da direita, VPb. A existência de dois ramos significa que há duas alternativas possíveis para tentar mostrar que nossa fórmula inicial é falsa. Porém, esse tablô contém uma inconsistência em cada um dos ramos. Olhando o ramo da esquerda, vemos que primeiro aparece VPa, e logo mais abaixo FPa. Ou seja, esse ramo fecha-se; por ele não é possível continuar, o que indicamos colocando como de hábito '×' ao final. De modo similar, no ramo da direita, temos FPb, e logo abaixo, VPb: também este ramo fecha-se. Como os *dois* ramos fecharam-se, nenhuma das alternativas pode levar a um contra-exemplo para $((Pa \to Pb) \land \neg Pb) \to \neg Pa$. Assim, nossa hipótese inicial de que essa fórmula era inválida era errônea, de onde se segue que ela é mesmo válida.

12.3 Regras para fórmulas moleculares

A partir dos exemplos vistos até agora, você talvez tenha notado que, para cada tipo de fórmula molecular, teremos duas regras: uma para tratar do caso em que ela é precedida de V, e outra para o caso em que é precedida de F. Em alguns casos, isto levou a uma bifurcação no tablô, como V$A \to B$. Em outros, não, como F$A \to B$. Antes de continuar, vamos listar todas as regras (chamadas *regras de construção do tablô*) envolvendo fórmulas moleculares (as gerais ficam para mais tarde).

Essas regras são também chamadas de *regras de expansão* porque o resultado de aplicá-las produz um acréscimo de novas fórmulas ao tablô. Como você vê na figura acima, para cada operador temos duas regras, e nessas regras podemos distinguir dois casos. Primeiro, algumas vezes há apenas uma maneira possível de assinalar valores a subfórmulas — por exemplo, quando temos uma conjunção verdadeira $\alpha \land \beta$: ambos os conjuntivos devem ser verdadeiros, se a conjunção o é. Assim, estendemos o tablô adicionando tanto Vα quando Vβ. Algumas vezes, contudo, temos duas possibilidades: uma implicação verdadeira $\alpha \to \beta$, por exemplo, deve ter ou o antecedente

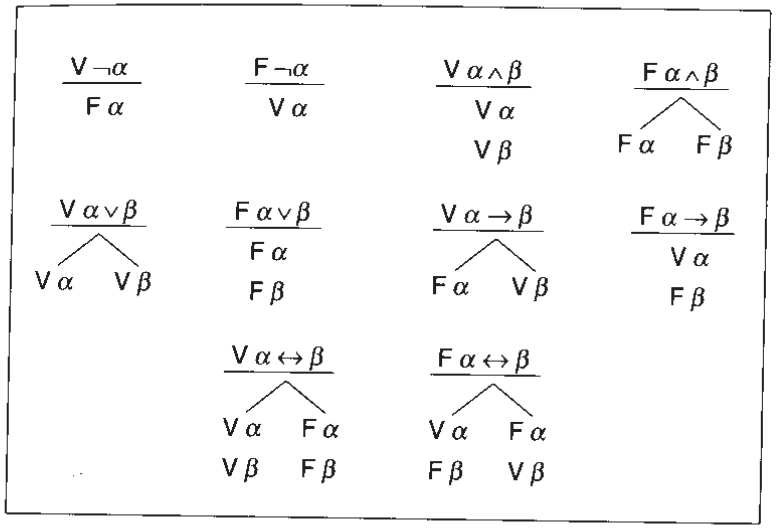

FIGURA 12.5 — Regras de construção dos tablôs.

falso, ou o conseqüente verdadeiro. De forma a considerar ambas as possibilidades, o ramo em que estamos trabalhando deve ser dividido em dois novos ramos, cada um deles representando uma maneira de continuar (uma atribuição possível). Os ramos podem, é claro, dividir-se adicionalmente em sub-ramos, e sub-sub-ramos, e esta é a razão pela qual o tablô, em muitos casos, acaba parecendo uma *árvore invertida*. (Por isso, aliás, tablôs também são chamados de *árvores de refutação*.)

Depois de ter aplicado as regras de construção, descobrimos que, no final, duas coisas podem ocorrer:

(1) Descobrimos que cada ramo leva a uma contradição, isto é, para alguma fórmula α, $\mathsf{V}\alpha$ e $\mathsf{F}\alpha$ pertencem ambas ao ramo. Nesse caso, o ramo é denominado *fechado*. Estando todos os ramos fechados, a suposição de que a fórmula original poderia ser falsa é absurda; logo, a fórmula deve ser válida.

