Algumas distribuições de variáveis aleatórias discretas importantes:

Distribuição Uniforme Discreta

Enquadram-se aqui as distribuições em que os possíveis valores da variável aleatória tenham todos a mesma probabilidade de ocorrência. Logo, se existem N valores possíveis, cada um terá probabilidade igual a 1/N.

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} = \mathbf{x}_i) = \frac{1}{\mathbf{N}}$$

Ex: Seja o lançamento de um dado e a variável aleatória X =“face superior do dado”, tem-se que: ou P(X=x) = 1/6

Distribuição de Bernoulli

Imagine um experimento aleatório que podem ocorrer dois possíveis resultados, “sucesso” e “fracasso”. Veja alguns exemplos:

- uma venda é efetuada ou não em uma ligação de call center;

- um cliente pode ser adimplente ou inadimplente;

- uma peça produzida por uma cia. pode ser perfeita ou defeituosa;

- um consumidor que entra numa loja pode comprar ou não comprar um produto;

- Lança-se uma moeda e observa-se se o resultado é cara ou coroa.

Associando-se uma variável aleatória X aos possíveis resultados do experimento, de forma que

X= 1 se o resultado for "sucesso",
X= 0 se o resultado for "fracasso".

Então, a variável aleatória X, assim definida, tem distribuição de Bernoulli, com **p** sendo a probabilidade de ocorrer **"sucesso"**, e **q = (1-p)** a probabilidade de ocorrer **"fracasso"**.

Distribuição de Bernoulli: $\mathbf{P(x)=\begin{cases} p & se \quad x=1 \\ 1\text{-}p & se \quad x=0 \end{cases}}$

Média: $\mathbf{\mu=p}$

Variância: $\mathbf{\sigma^2 = pq=p(1-p)}$

Desvio padrão: $\mathbf{\sigma = \sqrt{pq}=\sqrt{p(1-p)}}$

Podemos utilizar p como sendo a proporção de sucessos.

Exemplos:
-**Lançamento de uma moeda honesta:** podemos associar cara a sucesso e coroa a fracasso. Além de igualmente provável a distribuição de probabilidade é do tipo Bernoulli:

Distribuição de Bernoulli: $\mathbf{P(x)}=\begin{cases} 1/2 & \mathbf{se} \quad \mathbf{x=1} \\ 1/2 & \mathbf{se} \quad \mathbf{x=0} \end{cases}$

$\boldsymbol{\mu}=1/2 \qquad \boldsymbol{\sigma^2} = 1/4 \qquad \boldsymbol{\sigma} = 1/2$

- A experiência tem mostrado que durante as vendas de Natal, um cliente que entra em uma determinada loja tem 60% de chance de comprar um produto qualquer. Temos, portanto, uma probabilidade de sucesso X=1 **(o cliente adquirir um produto qualquer)** de 0,6 e uma probabilidade de não adquirir X=0 um produto de q = 1-p = 0,4. Neste caso p é a proporção das vezes que um cliente compra um produto.

Distribuição de Bernoulli: $\mathbf{P(x)}=\begin{cases} 0{,}6 & \mathbf{se} \quad \mathbf{x=1} \\ 0{,}4 & \mathbf{se} \quad \mathbf{x=0} \end{cases}$

$\boldsymbol{\mu}=0{,}6 \qquad \boldsymbol{\sigma^2} = 0{,}24 \qquad \boldsymbol{\sigma} = 0{,}4898$

Distribuição binomial

Para que uma situação possa se enquadrar em uma distribuição binomial, deve atender às seguintes condições:

- **são realizadas n repetições (tentativas, ensaios, provas) independentes;**

- **cada tentativa é um ensaio de Bernoulli, isto é, só podem ocorrer dois resultados possíveis, com probabilidades p e q=1-p;**

- **a probabilidade p de sucesso em cada ensaio é constante.**

Se uma situação atende a todas as condições acima, então a variável aleatória

X = número de sucessos obtidos nas n ensaios terá uma distribuição binomial, com n tentativas e p (probabilidade de sucesso).

