Vorticidade

J. L. Baliño

Escola Politécnica - Universidade de São Paulo

Apostila de aula
2017, v. 1

Sumário

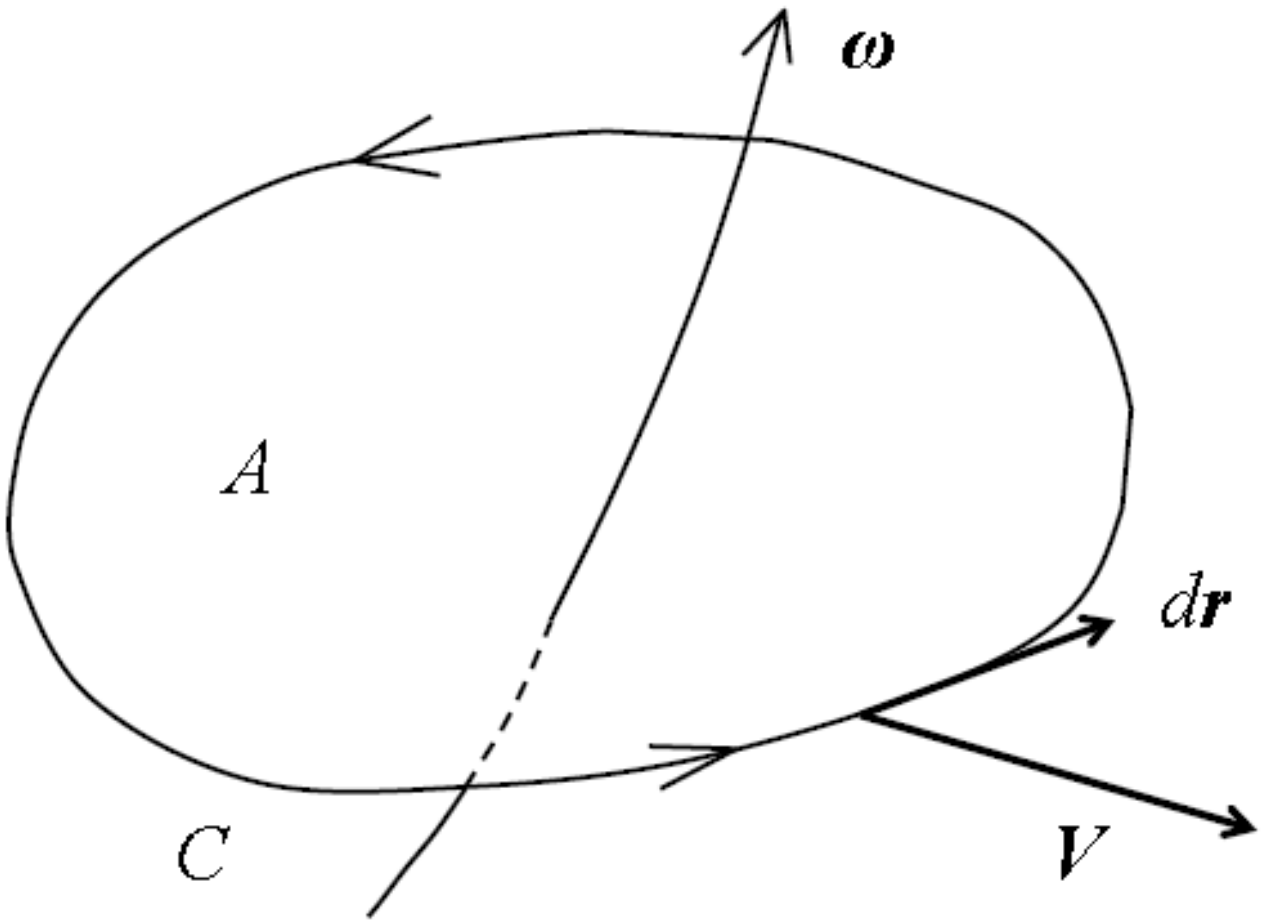
1 Propriedades matemáticas

2 Teoremas de vorticidade

3 Equação de vorticidade de Helmholtz

4 Escoamentos secundários

Teorema de Stokes



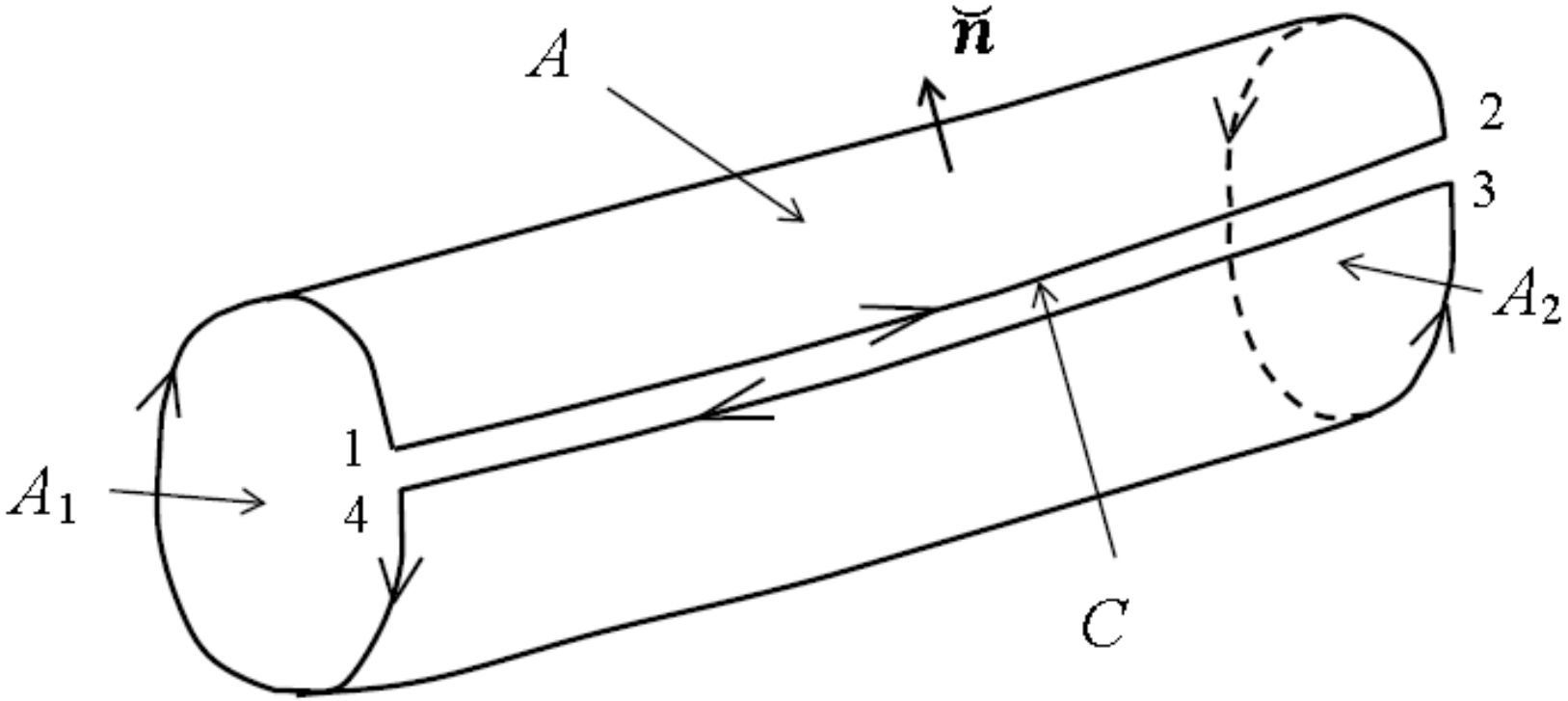
Teorema de Stokes

A integral de linha (circulação Γ_C) em torno da curva fechada C de um campo vectorial é igual à integral em qualquer superfície A com contornos em C da componente normal (fluxo) do rotacional desse campo. Para o caso do vector velocidade $\boldsymbol{V}$:

$$\Gamma_C = \oint_C \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A (\nabla \times \boldsymbol{V}) \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA = \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA$$

Da definição do vector vorticidade, vemos que $\boldsymbol{\omega}$ é solenoidal, pois $\nabla \cdot (\nabla \times \quad) \equiv 0$.

Tubo de vorticidade



Tubo de vorticidade

Considerando um tubo de vorticidade, a circulação da velocidade ao longo da curva fechada com normal à área lateral resulta:

$$\Gamma_C = \oint_C \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} = \left[\int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1\right] \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA = 0$$

pois $\boldsymbol{\omega} \cdot \breve{\boldsymbol{n}} = 0$ na superfície de um tubo de vorticidade. Quando o ponto 1 se aproxima do ponto 4 e o ponto 2 se aproxima do ponto 3, $\left[\int_1^2 + \int_3^4\right] \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} \to 0$. Considerando as normais nas áreas transversais entrando em A_1 e saindo em A_2, resulta, pelo teorema de Stokes:

$$\int_4^1 \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{A_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA \qquad \int_2^3 \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{A_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA$$

Substituindo e considerando que A_1 e A_2 são arbitrários resulta, para qualquer área A_i transversal do tubo de vorticidade:

$$\int_{A_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA = \int_{A_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA = \int_{A_i} \boldsymbol{\omega} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA$$

As linhas de vorticidade não podem começar ou terminar no fluido (teria vorticidade infinita); devem ser fechadas ou nascer fora do recinto.

