PSI-2432 Projeto e Implementação de Filtros Digitais

01/03/2010 Vítor H. Nascimento, Miguel A. Ramírez e Magno T. M. Silva

Lista de Exercícios 1

1) Determine a transformada z e sua respectiva região de convergência para cada uma das seguintes sequências:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

b) $-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n)$

d) $\delta(n)$

e) $\delta(n-1)$

f) $\delta(n+1)$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^n (u(n) - u(n-10))$

h) $a^n \cos(\omega_o n) u(n)$

i) $\frac{1}{n}(-2)^{-n} u(-n-1)$

j) $na^{-n}u(n)$, com $|a| < 1$

2) Use a transformada z para calcular a convolução das sequências $h(n) = (0{,}5)^n u(n)$ e $x(n) = 3^n u(-n)$.

3) O aumento da taxa de amostragem (*up-sampling*) é uma operação que expande uma sequência no tempo, inserindo zeros entre os valores da sequência. Por exemplo, o *up-sampling* de uma sequência $x(n)$ por um fator L resulta em

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $X(z)$, $\alpha < |z| < \beta$ a transformada z de $x(n)$. Expresse $Y(z)$ em função de $X(z)$ e a região de convergência de $Y(z)$ em função da região de convergência de $X(z)$.

4) Seja $H(z)$ a função de transferência de um sistema linear e invariante no tempo (LIT) com entrada $x(n)$ e saída $y(n)$, descrito pela seguinte equação de diferenças

$$y(n) = 1,3y(n-1) - y(n-2) + 0,3y(n-3) + 0,07x(n) + 0,13x(n-1) + 0,13x(n-2) + 0,07x(n-3).$$

Pede-se:

a) Determine a função de transferência do sistema em potências negativas de z.

b) Trata-se de um sistema FIR ou IIR? Justifique.

c) Calcule o valor do módulo da resposta em frequência em $\omega = 0$ e $\omega = \pi$ e verifique se o sistema corresponde a um filtro passa-altas.

5) A função de transferência de um filtro passa-baixas digital é

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{(2+\sqrt{2})z^2 + 2 - \sqrt{2}}.$$

a) Esboce a resposta em frequência desse filtro digital, marcando em especial os ganhos para as frequências normalizadas $\omega = 0$, $\omega = \pi/2$, e $\omega = \pi$ rad/amostra.

b) Na entrada do seu filtro digital você coloca o sinal

$$x(n) = 0,2 + 2\cos(\pi/2\; n) - \mathrm{sen}(\pi\; n).$$

Qual é o valor da saída do filtro *em regime permanente*?

6) Calcule a resposta impulsiva dos filtros seguintes. Quais são causais?

a) $H_1(z) = z + 2 + z^{-3}, \quad 0 < |z| < \infty$

b) $H_2(z) = \dfrac{z^2}{z^2 + 0,5z + 0,04}, \quad |z| > 0,4$

c) $H_3(z) = \dfrac{z^2}{z^2 + 0,5z + 0,04}, \quad 0,1 < |z| < 0,4$

d) $H_4(z) = \dfrac{z^3}{z^3 - 1,1z^2 + z - 0,738}, \quad |z| > 0,9055$

e) $H_5(z) = \dfrac{1}{z^3 - 1,1z^2 + z - 0,738}, \quad 0,9 < |z| < 0,9055$

7) Determine as respostas impulsivas em função do tempo discreto n associadas a cada função de transferência abaixo para que exista resposta em frequência. Indique e justifique se seu filtro é causal ou não em cada caso.

a) $H_1(z) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{8}z^{-3}}$

b) $H_2(z) = \dfrac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}$

c) $H_3(z) = \sum_{k=0}^{100} (-1)^k\, z^{-k}$

8) Calcule os fatores de escala K_i de forma que os filtros realizados com cada uma das funções de transferência dadas abaixo apresentem ganho máximo unitário no módulo da resposta em frequência. Apresente seu desenvolvimento algébrico e os cálculos que realizou para chegar aos seus resultados.

a) $H_1(z) = \dfrac{K_1}{1 + \frac{1}{8} z^{-3}}$

b) $H_2(z) = \dfrac{K_2}{\left(1 - \frac{1}{4} z^{-2}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}$

c) $H_3(z) = K_3 \displaystyle\sum_{k=0}^{100} (-1)^k z^{-k}$

d) $H_4(z) = \dfrac{K_4}{\left(1 + \frac{1}{4} z^{-2}\right)\left(1 + 2z^{-1}\right)}$

9) O sistema da Fig. 1 é uma alternativa para implementação de seções de segunda ordem em filtros recursivos. Os símbolos v_0, v_1, v_2, R e I sobre ligações entre blocos representam multiplicações por coeficientes, enquanto que os símbolos $x(n)$, $w_1(n)$ e $y(n)$ representam os sinais em cada ponto.

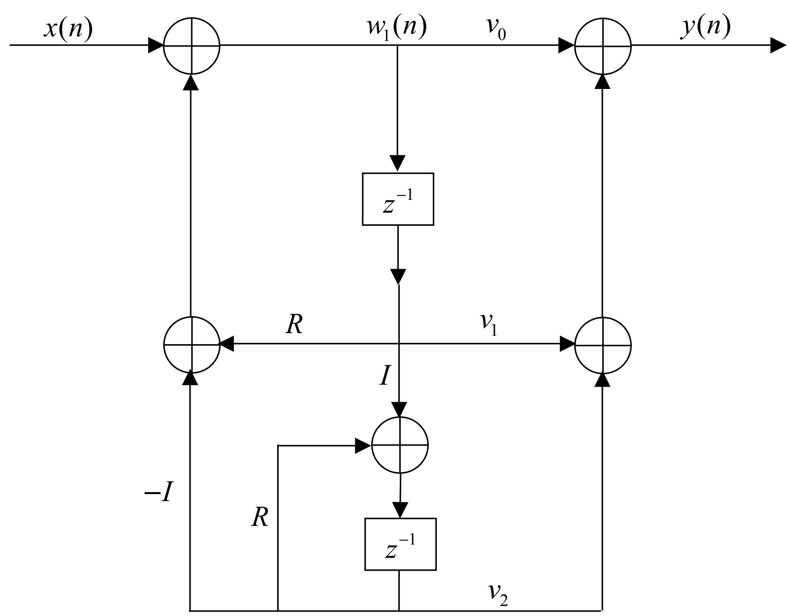

Figura 1: Implementação de um filtro não-recursivo de segunda ordem.

Para esse sistema, responda:

a) Qual é a função de transferência $H(z) = Y(z)/X(z)$?

b) Para implementar uma resposta genérica

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

como devem ser escolhidos os valores de R, I, v_0, v_1 e v_2 para que $H(z) = G(z)$ (indique um sistema que, resolvido, fornece os valores pedidos em função dos a_i e b_i).

10) Um filtro recursivo também pode ser implementado com a estrutura em *treliça* (ou *lattice*, em inglês), como mostrado na Fig. 2 para um filtro de ordem 2. Uma das vantagens da estrutura em treliça é que os *coeficientes de reflexão* k_i, como são chamados, têm módulo menor do que um se, e somente se, o filtro for estável. Essa propriedade é útil para implementações em ponto fixo (todos os coeficientes de realimentação são menores do que um), e é particularmente interessante para implementação de filtros recursivos adaptativos. Os símbolos k_1, k_2, v_0, v_1 e v_2, sobre ligações entre blocos representam multiplicações por coeficientes, enquanto que os símbolos $x(n)$, $d_1(n)$, $w_2(n)$, $w_1(n)$, $w_0(n)$ e $y(n)$ representam os sinais em cada ponto.

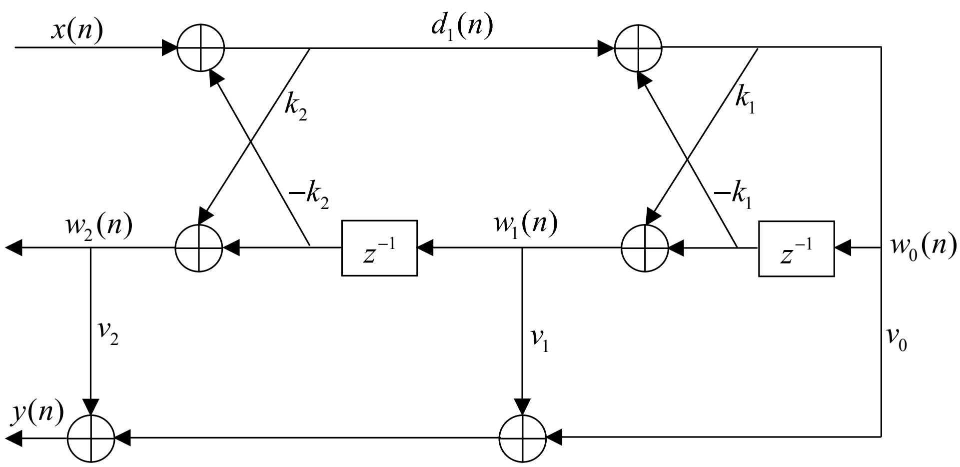

Figura 2: Filtro de 2ª ordem com estrutura em treliça.

Considerando a estrutura em treliça da Fig. 2, calcule a função de transferência $H(z) = Y(z)/X(z)$. Mostre como escolher k_1, k_2, v_0, v_1 e v_2 para implementar uma função de transferência genérica

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$