Eletricidade e Magnetismo - IGC

Potencial Elétrico

Prof. Cristiano Oliveira
Ed. Basilio Jafet – sala 202
crislpo@if.usp.br

Energia

Energia pode ser vista como trabalho armazenado, ou capacidade de realizar trabalho.

Equipamentos elétricos, dos mais diversos, precisam SEMPRE de uma fonte de energia: pilhas, baterias, ligados na "força" (rede), etc. Esta fonte de energia faz com que esses equipamentos "funcionem".

Uma das principais revoluções tecnológicas modernas foi o domínio da "energia elétrica", tanto na sua geração, armazenagem e transporte.

Apesar de ainda possuir enormes perdas em todas as etapas deste processo, esta energia (em conjunto com energia por combustão/térmica) é a principal fonte de alimentação utilizada nos equipamentos.

Na mecânica, definimos os conceitos de trabalho mecânico, energia cinética, energia potencial gravitacional e energia elástica. Análogos destas definições serão utilizados agora para efeitos elétricos e, posteriormente para efeitos magnéticos.

Energia Potencial

Trabalho feito por uma força ***F*** deslocando uma partícula de um ponto a até um ponto b

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_a^b F\cos\phi \, dl \quad \text{(work done by a force)}$$

Sendo $d\vec{l}$ um deslocamento infinitesimal ao longo da trajetória seguida pela partícula e ϕ é o ângulo entre $\vec{F}$ e $d\vec{l}$ em cada ponto da trajetória.

Se a força for conservativa ela independe do caminho, apenas dos pontos inicial e final. Assim, podemos escrever o trabalho realizado como o negativo da variação da energia potencial U.

$$W_{a\to b} = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = -\Delta U \quad \text{(work done by a conservative force)}$$

Vimos que ao realizar trabalho sobre um corpo de massa ***m***, variamos sua velocidade ***v***. O trabalho é igual a variação da quantidade ½ mv², que denominamos *Energia Cinética K*

$$W_{a\to b} = \Delta K = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = K_2 - K_1$$

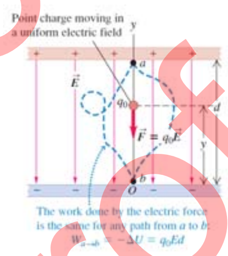
$$W_{a\to b} = -\Delta U$$

$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2 = cte$$

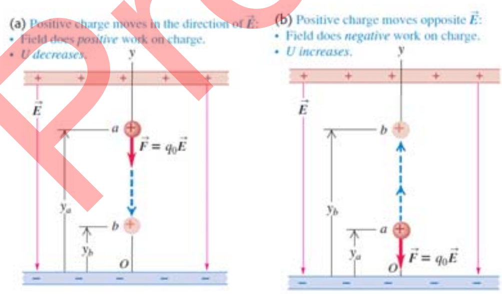
Conservação da Energia mecânica

Energia Potencial Elétrica

Campo Uniforme – ***E*** constante / Analogia com campo gravitacional *U = mgh*



$$W_{a\to b} = Fd = q_0Ed$$



$$U = q_0Ey$$

$$\begin{aligned} W_{a\to b} &= -\Delta U \\ &= -(U_b - U_a) \\ &= -(q_0Ey_b - q_0Ey_a) \\ &= q_0E(y_a - y_b) \end{aligned}$$

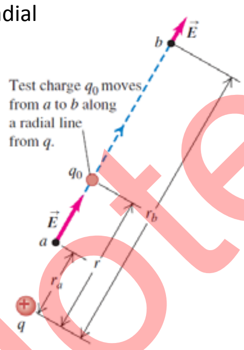
Energia Potencial Elétrica

Duas cargas puntiformes

$$F_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}$$

$$W_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b} F_r\,dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

Deslocamento ao longo da direção radial



O que acontece quando r_a e r_b não caem na mesma direção radial?

Energia Potencial Elétrica

Duas cargas puntiformes

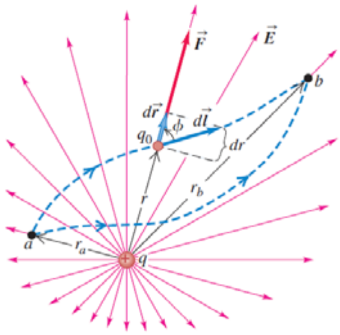
$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_a^b F\cos\phi\,dl$$

$$W_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b} F\cos\phi\,dl = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\cos\phi\,dl$$

Da figura: $\cos\phi\,dl = dr$

assim, o trabalho feito durante o deslocamento $d\vec{l}$ depende somente da mudança $d\vec{r}$ na distancia $\vec{r}$ entre as cargas, ou seja, é o componente radial do deslocamento!