Teorema de Crocco

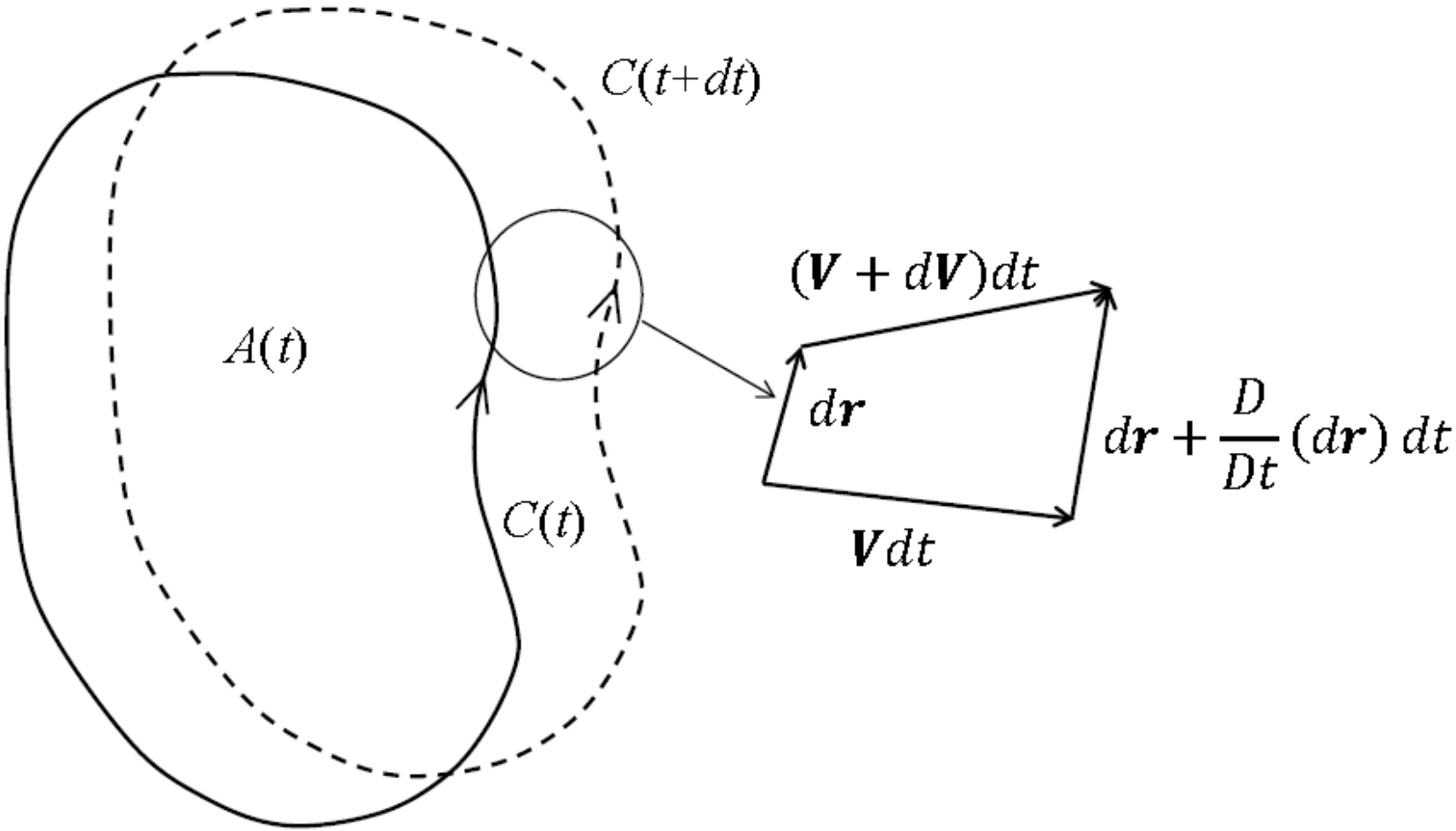
Considerando um escoamento não viscoso, incompressivel, com um campo de forças conservativo ($\boldsymbol{G} = -\nabla\mathcal{U}$), a equação de momento linear resulta:

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}V^2\right) - \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\mathcal{U}$$

$$-\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \mathcal{U} + \frac{1}{2}V^2\right) = -g\,\nabla H_E = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} - \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\omega}$$

Em um escoamento não viscoso e incompressível, a presença de escoamento transiente ou de vorticidade viola a conservação da constante de Bernoulli. Para escoamento permanente e irrotacional, a constante de Bernoulli é a mesma para todo o campo.