Simbolicamente: X ~ B(n,p) A variável aleatória x tem distribuição binomial com n ensaios e uma probabilidade p de sucesso

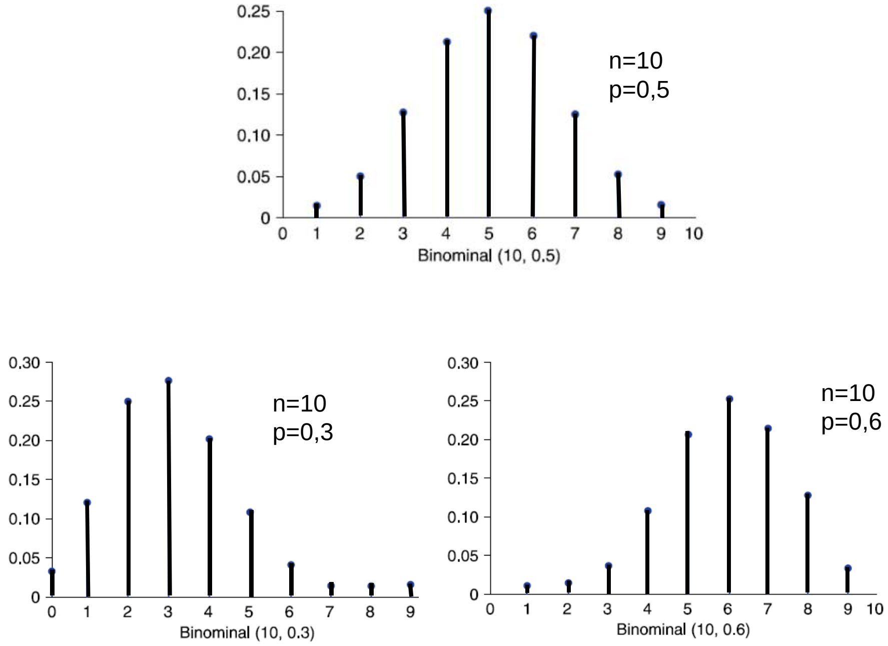
p : probabilidade de sucesso
q = 1- p : probabilidade de não sucesso
A distribuição de probabilidade da variável aleatória X = k sucessos, em n ensaios, é dada pela distribuição Binomial:

Distribuição Binomial: $P_n(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$

média: $\mu = np$

variância: $\sigma^2 = npq$

desvio padrão: $\sigma = \sqrt{npq}$



- Probabilidade de se obter valores maiores ou iguais ao valor observado

$$P_n(X \geq k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} (p)^i (1-p)^{n-i}$$

- Probabilidade de se obter valores menores ou iguais ao valor observado

$$P_n(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} (p)^i (1-p)^{n-i}$$

Exemplos

(1)No lançamento de uma moeda honesta 6 vezes sucessivamente:

(a) Qual a probabilidade de ocorrer 3 caras?
(b) Qual a probabilidade de ocorrer menos de 3 caras?
(c) Qual a probabilidade de ocorrer no máximo 3 caras?
(d) Qual a probabilidade de ocorrer no mínimo 3 caras?

Sucesso é representado pelo resultado cara.
Como a moeda é honesta p=0.5 e q=1-p=0.5
número de lançamentos da moeda: n=5
a probabilidade de ocorrência de k caras em n lançamentos é dado pela distribuição binomial

$$P_n(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

Temos:

$$(a)\ P_5(X=3)=\binom{5}{3}(0.5)^3\,(0.5)^{5-3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}(0.5)^3(0.5)^2$$

$$(b)\ P_5(X<3)=P(0)+P(1)+P(2)=\binom{5}{0}(0.5)^0\,(0.5)^{5-0}+\binom{5}{1}(0.5)^1\,(0.5)^{5-1}+\binom{5}{2}(0.5)^2\,(0.5)^{5-2}$$

$$(c)\ P_5(X\le 3)=P(0)+P(1)+P(2)+P(3)=\binom{5}{0}(0.5)^0\,(0.5)^{5-0}+\binom{5}{1}(0.5)^1\,(0.5)^{5-1}+\binom{5}{2}(0.5)^2\,(0.5)^{5-2}+\binom{5}{3}(0.5)^3\,(0.5)^{5-3}$$

$$(d)\ P_5(X\ge 3)=P(3)+P(4)+P(5)\quad \left(\text{ou } P_5(X\ge 3)=1-P_5(X<3)\right)$$

Completem as contas !!!

(2) Em um determinado processo de fabricação, 10% das peças produzidas são consideradas defeituosas. As peças são armazenadas em caixas com cinco unidades cada uma. Considere que cada peça tem a mesma probabilidade de ser defeituosa (como se houvesse repetição no experimento de retirar uma peça).