(2) Pelo menos um ramo permanece aberto, isto é, não há mais fórmulas complexas no ramo que ainda não foram processadas, e não apareceu nenhuma contradição. Neste caso, o que fizemos

corresponde, realmente, a criar um modelo que falsifica nossa fórmula — logo, ela não é válida.

Uma vez que uma imagem é melhor que dez mil palavras, vamos examinar um tablô para $(A \vee B) \to (A \wedge B)$. O primeiro passo, claro, é supor que essa fórmula pode ser falsa. Como é uma implicação falsa, aplicamos a regra $\mathsf{F}\,\alpha \to \beta$ e obtemos então o seguinte:

$$\begin{array}{c} \checkmark\, \mathsf{F}\,(A \vee B) \to (A \wedge B) \\ \mathsf{V}\, A \vee B \\ \mathsf{F}\, A \wedge B \end{array}$$

Para prosseguir, agora, temos duas possibilidades: uma disjunção verdadeira, ou uma conjunção falsa. Se você examinar a figura 12.5, verá que, em ambos os casos, teremos que bifurcar o tablô. Digamos que escolhemos a disjunção. O resultado você encontra na figura 12.6a abaixo.

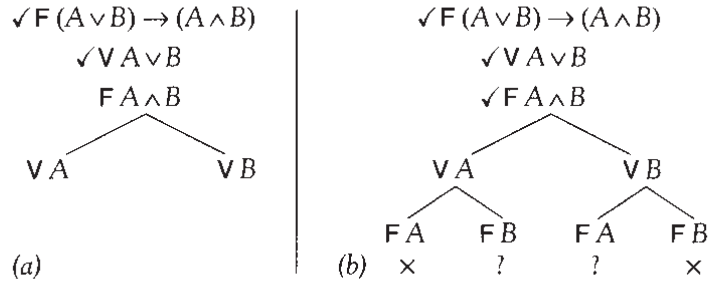

FIGURA 12.6 — Tablô para $(A \vee B) \to (A \wedge B)$.

Por enquanto, nenhuma contradição. Vamos usar agora a conjunção falsa. Também teremos uma bifurcação: mas onde bifurcar, já que temos dois ramos? Simples: a fórmula $\mathsf{F}\,A \wedge B$ pertence tanto ao ramo da direita como ao da esquerda; ela é comum aos dois. Logo, o resultado de processá-la deve ser *comum aos dois ramos*. Isso significa que cada um desses ramos vai bifurcar também. Você pode ver isso na figura 12.6b: nosso tablô tem agora quatro ramos. O primeiro deles, o mais à esquerda, fecha-se imediatamente, pois contém tanto $\mathsf{V}A$ quanto $\mathsf{F}A$. Da mesma forma, o quarto ramo, o mais à direita, que contém tanto $\mathsf{V}B$ quanto $\mathsf{F}B$, fecha-se. Os outros dois, assinalados com '?', continuam abertos.

Note, porém, que agora não há mais fórmulas moleculares a processar. Os ramos abertos, portanto, não vão fechar-se, o que significa que a fórmula $(A \vee B) \to (A \wedge B)$ não é válida.

Resumindo o que acabamos de aprender, se temos um tablô com vários ramos e vamos usar uma fórmula que leva a uma ramificação, o resultado deve ser acrescentado ao final de cada ramo a que essa fórmula pertence, e apenas a eles. Veja o que acontece no exemplo seguinte, por meio do qual mostramos que $(A \vee (A \to B)) \to B$ não é tautologia. Feitos os primeiros passos, teremos o seguinte tablô:

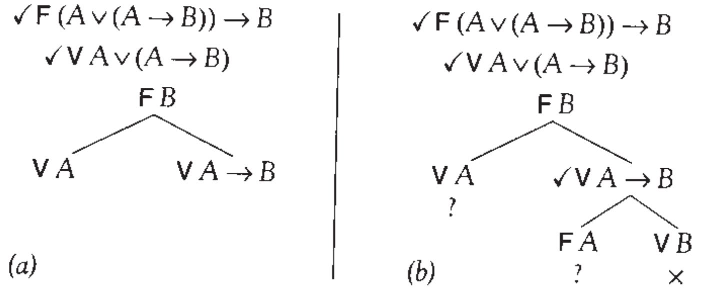

FIGURA 12.7 — Tablô para $(A \vee (A \to B)) \to B$.