Teorema de Kelvin



Teorema de Kelvin

Para um fluido newtoniano com viscosidade constante e hipótesis de Stokes:

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{G} + \nu\nabla^2\boldsymbol{V} + \frac{1}{3}\nu\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right)$$

Consideremos uma linha fechada C no fluido e identifiquemos as partículas pertencentes a essa linha. Calculamos a derivada material da circulação da velocidade ao longo de C:

$$\frac{D\Gamma_C}{Dt} = \frac{D}{Dt}\oint \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C \frac{D}{Dt}\left(\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{r}\right) = \oint_C \frac{D\boldsymbol{V}}{Dt}\cdot d\boldsymbol{r} + \oint_C \boldsymbol{V}\cdot\frac{D}{Dt}\left(d\boldsymbol{r}\right)$$

Do diagrama vectorial:

$$\boldsymbol{V}\,dt + d\boldsymbol{r} + \frac{D}{Dt}\left(d\boldsymbol{r}\right)\,dt = d\boldsymbol{r} + \left(\boldsymbol{V}+d\boldsymbol{V}\right)\,dt \Rightarrow \frac{D}{Dt}\left(d\boldsymbol{r}\right) = d\boldsymbol{V}$$

Teorema de Kelvin

$$\oint \boldsymbol{V} \cdot \frac{D}{Dt}(d\boldsymbol{r}) = \oint_C \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{V} = \oint_C d\left(\frac{1}{2}V^2\right) = 0$$

pois é a integral de um diferencial em uma linha fechada. Substituindo $\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt}$:

$$\frac{D\Gamma_C}{Dt} = -\oint_C \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\boldsymbol{r} + \oint_C \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{r} + \frac{\mu}{3}\oint_C \frac{\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{V})}{\rho} \cdot d\boldsymbol{r} + \mu \oint_C \frac{\nabla^2 \boldsymbol{V}}{\rho} \cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\oint_C \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A \nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho}\right) \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA$$

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho}\right) = \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p + \frac{1}{\rho}\cancel{\nabla \times (\nabla p)} = \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA$$

Para escoamento barotrópico ($\rho = \rho(p)$), $\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \parallel \nabla p$ e a circulação é nula.

Teorema de Kelvin

$$\oint_C \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A (\nabla \times \boldsymbol{G}) \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA$$

Para $\boldsymbol{G} = -\nabla \mathcal{U}$ (conservativo), resulta $\nabla \times \nabla \mathcal{U} = \boldsymbol{0}$. Substituindo, resulta:

$$\frac{D\Gamma_C}{Dt} = -\int_A \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA + \int_A (\nabla \times \boldsymbol{G}) \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA$$
$$+\frac{\mu}{3} \oint_C \frac{\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{V})}{\rho} \cdot d\boldsymbol{r} + \mu \oint_C \frac{\nabla^2 \boldsymbol{V}}{\rho} \cdot d\boldsymbol{r}$$

Para escoamento barotrópico com forças de volume conservativas:

$$\frac{D\Gamma_C}{Dt} = \frac{\mu}{3} \oint_C \frac{\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{V})}{\rho} \cdot d\boldsymbol{r} + \mu \oint_C \frac{\nabla^2 \boldsymbol{V}}{\rho} \cdot d\boldsymbol{r}$$

Teorema de Kelvin

Para escoamento incompressível, barotrópico com forças de volume conservativas:

$$\frac{D\Gamma_C}{Dt} = \nu \oint_C \nabla^2 \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{V} = \nabla \cancel{(\nabla \cdot \boldsymbol{V})} - \nabla \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}$$

$$\frac{D\Gamma_C}{Dt} = -\nu \oint_C (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \cdot d\boldsymbol{r} = -\nu \int_A [\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega})] \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \nabla \cancel{(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega})} - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \Rightarrow \frac{D\Gamma_C}{Dt} = \nu \int_A \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA$$

Finalmente, para escoamento não viscoso, incompressível, barotrópico com forças de volume conservativas, a circulação em uma curva fechada no fluido permanece constante no tempo quando a linha se desloca com as partículas (teorema de Kelvin):

$$\frac{D\Gamma_C}{Dt} = 0$$

Geração de circulação (vorticidade)

Vorticidade pode ser gerada em condições nas quais a linhas de pressão constante não são paralelas às linhas de massa específica constante; essa situação aparece em convecção natural, circulação atmosférica e oceánica.
Vorticidade pode ser gerada pela existência de forças não conservativas. O exemplo mais típico é a circulação criada na água que é esvaziada em um sumidouro (circulação contrária nos hemisferios norte e sul) devido à força de Coriolis.
Vorticidade pode ser gerada se existe difusão de vorticidade até o local das partículas (por exemplo na camada limite).

Uma consequência do teorema de Kelvin é que se a vorticidade for nula, então ela continua sendo nula durante todo o movimento.

Equação de vorticidade de Helmholtz

Considerando um fluido de viscosidade constante:

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{G} + \nu\nabla^2\boldsymbol{V} + \frac{1}{3}\nu\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right)$$

Calculando o rotacional dos membros da equação anterior, temos:

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho}\right) = \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p + \frac{1}{\rho}\cancel{\nabla \times (\nabla p)} = \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p$$

$$\nabla \times \left(\nu\nabla^2\boldsymbol{V}\right) = \mu\nabla \times \left(\frac{\nabla^2\boldsymbol{V}}{\rho}\right) = \mu\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla^2\boldsymbol{V} + \nu\nabla \times \left(\nabla^2\boldsymbol{V}\right)$$

$$= \mu\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla^2\boldsymbol{V} + \nu\nabla^2\left(\nabla \times \boldsymbol{V}\right) = \mu\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla^2\boldsymbol{V} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}$$

Equação de vorticidade de Helmholtz

$$\nabla \times [\nu \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{V})] = \mu \nabla \times \left[\frac{\nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{V})}{\rho} \right]$$

$$= \mu \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{V}) + \nu \cancel{\nabla \times [\nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{V})]} = \mu \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{V})$$

$$\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{V}) = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \left(\frac{1}{2} V^2 \right) = 0$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \boldsymbol{V} - (\boldsymbol{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{V} \cancel{(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega})} - \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{V})$$

$$= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \boldsymbol{V} - (\boldsymbol{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{V})$$

Substituindo e sabendo que:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}$$

Equação de vorticidade de Helmholtz

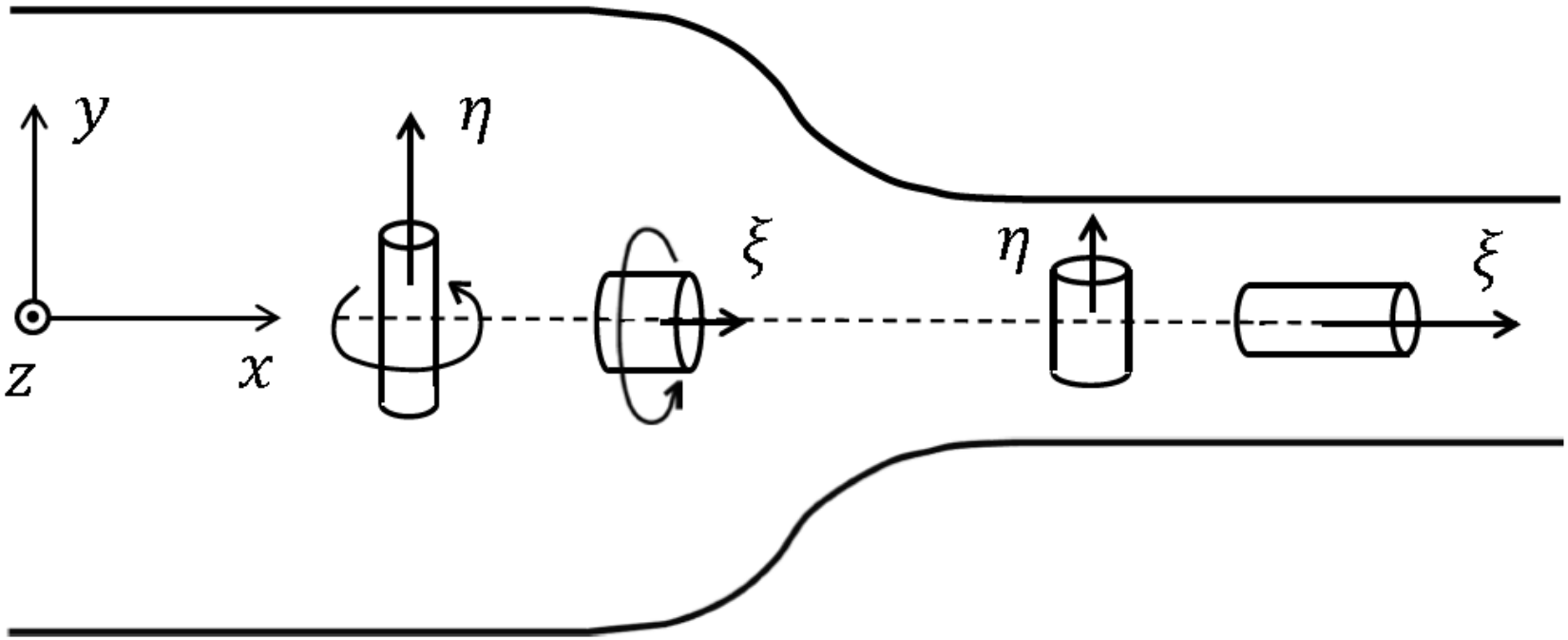
$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{V} - \boldsymbol{\omega}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) + \nabla\times\boldsymbol{G} + \nu\,\nabla^2\boldsymbol{\omega}$$
$$+\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\left[-\nabla p + \frac{\mu}{3}\,\nabla\,(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) + \mu\,\nabla^2\boldsymbol{V}\right]$$

A relação anterior nos indica todas as causas pelas quais pode mudar a vorticidade seguindo a uma partícula de fluido com viscosidade constante. Para escoamento incompressível em um campo conservativo, resulta a equação de vorticidade de Helmholtz:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{V} + \nu\,\nabla^2\boldsymbol{\omega}$$

O primeiro termo é conhecido como "termo de alongamento de vorticidade", já que amplifica/atenua ou cria novas componentes do vector vorticidade por advecção da vorticidade pre-existente. O segundo é conhecido como "termo de difusão de vorticidade", resultando importante nos contornos de um corpo, onde sua ação "contamina" de vorticidade ao escoamento externo inicialmente irrotacional.

Amplificação/atenuação de vorticidade



Amplificação/atenuação de vorticidade

No escoamento na redução de área bi-dimensional desprezamos o termo difusivo (longe da camada limite na parede):

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{V} = \xi\,\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y} + \zeta\,\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z}$$

$$= \left(\xi\,\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\,\frac{\partial u}{\partial z}\right)\breve{\boldsymbol{i}} + \left(\xi\,\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta\,\frac{\partial v}{\partial z}\right)\breve{\boldsymbol{j}}$$

$$+ \left(\zeta\,\frac{\partial w}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial w}{\partial y} + \zeta\,\frac{\partial w}{\partial z}\right)\breve{\boldsymbol{k}}$$

A componente x do vector vorticidade se amplifica pelo alongamento da partícula de fluido, pois:

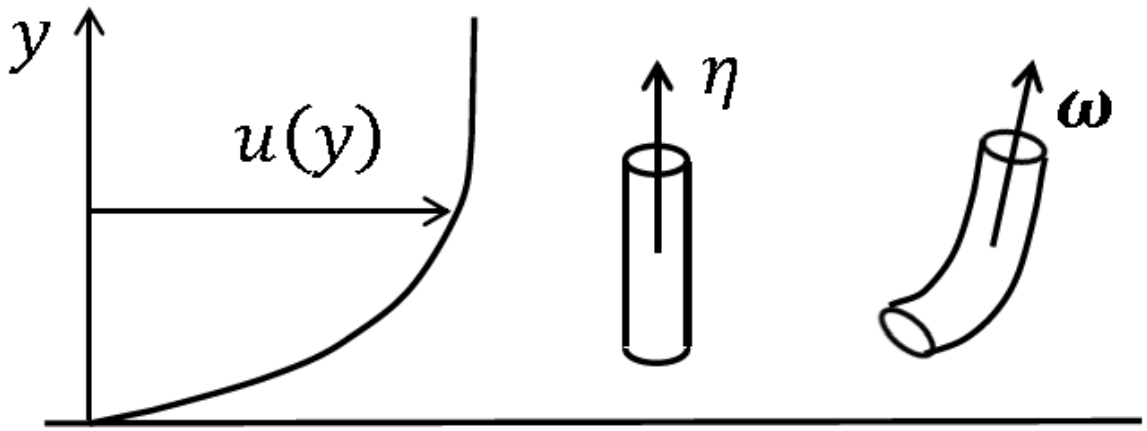
$$\frac{\partial u}{\partial x} > 0 \Rightarrow \frac{D\xi}{Dt} = \xi\,\frac{\partial u}{\partial x} > 0$$

A componente y do vector vorticidade se atenua pelo encurtamento da partícula de fluido, pois:

$$\frac{\partial v}{\partial y} < 0 \Rightarrow \frac{D\eta}{Dt} = \eta\,\frac{\partial v}{\partial y} < 0$$

Analogia: bailarino que muda a velocidade angular aproximando/afastando os brazos do eixo de rotação.

Reorientação de vorticidade

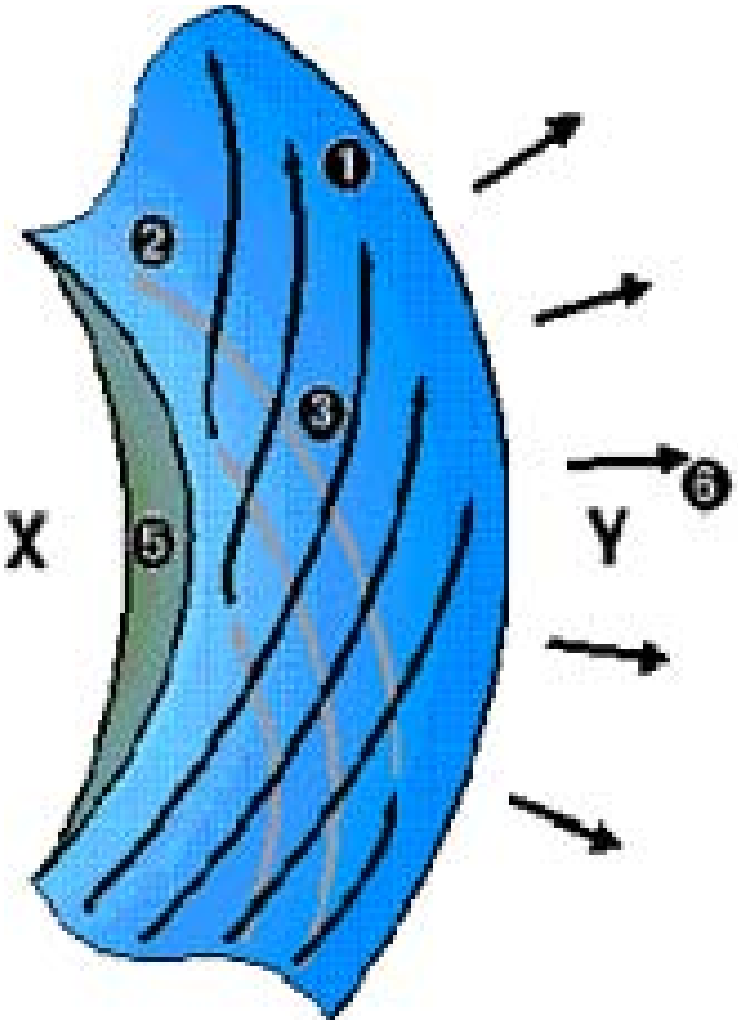


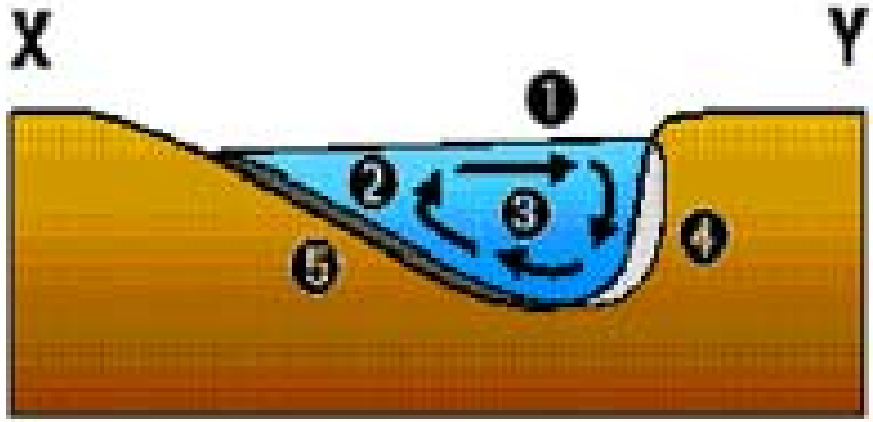
No escoamento turbulento perto da parede e como resultado de flutuações turbulentas, a componente de vorticidade normal à parede y pode ser diferente de zero (embora seu valor médio seja zero). Como consequência do forte gradiente $\frac{\partial u}{\partial y}$, as partículas de fluido são reorientadas, sendo gerada vorticidade na componente x:

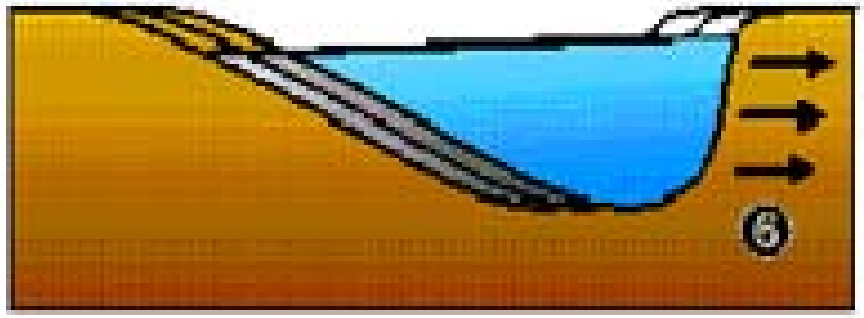
$$\frac{\partial u}{\partial y} > 0 \Rightarrow \frac{D\xi}{Dt} = \eta \frac{\partial u}{\partial y} > 0$$

Analogia: geração de velocidade angular em outra direção por mudança de direção do impulso angular de uma roda em rotação.