(a) Qual a probabilidade de haver exatamente três peças defeituosas numa caixa?
(b) Qual a probabilidade de haver duas ou mais peças defeituosas em uma caixa?
(c) Qual a probabilidade de uma caixa não apresentar peça defeituosa?
(d) Supondo que a empresa pague uma multa de R$ 10,00 por caixa que apresente peças defeituosas, qual o valor esperado desta multa em um lote de 1.000 caixas?

p = 0,1 é a probabilidade da peça ser defeituosa
q = 1-p = 0,9 é probabilidade da peça não ser defeituosa
Numa caixa temos 5 peças: n = 5
O problema é descrito por uma distribuição binomial onde X=k é o número de peças defeituosas

Temos:

$$(a)\, P_5(X=3) = \binom{5}{3}(0.1)^3(0.9)^{5-3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}(0.1)^3(0.9)^2$$

$$(b)\, P_5(X \geq 2) = 1 - P_5(X<2) = 1-(P(0)+P(1)) = 1-\binom{5}{0}(0.1)^0(0.9)^{5-0} - \binom{5}{1}(0.1)^1(0.9)^{5-1}$$

$$(c)\, P_5(X=0) = \binom{5}{0}(0.1)^0(0.9)^{5-0} = \frac{5!}{0!(5-0)!}(0.9)^5 = (0.9)^5 = 0{,}59049$$

(d) Neste item, temos uma nova variável aleatória Y = número de caixas com peças defeituosas . Então temos que calcular o a probabilidade de uma caixa ter peça defeituosa:

P(uma caixa ter peça defeituosa) =1-P(uma caixa não ter peça defeituosa)
= 1 - P(X=0) = 0, 4095

Então a nova variável Y: número de caixas com peças defeituosas, em um lote de 1.000 caixas, segue uma distribuição binomial com n = 1.000 e p = 0, 4095 e, portanto o valor esperado de Y será:

E(Y) = np = 1000.0,4095 = 409,5 caixas.

E a multa esperada:

Multa Esperada = 409,5. R$ 10,00 = R$ 4.095,00

Distribuição Hipergeométrica

- Relacionada com o número de sucessos em uma amostra contendo n observações – população finita de tamanho N
- Amostra retirada sem reposição
- Os resultados das observações são dependentes
- A probabilidade de sucesso varia de um experimento para outro
- probabilidade da variável aleatória X=k sucessos em uma amostra retirada de uma população com “r” sucessos

Fórmula da Distribuição Hipergeométrica

$$P(X=k)=\frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

onde

N = tamanho da população

r = número de sucessos na população

N – r = número de insucessos na população

n = tamanho da amostra

k = número de sucessos na amostra

n – k = número de insucessos na amostra

Propriedades da Distribuição Hipergeométrica

A média (valore sperado de X) da distribuição hipergeométrica é

$$\mu = np$$

onde p = r/N é a proporção de sucessos na população

e o desvio – padrão

$$\sigma=\sqrt{\frac{nr(N\text{-}r)}{N^2}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=\sqrt{np(1\text{-}p)}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

onde $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ *é chamado fator de "correção de população finita",*

que resulta a mostragem sem reposição, de uma população finita.

Quando N é grande comparado com n, a distribuição hipergeométrica de parâmetros n, N, p se aproxima da distribuição binomil com parâmetros n, p

Utilizando a Distribuição Hipergeométrica

Exemplo: Um departamento possui 10 computadores, dos quais 3 são verificados. 4 desses computadores possuem software ilegal. Qual a probabilidade de que 2 dos 3 computadores verificados tenham o softwrare ilegal?

N = 10 n = 3 r = 4 k = 2

$$\mathbf{P(X=2)} = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{(6)(6)}{120} = 0{,}3$$

A probabilidade de que 2 dos 3 computadores checados tenham o software ilegal é 0,30 ou 30%

Distribuição geométrica

V. A. X: número de tentativas independentes até obter um sucesso

F=falha S=sucesso, p=P(S) q=1-q

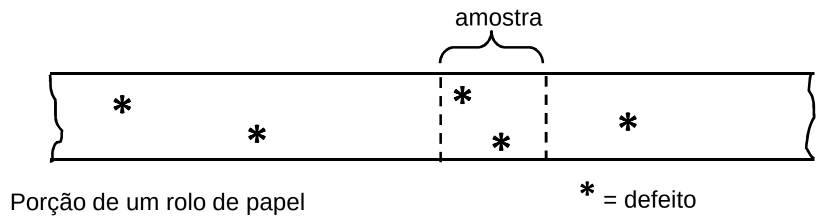
$$P[X=x] = P(\underbrace{F\ F\ F\ F....F}_{x-1}\ S) = q^{x-1}p \ , \quad x=1,2,3....$$

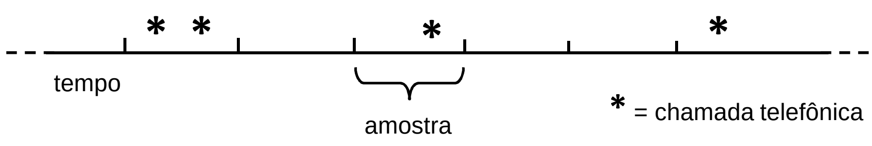
Média: $\mu = 1/p$

Variância: $\sigma^2 = q/p^2$

Distribuição de Poisson

- Aplicada quando:
  - Você estiver interessado em contar o número de vezes em que um evento específico ocorre em um determinado intervalo (de tempo, de comprrimento, de área, volume,…)
  - A probabilidade de que um evento específico ocorra em um determinado intervalo é a mesma para todas os intervalos
  - O número de eventos que ocorrem em um determinado intervalo é independente do número de eventos que ocorrem em outros intervalos
  - A probabilidade de que dois ou mais eventos venham a ocorrer em um determinado intervalo se aproxima de zero à medida que o intervalo se torna menor.





A distribuição de Poisson é útil para descrever o número de ocorrências num Intervalo contínuo (tempo, distância).

Ex: Defeitos por centímetro quadrado, acidentes por dia, vacas por acre,…

A variáve aleatória X = número de ocorrências é discreta, mas a unidade de medida é contínua. Não é possível contar o número de não ocorrências (número de defeitos que não ocorreram por centímetro quadrado, número de chamadas telefônicas que não foram feitas, etc,…)

- Chamadas telefônicas por unidade de tempo;
- Defeitos por unidade de área;
- Acidentes por unidade de tempo;
- Chegada de clientes a um supermercado por unidade de tempo;
- Número de glóbulos sangüíneos visíveis ao microscópio por unidade de área;
- Número de partículas emitidas por uma fonte de material radioativo por unidade de tempo.

Fórmula da Distribuição de Poisson

$$\boxed{P(X=k)=\frac{e^{-\mu}\mu^{k}}{k!}}$$

onde:

k = número de ocorrências (0, 1, 2, 3, 4, 5,..., ∞)

$\mu = \lambda$ t =número médio (valor esperado) de ocorrências no intervalo t

$\lambda =$ taxa média por unidade (de tempo, de distância, de área...)

t = número de unidades (de tempo, distância, área, volume,...)

e = 2,71828... (base dos logaritmos naturais)

A distribuição de Poisson pode ser um modelo probabilístico razoável de processos descritos na página anterior.

Probabilidade de k ocorrências: $P(X=k)=\dfrac{e^{-\mu}\mu^{k}}{k!}$

Valor esperado (média): $\mu = \lambda t$

Variância: $\sigma^2 = \mu$

Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\mu}$

Exemplo: enconte P(X = 2) se μ = 0,50

$$P(X=2)=\frac{e^{-\mu}\mu^{2}}{k!}=\frac{e^{-0,50}(0,50)^{2}}{2!}=0,0758$$

Exemplo: Trens chegam numa estação a uma razão de 3 trêns/hora. Observando a chegada de trens durante meia hora, qual a probabilidade de (a) não chegar nenhum trem (b) chegar 1 trem (c) chegar menos de 2 trens. Suponha que a chegada de trens possa ser descrtia por um processo de Poisson.

Temos: **Taxa de chegada: $\lambda = 3$ trens/hora**

intervalo de tempo: $t = 0,5$ h

média de chegadas: $\mu = \lambda t = 3 \,.\, 0,5 = 1,5$

$$P(X=k)=\frac{e^{-\mu}\mu^{k}}{k!}=\frac{e^{-1,5}(1,5)^{k}}{k!}$$

$$\text{(a) } P(X=0)=\frac{e^{-1,5}(1,5)^{0}}{0!}=0,223$$

$$\text{(b) } P(X=1)=\frac{e^{-1,5}(1,5)^{1}}{1!}=0,334$$

$$\text{(c) } P(X<2)=P(0)+P(1)=0,557$$

Temos: **Taxa de chegada:** $\lambda = 3$ **trens/hora**

intervalo de tempo: $t = 0{,}5$ **h**

média de chegadas: $\mu = \lambda t = 3 \,.\, 0{,}5 = 1{,}5$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} = \frac{e^{-1,5}(1{,}5)^k}{k!}$$