O que nos resta a fazer, agora, é processar a fórmula $\mathsf{V}A \to B$ no ramo direito. Temos uma bifurcação, pois se trata de uma implicação verdadeira. Contudo, essa implicação pertence apenas ao ramo da direita; logo, o resultado de usá-la vai apenas ao ramo da direita, como você vê na figura 12.7b.

Feito isto, temos agora três ramos. O mais à direita fecha-se, pois contém $\mathsf{V}B$ e $\mathsf{F}B$. Como os outros dois ficam abertos, a fórmula não é válida.

Vamos resumir agora o que vimos até aqui. Um tablô para uma fórmula α qualquer é um tablô que começa com $\mathsf{F}\alpha$. Um ramo de um tablô é chamado de *fechado* se ele contém, para alguma fórmula α, tanto $\mathsf{V}\alpha$ quanto $\mathsf{F}\alpha$. Um ramo de um tablô chama-se *completo* se ou ele é fechado, ou todas as fórmulas moleculares que ocorrem nele foram reduzidas (isso equivale a dizer que todas elas devem ter sido marcadas com '✓').

Dizemos que um *tablô* é *completo* se cada um de seus ramos é completo. E um tablô é *fechado* se cada um de seus ramos é fechado. Dizemos, então, que um tablô fechado para uma fórmula α é uma *prova por tablôs de* α. A partir disso, pode-se demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 12.2 *Uma fórmula α é uma tautologia se e somente se existe uma prova por tablôs de α.*

Não vou demonstrar esse teorema (também conhecido como Teorema de Correção e Completude para a lógica proposicional — ou uma versão dele), pois isto nos levaria bem além do escopo deste livro. (Uma linda prova encontra-se, por exemplo, em Smullyan, 1968.) Eu gostaria de mencionar apenas que o resultado acima pode ser provado para fórmulas válidas em geral (e não apenas tautologias), e algo semelhante pode ser demonstrado no caso de conseqüência lógica.

Observe que o teorema acima prova que o nosso método de tablôs, no que se refere às tautologias, tem as duas características desejadas de correção e completude: apenas as tautologias são provadas, e prova-se que todas as tautologias são válidas.

Antes de passarmos aos exercícios, note que, se uma fórmula *não* é uma tautologia, um tablô para ela não vai nos dizer se ela é contingência ou contradição. Isso, ao contrário das tabelas de verdade, que sempre dizem em qual das três classes uma fórmula se enquadra (relativamente ao cálculo proposicional, claro, isto é, sem quantificadores).

Exercício 12.1 Determine, usando tablôs, se as fórmulas seguintes são tautologias ou não:

(a)	$(A \wedge B) \to B$	(j)	$((A \to Qb) \wedge \neg Qb) \to \neg A$
(b)	$B \to (\neg A \vee B)$	(k)	$\neg(A \vee Pb) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg Pb)$
(c)	$(Fa \vee \neg Fa) \to \neg Qb$	(l)	$\neg(B \to B) \vee (A \wedge \neg A)$
(d)	$(A \wedge B) \to \neg\neg B$	(m)	$\neg(\neg A \to B) \to (\neg B \vee \neg A)$
(e)	$\neg\neg A \wedge (A \to B)$	(n)	$(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \to B) \to C)$
(f)	$\neg\neg Pa \leftrightarrow (Pa \vee Pa)$	(o)	$(A \to (B \to C)) \to ((B \wedge A) \to C))$
(g)	$Lc \vee \neg(Lc \wedge Ts)$	(p)	$\neg Pa \to (\neg Pa \vee Qb)$
(h)	$(A \wedge A) \leftrightarrow A$	(q)	$(\neg(A \vee B) \wedge (C \leftrightarrow A)) \to \neg C$
(i)	$A \to (B \to \neg\neg A)$	(r)	$(A \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

12.4 Conseqüência lógica

O que vimos até aqui foram as regras para tablôs proposicionais (isto é, sem envolver quantificadores). Antes de passar às regras para quantificadores, vamos ver como mostrar que alguma fórmula é ou não conseqüência lógica de um conjunto de fórmulas, o que é bastante simples.