Deslocamento ao longo de um caminho arbitrário



Comparando,

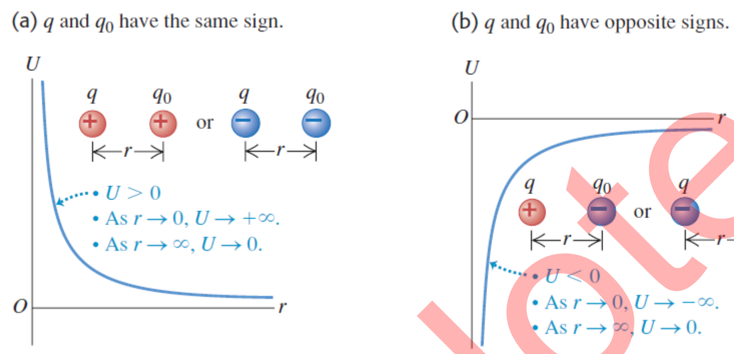
$$W_{a\to b} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) \qquad W_{a\to b} = U_a - U_b$$

Vemos que podemos definir a energia potencial U para um ponto a qualquer distancia como :

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r}$$ (electric potential energy of two point charges q and q_0)

Energia Potencial Elétrica

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r}$$



Cuidado!

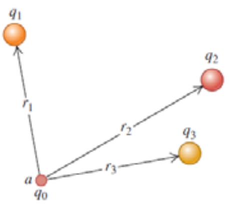
U -> <u>escalar</u> e decai com 1/r

F, ***E*** -> ***<u>vetores</u>*** e decaem com $1/r^2$

Energia Potencial Elétrica

Diversas cargas puntiformes

Cada carga q_i exerce um campo elétrico $\boldsymbol{E}_i$ sobre a carga q_0. Podemos escrever um campo elétrico total $\boldsymbol{E}_{tot}$, que é a soma vetorial destes campos. Um trabalho realizado sobre a carga q_0 será a soma dos trabalhos individuais. Como cada trabalho individual indica a variação de uma energia potencial individual, a energia potencial total será a ***soma algébrica das contribuições individuais***.



$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}+\frac{q_3}{r_3}+\cdots\right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$ (point charge q_0 and collection of charges q_i)

"Qualquer campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas estáticas dá origem a uma força conservativa."

Lembre-se: a escolha do referencial de U é sempre arbitrária (como no caso da energia potencial gravitacional). Em expressões como a mostrada acima, assume-se que U=0 para distâncias tendendo ao infinito. Essa escolha é comum em problemas de eletrostática. Em casos mais complexos, pode-se impor uma ***condição de contorno*** para o potencial.

Essa expressão indica a energia potencial associada com a presença da carga q_0 no campo ***E*** produzido pela presença das outras cargas.

No entanto, cada uma das cargas interagem entre si, gerando energias potenciais aos pares. Como descrever isso??

Energia Potencial Elétrica

Diversas cargas puntiformes

Se inicialmente as cargas q_1, q_2, q_3... estão separadas por distancias infinitas e a seguir aproximamos duas cargas q_i e q_j de modo que a distancia entre elas seja q_{ij}, a energia total U é a soma das energias potenciais oriundas da interação de cada par de cargas:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Esta energia pode ser vista como a ***energia potencial total U*** do sistema de cargas.

Esta soma é restrita a $i < j$. Com isso não consideramos $i = j$ e tomamos cada par somente uma vez.

$i = j$ significa a interação da carga com ela mesma, o que não existe em uma carga puntiforme. Para aglomerados pequenos de cargas, pode existir um termo chamado *auto-energia* (*self-energy*), que acaba sendo o análogo da "energia interna" visto em Mecânica para corpos extensos. Aqui, como naquele caso, não levaremos em conta estas energias pois elas não afetam as características de interação de uma dada partícula com o meio.

Potencial Elétrico

Obtemos a energia potencial ***U*** associada com uma carga de teste q_0 colocada em um campo elétrico.

Denomina-se ***potencial elétrico (V)***, a *energia potencial por unidade de carga*.

$$V = \frac{U}{q_0} \quad \text{or} \quad U = q_0 V$$

U,q_0 -> escalar , logo, V-> escalar

SI -> volt (1V) $\quad 1\ \text{V} = 1\ \text{volt} = 1\ \text{J/C} = 1\ \text{joule/coulomb}$

$$\frac{W_{a\to b}}{q_0} = -\frac{\Delta U}{q_0} = -\left(\frac{U_b}{q_0} - \frac{U_a}{q_0}\right) = -(V_b - V_a) = V_a - V_b$$

$V_a = U_a/q_0$ é a energia potencial por unidade de carga no ponto *a* -> V_a Potencial no ponto *a*

$V_b = U_b/q_0$ é a energia potencial por unidade de carga no ponto *b* -> V_b Potencial no ponto *b*

$V_{ab} = V_a - V_b$ potencial de *a* em relação a *b*, ou diferença de pontencial entre *a* e *b*

$(U_a - U_b)/q_0 = V_{ab} = V_a - V_b$ -> trabalho realizado contra a força elétrica para deslocar lentamente uma carga *unitária* de *b* até *a*.

Calculando o Potencial Elétrico

Carga puntiforme

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \quad \text{(potential due to a point charge)}$$

Coleção de cargas puntiformes

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad \text{(potential due to a collection of point charge)}$$

Distribuição continua de cargas

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} \quad \text{(potential due to a continuous distribution of charge)}$$

Nestas definições, assume-se que V - > 0 quando r - > ∞

Existem casos onde a distribuição de cargas se extende até o infinito. Nestes casos será necessário impor *condições de contorno* para V, que satisfaçam as caracteristicas do sistema.

Calculando o Potencial Elétrico

Havíamos mostrado que o trabalho realizado pela força elétrica sobre uma carga teste era dado por:

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_a^b q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Dividindo essa relação por q_0 e comparando com a definição de potencial,

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b E\cos\phi\, dl \quad \text{(potential difference as an integral of } \vec{E}\text{)}$$

Com isso vemos que a unidade de diferença de potencial 1V é igual a unidade de campo elétrico, (1N/C) multiplicada pela unidade de distancia (1m). Assim:

$$1\ \text{V/m} = 1\ \text{volt/meter} = 1\ \text{N/C} = 1\ \text{newton/coulomb}$$

Operadores vetoriais

Seja φ uma função escalar $\varphi(x,y,z)$

Seja um campo vetorial $\vec{E}$ dado por $\vec{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = F_x(x,y,z)\hat{\boldsymbol{\imath}} + F_y(x,y,z)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + F_z(x,y,z)\hat{\boldsymbol{k}}$

$$\mathbf{grad}\ \varphi = \vec{\nabla}\varphi = \frac{d\varphi}{dx}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{d\varphi}{dy}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{d\varphi}{dz}\hat{\boldsymbol{k}} \qquad \mathbf{div}\ \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz}$$

O operador rotacional, $\mathbf{rot}$, $\vec{\nabla}\times\cdot$, *é o produto vetorial do operador gradiente com um campo vetorial*

O rotacional do campo será

$$\mathbf{rot}\ \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{F}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{dF_z}{dy} - \frac{dF_y}{dz}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(\frac{dF_x}{dz} - \frac{dF_z}{dx}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \left(\frac{dF_y}{dx} - \frac{dF_x}{dy}\right)\hat{\boldsymbol{k}}$$

O operador rotacional indica a presença de campos girantes em um meio

Operadores vetoriais

$\varphi(x,y,z)$ -> escalar

$\vec{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = F_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + F_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + F_z\hat{\boldsymbol{k}}$ -> vetor

$\mathbf{grad}\ \varphi = \vec{\nabla}\varphi = \frac{d\varphi}{dx}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{d\varphi}{dy}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{d\varphi}{dz}\hat{\boldsymbol{k}}$ -> vetor

$\mathbf{div}\ \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz}$ -> escalar

$\mathbf{rot}\ \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{F}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$ -> vetor

Relações com operadores Vetoriais

$$\mathbf{curl} = \mathbf{rot} = \vec{\nabla}\times$$
$$\nabla^2 \doteq \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\right)$$

(I–1)	$\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi$
(I–2)	$\nabla\varphi\psi = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$
(I–3)	$\mathrm{div}\,(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \mathrm{div}\,\mathbf{F} + \mathrm{div}\,\mathbf{G}$
(I–4)	$\mathbf{curl}\,(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \mathbf{curl}\,\mathbf{F} + \mathbf{curl}\,\mathbf{G}$
(I–5)	$\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) = (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F}\times\mathbf{curl}\,\mathbf{G} + \mathbf{G}\times\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$
(I–6)	$\mathrm{div}\,\varphi\mathbf{F} = \varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla\varphi$
(I–7)	$\mathrm{div}\,(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\mathbf{curl}\,\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\mathbf{curl}\,\mathbf{G}$
(I–8)	$\mathrm{div}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = 0$
(I–9)	$\mathbf{curl}\,\varphi\mathbf{F} = \varphi\,\mathbf{curl}\,\mathbf{F} + \nabla\varphi\times\mathbf{F}$
(I–10)	$\mathbf{curl}\,(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{F}\,\mathrm{div}\,\mathbf{G} - \mathbf{G}\,\mathrm{div}\,\mathbf{F} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}$
(I–11)	$\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{F} - \nabla^2\mathbf{F}$
(I–12)	$\mathbf{curl}\,\nabla\varphi = 0$
(I–13)	$\oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da = \int_V \mathrm{div}\,\mathbf{F}\,dv$
(I–14)	$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{curl}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da$
(I–15)	$\oint_S \varphi\mathbf{n}\,da = \int_V \nabla\varphi\,dv$
(I–16)	$\oint_S \mathbf{F}(\mathbf{G}\cdot\mathbf{n})\,da = \int_V \mathbf{F}\,\mathrm{div}\,\mathbf{G}\,dv + \int_V (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}\,dv$
(I–17)	$\oint_S \mathbf{n}\times\mathbf{F}\,da = \int_V \mathbf{curl}\,\mathbf{F}\,dv$
(I–18)	$\oint_C \varphi\,d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{n}\times\nabla\varphi\,da$

Potencial Elétrico e Campo Elétrico

Da lista de relações anteriores, temos $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\varphi\right) = \mathbf{0}$

Seja um campo Vetorial $\vec{G}(x,y,z)$. A relação anterior mostra que,

$$\vec{\nabla}\times\vec{G} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \vec{G} = \vec{\nabla}\varphi$$

$\vec{G}$ pode ser escrito como o gradiente de uma função escalar φ

O campo elétrico de uma carga puntiforme é dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\frac{\vec{r}}{r^3}$$

É possivel demonstrar que, $\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \mathbf{0}$

Como o campo elétrico possui essa dependência vetorial, demonstramos que para uma carga puntiforme no vácuo parada,

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \mathbf{0}$$

Logo, o campo $\vec{E}$ pode ser escrito como o gradiente de um potencial V,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\,\mathrm{V}$$

O sinal menos é incluído neste caso para que a convenção de energia potencial elétrica seja igual a mecânica

Cálculo de Potencial elétrico

Temos o campo elétrico $\vec{\boldsymbol{E}}$, que pode ser escrito como o negativo do gradiente de um potencial:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\nabla}\,\mathrm{V}$$

Integramos o campo $\vec{\boldsymbol{E}}$ ao longo de um caminho arbitrário

$$\int_a^b \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -\int_a^b \vec{\nabla}\,\mathrm{V} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}$$

Agora, da definição de gradiente, $\vec{\nabla}\,\mathrm{V} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = d\boldsymbol{V}$, logo

$$-\int_a^b \vec{\nabla}\,\mathrm{V} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -(\boldsymbol{V_b} - \boldsymbol{V_a}) = \boldsymbol{V_a} - \boldsymbol{V_b}$$

Assim,

$$\boldsymbol{V_a} - \boldsymbol{V_b} = \int_a^b \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}$$

Que é a mesma equação que obtivemos anteriormente

Resolução de Problemas em Eletrostática

Quando a distribuição de cargas é conhecida, podemos calcular o potencial eletrostático ou o campo elétrico utilizando :

$$V(r) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r} \qquad \vec{E}(r) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}dq \qquad \Phi_E = \oint \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

No entanto, em muitos casos não se tem acesso a distribuição de cargas. Neste caso pode-se calcular o campo elétrico, antes da distribuição de cargas poder ser calculada. Nestes casos pode-se integrar o campo elétrico em uma integral de linha e obter V

$$\boldsymbol{V_a} - \boldsymbol{V_b} = \int_a^b \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}$$

Está além do escopo deste curso a abordagem completa deste problema mas indicarei abaixo algumas formas de resolução.

Resolução de Problemas em Eletrostática

Da Lei de Gauss na forma diferencial, temos

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathrm{E}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

Agora, sabemos que o campo elétrico pode ser escrito como o negativo do gradiente de um potencial V:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\mathbf{grad}\,\mathrm{V} = -\vec{\nabla}\mathrm{V}$$

Substituindo a equação acima na lei de Gauss,

$$\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\mathrm{V} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\mathrm{V}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

É conveniente entender o operador **div grad** $(\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}))$como um unico operador diferencial que denominaremos *Laplaciano* $(\boldsymbol{\nabla}^2)$. Assim,

$$\boldsymbol{\nabla}^2\,\mathrm{V} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Esta equação é conhecida como Equação de Poisson. O operador Laplaciano envolve diferenciação com respeito a mais de uma variável. Assim esta equação é uma *equação diferencial parcial* que pode ser resolvida quando se conhece $\rho(\vec{r})$ em ***algum sistema de coordenadas***.

Equação de Poisson

$$\boldsymbol{\nabla}^2\,\mathrm{V} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Rectangular coordinates:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\cdot \qquad (3\text{–}6)$$

Spherical coordinates:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2}\cdot \qquad (3\text{–}7)$$

Cylindrical coordinates:

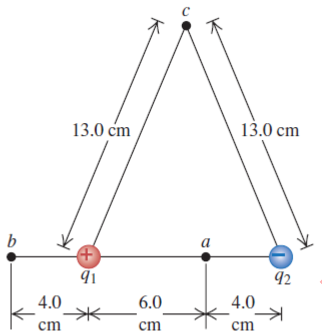
$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\cdot \qquad (3\text{–}8)$$

Resolve-se a equação diferencial em um dado sistema de coordenadas e impoe-se as condições de contorno existentes para o problema.

<u>Infelizmente não trabalharemos com esse tipo de solução no curso! ;-((</u>

Example 23.4 Potential due to two point charges

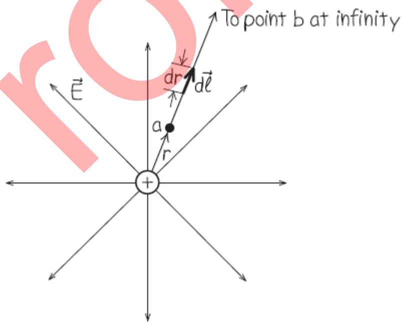
An electric dipole consists of point charges $q_1 = +12\text{ nC}$ and $q_2 = -12\text{ nC}$ placed 10.0 cm apart (Fig. 23.13). Compute the electric potentials at points a, b, and c.



Example 23.6 Finding potential by integration

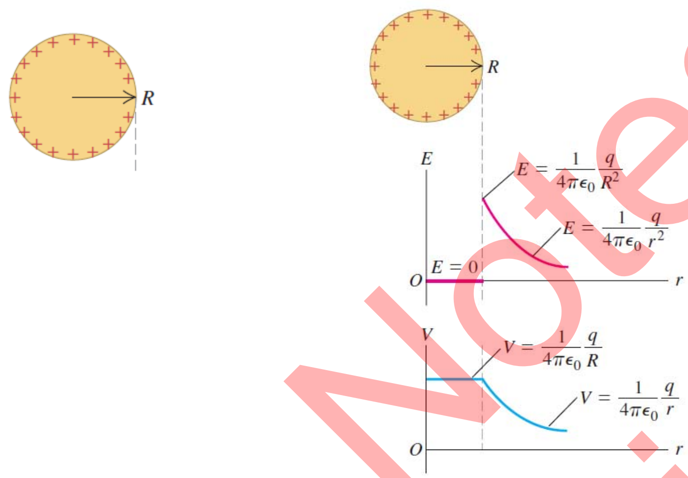
By integrating the electric field as in Eq. (23.17), find the potential at a distance r from a point charge q.

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E\cos\phi \, dl$$



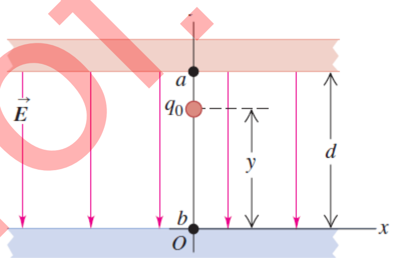
Example 23.8 A charged conducting sphere

A solid conducting sphere of radius R has a total charge q. Find the electric potential everywhere, both outside and inside the sphere.



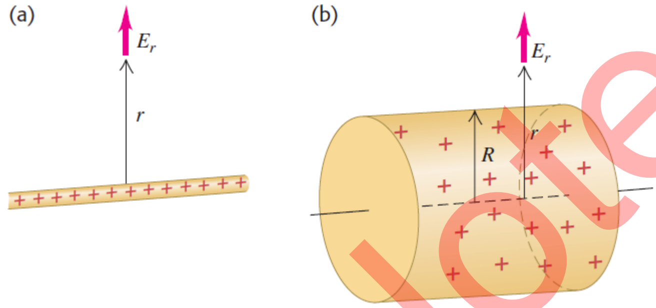
Example 23.9 Oppositely charged parallel plates

Find the potential at any height y between the two oppositely charged parallel plates discussed in Section 23.1 (Fig. 23.18).



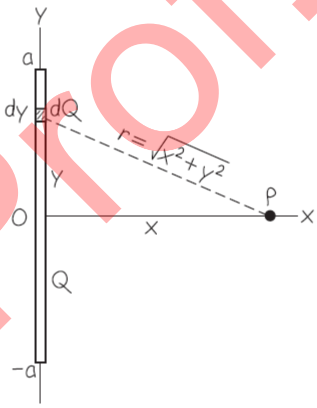
Example 23.10 An infinite line charge or charged conducting cylinder

Find the potential at a distance r from a very long line of charge with linear charge density (charge per unit length) λ.



Example 23.12 Potential of a line of charge

Positive electric charge Q is distributed uniformly along a line of length $2a$ lying along the y-axis between $y = -a$ and $y = +a$ (Fig. 23.21). Find the electric potential at a point P on the x-axis at a distance x from the origin.



Superficies Equipotenciais

Uma superfície equipotencial é uma superfície, em três dimensões, sobre a qual o *potencial elétrico V* permanece constante em todos os seus pontos.

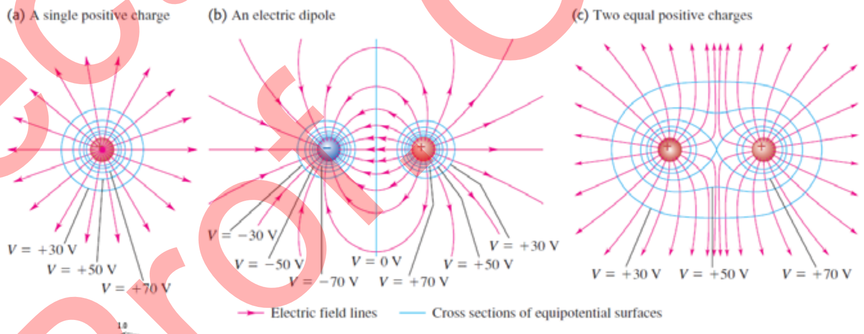
Uma carga teste ao se deslocar nessa superfície, terá a energia potencial elétrica qV constante!

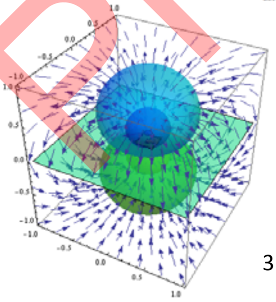
Como a energia potencial não varia quando uma carga de teste se desloca ao longo de uma superfície equipotencial, o campo elétrico não pode realizar trabalho sobre essa carga.