E portanto:

$$\text{(a) } P(X = 0) = \frac{e^{-1,5}(1{,}5)^0}{0!} = 0{,}223$$

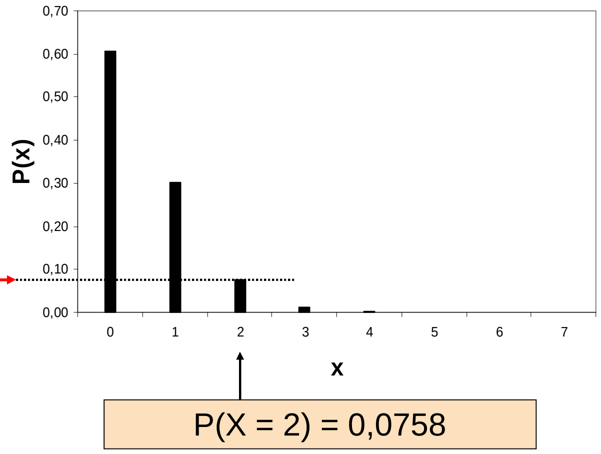
$$\text{(b) } P(X = 1) = \frac{e^{-1,5}(1{,}5)^1}{1!} = 0{,}334$$

$$\text{(c) } P(X < 2) = P(0) + P(1) = 0{,}557$$

Gráfico das Probabilidades de Poisson

λ = 0,50

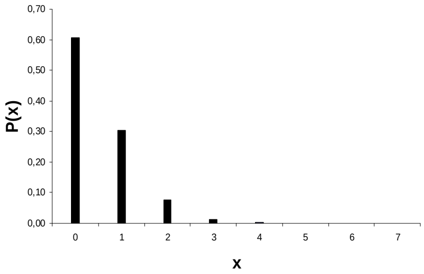
X	**λ = 0,50**
0	0,6065
1	0,3033
2	0,0758
3	0,0126
4	0,0016
5	0,0002
6	0,0000
7	0,0000



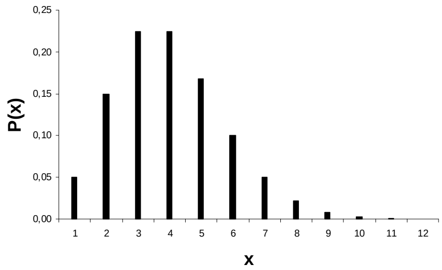
Forma da Distribuição de Poisson

- A forma da Distribuição de Poisson depende do parâmetro λ :

λ = 0,5



λ = 3



Comparação entre as distribuições Binomial e de Poisson:

	Binomial	**Poisson**
Resultados possíveis	Inteiros de 0 a n	Inteiros de 0 a $+\infty$
Observações	Contagem de sucessos ou falhas	Contagem de sucessos somente
parâmetros	n e p	μ

Aproximação da binomial pela poisson

Para um número muito grande de repetiçõe e probabilidade de sucesso pequena podemos calcular, ou seja, se n é grande e p pequeno de modo que np≤7, podemos calcular a probabilidade de sucessos aproximando a distribuição binomial pela distribuição de Poisson com μ = np.

Exemplo: Determinar a probabilidade de haver 4 peças defeituosa numa amostra de 300 peças, extraida de um grande lote onde há 2% de defeituosas:

temos uma distribuição binomial com $n = 300$ e $p = 0{,}02$. Assim,

$$P(X=4)=\frac{300!}{4!(300\text{-}4)!}(0{,}02)^4.(0{,}98)^{296}$$ **dureza fazer esse calculo!!!**

mas temos uma situação em que n é grande e p pequeno, portanto podemos aproximar a distribuição binomial por uma distribuição de Poisson com $\mu = np = 300.0{,}02 = 6$.

$$P(X=4)=\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}=\frac{6^4 e^{-6}}{4!}=0{,}135$$ **(mais fácil de calcular)**

Tabela resumo

Modelo	$P(X=k)$	parâmetros	E(X)	Var(X)
Bernoulli	$p^k(1-p)^{1-k}, k=0,1$	p	p	p(1-p)
Binomial	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-p}, k=0,1,2...,n$	n, p	np	np(1-p)
Poisson	$\frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2,...,\infty$	μ	μ	μ
Hipergeométrica	$\frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, $k = 0, 1, 2,...$	N, r, n	$\frac{nr}{N}$	$\frac{nr}{N}\left(1-\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$