Vamos outra vez começar com um exemplo. Suponhamos que queremos mostrar que a fórmula $\neg B$ é uma conseqüência (por enquanto, tautológica) do conjunto $\{(A \wedge B) \to C, A, \neg C\}$. O passo inicial é parecido: temos de supor que $\neg B$ *não é* uma conseqüência lógica desse conjunto de fórmulas. Isso significa que existe alguma estrutura em que todas as fórmulas desse conjunto são verdadeiras e a conclusão $\neg B$ é falsa. Podemos representar isso da seguinte maneira:

$$\begin{array}{c} \mathsf{V}\,(A \wedge B) \to C \\ \mathsf{V}\,A \\ \mathsf{V}\,\neg C \\ \mathsf{F}\,\neg B \end{array}$$

Note que agora, dado esse passo inicial, só precisamos prosseguir com a construção do tablô. De $\mathsf{V}\neg C$ temos $\mathsf{F}C$, e de $\mathsf{F}\neg B$ temos $\mathsf{V}B$. A implicação verdadeira na primeira linha nos leva a uma bifurcação, e ficamos, então, com dois ramos. O ramo da direita fecha-se imediatamente, pois contém $\mathsf{V}C$ e $\mathsf{F}C$. O outro continua aberto, mas temos ainda uma conjunção falsa a usar, que nos leva a nova bifurcação e, finalmente, ao fechamento de todos os ramos. O tablô completo você encontra na figura 12.8.

Resumindo, a única diferença com relação à determinação de validade é que, agora, em vez de começarmos com uma única fórmula, começamos com *várias*. A partir daí, tudo segue como antes. E, obviamente, para que uma fórmula α seja conseqüência de algum conjunto de fórmulas Γ, todos os ramos do tablô têm que se fechar. Se algum ficar aberto, então α não é conseqüência lógica de Γ. O ramo aberto, analogamente ao caso da determinação de validade, nos permite construir uma estrutura em que todas as fórmulas de Γ são verdadeiras e α, falsa.

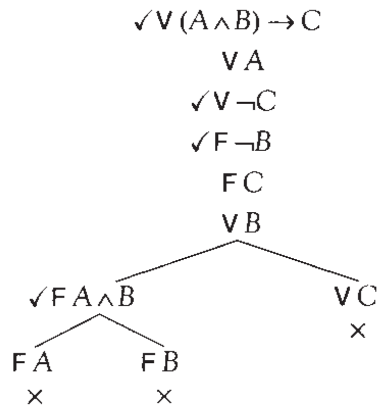

FIGURA 12.8 — Tablô mostrando que $(A \wedge B) \to C, A, \neg C \models \neg B$.

Se Γ é um conjunto finito de fórmulas, e α uma fórmula, vamos definir um tablô para $\Gamma \cup \{\alpha\}$ como um tablô que se inicia com $\mathsf{V}\gamma$, para toda $\gamma \in \Gamma$, e $\mathsf{F}\alpha$. Além disso, se há um tablô fechado para $\Gamma \cup \{\alpha\}$, dizemos que α é *conseqüência por tablôs* de Γ. Com base nisso, podemos demonstrar agora uma versão mais forte do teorema de correção e completude que vimos antes, a saber:

Teorema 12.3 *Uma fórmula α é uma conseqüência tautológica de um conjunto de fórmulas Γ se e somente se α é conseqüência por tablôs de Γ.*

O teorema 12.2, claro, é um caso especial do teorema acima, em que temos $\Gamma = \varnothing$.

Como você viu a partir dessas considerações, o método dos tablôs nos dá um procedimento mecânico para decidir, sempre, se uma certa fórmula é ou não uma tautologia, ou se é ou não conseqüência lógica de algum conjunto de fórmulas. Note também que esse método, até agora, para a lógica proposicional, sempre dá uma resposta. Cada fórmula processada é marcada com '✓', o que significa que foi usada e não será usada novamente. Eventualmente todas as fórmulas acabam sendo usadas (a menos que o tablô se feche primeiro), pois cada vez que usamos uma, o resultado são subfórmulas, cada vez menores, dela. Eventualmente, chegamos até as fórmulas atômicas, que não podem ser mais processadas. O resultado final é um tablô fechado, ou aberto, e temos, no caso proposicional (ou seja, sem quantificadores), uma resposta à nossa questão inicial.