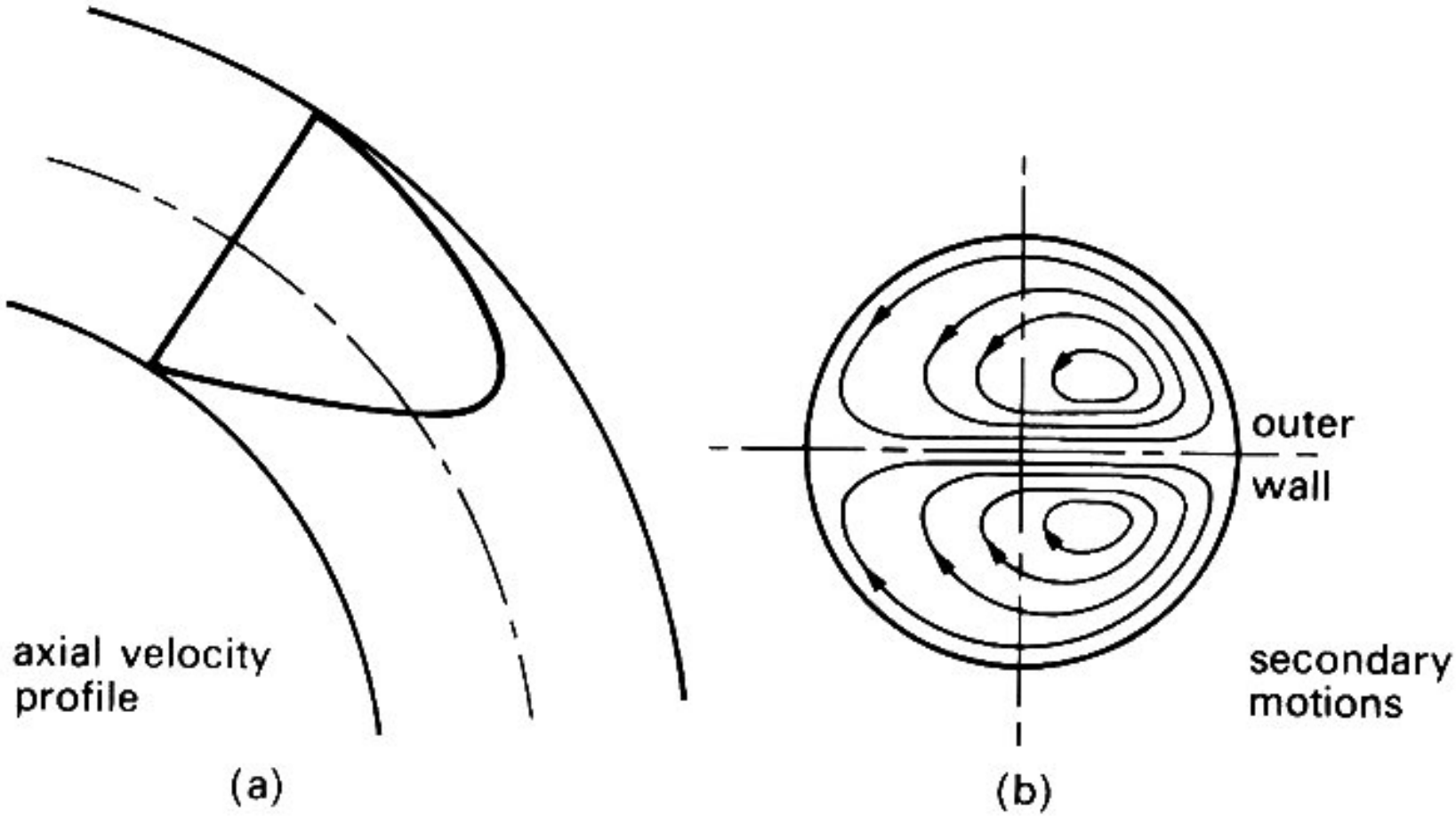
Meandro de um rio







Curva em duto



Rotação de sólido rígido (folhas de chá)

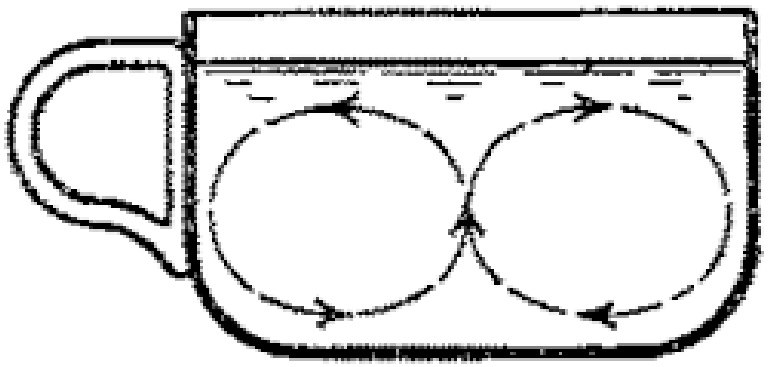
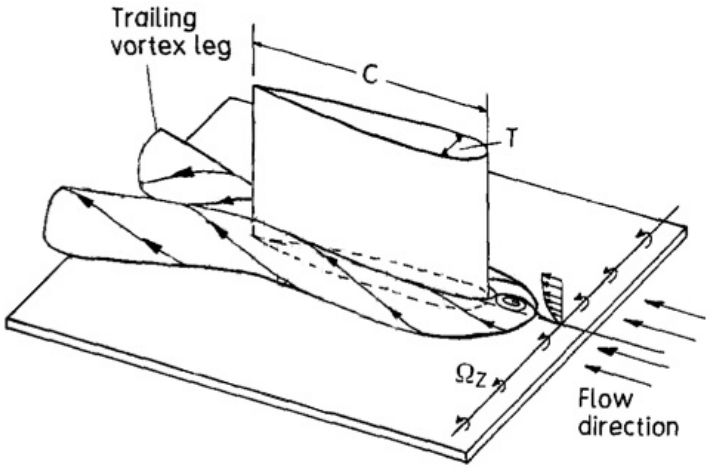


Fig. 1.

Rotação do sólido rígido (tornado)

Vórtice de ferradura (*horseshoe vortex*)