Portanto: $\vec{E}$ ***deve ser perpendicular à superfície em todos os seus pontos.***

Em termos de linhas de campo: ***As linhas de campo elétrico e as superfícies equipotenciais são sempre mutualmente perpendiculares***

Superficies Equipotenciais



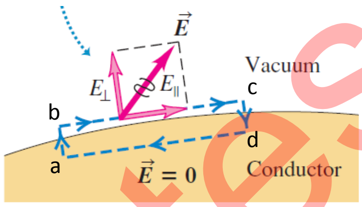


3D view -> Dipole

Superfícies Equipotenciais e Condutores

Como vimos, o campo elétrico dentro de um condutor é nula. Com isso podemos mostrar que:

"Quando todas as cargas em um condutor carregado estão em repouso, a superfície de um condutor é sempre uma superfície equipotencial"



Tome um caminho fechado do campo elétrico englobando parte da superfície do condutor.

Sabemos que para um campo conservativo, a integral em um caminho fechado deve ser nula. Escolhemos o caminho abcd onde ab e cd são perpendiculares à superfície e bc e da são paralelos à superfície.

$$\frac{W}{q_0} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \int_a^b \overrightarrow{E_{\perp ab}}\cdot d\vec{l} + \int_b^c \overrightarrow{E_{//bc}}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \overrightarrow{E_{\perp cd}}\cdot d\vec{l} + \int_d^a \overrightarrow{E_{//da}}\cdot d\vec{l} = 0$$

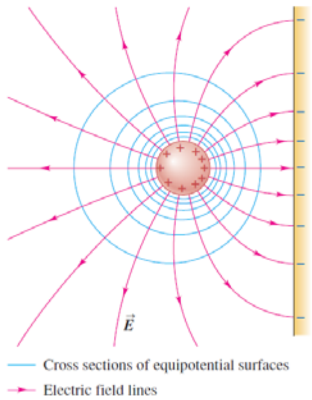
Superfícies Equipotenciais e Condutores

$$\frac{W}{q_0} = E_{\perp ab}\overline{ab} + E_{//bc}\overline{bc} + E_{\perp cd}\overline{cd} + E_{//da}\overline{da}$$

Agora: $E_{//da} = 0$-> dentro de um condutor
$E_{\perp ab} = -E_{\perp cd}; \overline{ab} = \overline{cd} \Rightarrow E_{\perp ab}\overline{ab} + E_{\perp cd}\overline{cd} = 0$

Logo, só teremos a condição de trabalho nulo se $E_{//bc} = 0$

Isso demonstra que **em um condutor carregado em repouso, o campo elétrico nos pontos próximos à superfície externa deve ser perpendicular em todos os pontos da superfície**

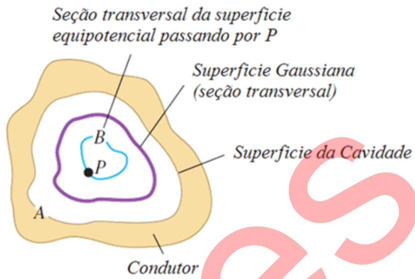


Como uma superfície equipotencial é sempre perpendicular ao sampo elétrico, isso demonstra que a superfície de um condutor, é uma superfície equipotencial.

Superficies Equipotenciais e Condutores

Teorema:

Em equilíbrio eletrostático, se um condutor possui uma cavidade e se não existe nenhuma carga no interior da cavidade, então não pode existir carga sobre qualquer ponto da superfície da cavidade.



Demonstração:

Considere um condutor com uma cavidade com superficie interna A. Como mostramos antes, é uma superfície equipotencial.

Para demonstrar o teorema, basta mostrarmos que todos os pontos no interior de uma cavidade, possuem o mesmo potencial.

Seja um ponto P no interior da cavidade e vamos assumir que por este ponto passa uma superfície equipotencial com um potencial diferente de A.

Construímos uma superfície Gaussiana entre as duas equipotenciais. Como sabemos, já que os potenciais são diferentes, teremos um campo E apontando de A para B ou de B para A. Em qualquer um desses casos, o fluxo passando pela superfície gaussiana, não é zero. Logo: <u>deveria haver uma carga dentro da superfície Gaussiana considerada</u>.

Como não existe carga dentro da cavidade, concluímos que o potencial P não pode ser diferente em nenhum ponto da cavidade. Porém, para que isso seja verdade, o campo elétrico deve ser igual a zero em todos os pontos no interior da cavidade. Para que isso seja verdadeiro, o campo elétrico na superfície da cavidade também é nulo.

<u>Logo, a densidade de carga na superfície da cavidade também deve ser nula!</u> CQD