Exercício 12.2 Determine, nos casos abaixo, se as conclusões indicadas (as fórmulas à direita de $\models$) são conseqüência lógica ou não das demais:

(a) $A \vee B, \neg A \models B$
(b) $Pa \leftrightarrow Qb, \neg Pa \models \neg Qb$
(c) $\neg(B \wedge A) \models \neg B \wedge \neg A$
(d) $A \rightarrow B \models A \vee B$
(e) $\neg Pa \rightarrow \neg Qb \models Pa \rightarrow Qb$
(f) $Pa, Pa \rightarrow C \models Pa \leftrightarrow C$
(g) $B \rightarrow \neg Cb \models \neg(B \wedge Cb)$
(h) $A \models (A \rightarrow (Qb \wedge A)) \rightarrow (A \wedge Qb)$
(i) $(Ba \wedge Ca) \rightarrow Fb, \neg Ba, \neg Ca \models \neg Fb$
(j) $\neg(A \vee B), Fa \leftrightarrow A \models \neg Fa$
(k) $\neg(A \wedge B), Fa \leftrightarrow A \models \neg Fa$
(l) $Pa \leftrightarrow Pb, Pb \leftrightarrow Pc \models Pa \leftrightarrow Pc$
(m) $A \rightarrow (B \vee Sb), (B \wedge Sb) \rightarrow Qa \models A \rightarrow Qa$
(n) $(\neg A \vee B) \vee C, (B \vee C) \rightarrow D \models A \rightarrow D$
(o) $(A \rightarrow B) \rightarrow A \models A$

12.5 Quantificadores

Para completar nosso conjunto de regras de construção de tablôs, precisamos ver ainda as regras que nos permitem lidar com os quantificadores.

É claro que podemos construir tablôs para algumas fórmulas contendo quantificadores, e mesmo mostrar que são válidas, como fizemos com as tabelas de verdade. Por exemplo, é fácil ver que a fórmula $\forall xQx \rightarrow \forall xQx$ é válida (na verdade, ela é uma instância de tautologia). Supondo que ela fosse falsa, teríamos que ter, em nosso tablô, seu antecedente verdadeiro e seu conseqüente falso, ou seja, teríamos que ter V $\forall xQx$ e F $\forall xQx$, o que fecha imediatamente o (único) ramo desse tablô.

Entretanto, as regras que temos até aqui nos permitem apenas decidir se certas fórmulas são tautologias ou não. E, como você se recorda, existem muitas outras fórmulas válidas, além das tautologias.

Vamos começar tomando $\forall xPx \rightarrow Pa$ como exemplo. Você há de concordar que ela é uma fórmula válida. (Informalmente, ela poderia dizer algo como 'Se todos são poetas, então Aristóteles é poeta', o que parece ser indiscutível.) Bem, vamos fazer um tablô para mostrar a validade dessa fórmula. O passo inicial, claro, é supor que ela pode ser falsa, ou seja, escrevemos F $\forall xPx \rightarrow Pa$ na primeira linha do tablô. E como temos uma implicação falsa, podemos reduzir essa fórmula, obtendo então o seguinte:

$$\begin{array}{c} \checkmark\ \mathsf{F}\ \forall xPx \rightarrow Pa \\ \mathsf{V}\ \forall xPx \\ \mathsf{F}\ Pa \end{array}$$

Até aqui não temos nenhuma inconsistência, mas temos no tablô a fórmula V $\forall xPx$, que não foi usada ainda. A regra que nos permite usá-la tem a seguinte justificação: se é verdade que todos são poetas, então é verdade que Aristóteles é poeta. Dito de outra forma, se todos têm a propriedade (simbolizada por) P, então a tem P, b tem P etc. Ou seja, se temos V $\forall xPx$ num ramo de um tablô, então podemos escrever V Pa, V Pb, V Pc etc. nesse ramo. Claro, no presente exemplo estamos interessados apenas em obter V Pa, o que nos permite fechar o tablô, pois já temos F Pa. Assim, nosso tablô fica:

$$\begin{array}{c} \checkmark\ \mathsf{F}\ \forall xPx \rightarrow Pa \\ \mathsf{V}\ \forall xPx \\ \mathsf{F}\ Pa \\ \mathsf{V}\ Pa \\ \times \end{array}$$

E, uma vez que o único ramo do tablô se fecha, $\forall xPx \rightarrow Pa$ é válida. Note, agora, que não marcamos a fórmula V $\forall xPx$ com '$\checkmark$', como costumamos fazer sempre que uma fórmula é reduzida. A explicação é a seguinte: quando processamos uma fórmula molecular, digamos, V $A \wedge B$, acrescentando V A e V B ao tablô, essa conjunção não é mais necessária, pois toda a "informação" contida nela (que seus dois elementos são verdadeiros) já foi extraída e acrescentada ao tablô. No caso de V $\forall xPx$, porém, o que está dito é que *todos* têm a propriedade simbolizada por P. Todavia, não acrescentamos isso ao tablô: