PME-2350 – MECÂNICA DOS SÓLIDOS II

AULA #1: FUNÇÕES DE MACAULAY[1]

1.1 Motivação e objetivos

Na análise estática de estruturas formadas por vigas deseja-se conhecer, além das tensões e deformações nos pontos mais solicitados, os deslocamentos transversais ao longo do eixo central decorrentes do carregamento aplicado à viga. Em geral, isto pode ser feito através da integração da E.D.O. de 2ª ordem (que relaciona a distribuição de momentos fletores nas seções, $M(x)$, com a distribuição de curvaturas medidas ao longo do eixo central, $\kappa(x) \cong v''(x)$) ou da E.D.O. de 4ª ordem (que relaciona a distribuição de carregamento distribuído ao longo do eixo central, $q(x)$, com a derivada de 4ª ordem da função $v(x)$, que fornece os deslocamentos transversais em cada ponto do eixo). As duas formas levam, naturalmente, ao mesmo resultado final, ficando a escolha a cargo do projetista. Os pontos positivos e negativos relacionadas a cada uma destas escolhas são:

Opção 1: Integração da E.D.O. de 2ª ordem

$$EI.v''(x) = M(x)$$

Ponto positivo: sendo uma E.D.O. de menor ordem, são necessárias menos integrações para obter $v(x)$ e menos condições de contorno para obter as duas únicas constantes de integração.

Ponto negativo: a determinação da expressão correta da distribuição de momentos fletores pode ser de difícil obtenção (dependendo da forma como o carregamento está aplicado).

Opção 2: Integração da E.D.O. de 4ª ordem

$$EI.\frac{d^4v(x)}{dx^4} = -q(x)$$

Ponto negativo: sendo uma E.D.O. de maior ordem, são necessárias mais integrações para obter $v(x)$ e mais condições de contorno para obter as quatro constantes de integração.

Ponto positivo: a determinação da expressão correta da distribuição do carregamento distribuído é, em geral, mais simples do que a determinação da distribuição de momentos fletores (isto também depende da forma como o carregamento está aplicado).

[1] Notas de Aula preparadas pelo Prof. Dr. Roberto Ramos Jr., email: rramosjr@usp.br

Para explicar melhor a necessidade do uso das funções de Macaulay (ou das funções de singularidade, a serem estudadas em outra oportunidade), consideremos a viga biapoiada de comprimento total L e rigidez flexional EI constante submetida aos carregamentos indicados na Fig. 1.

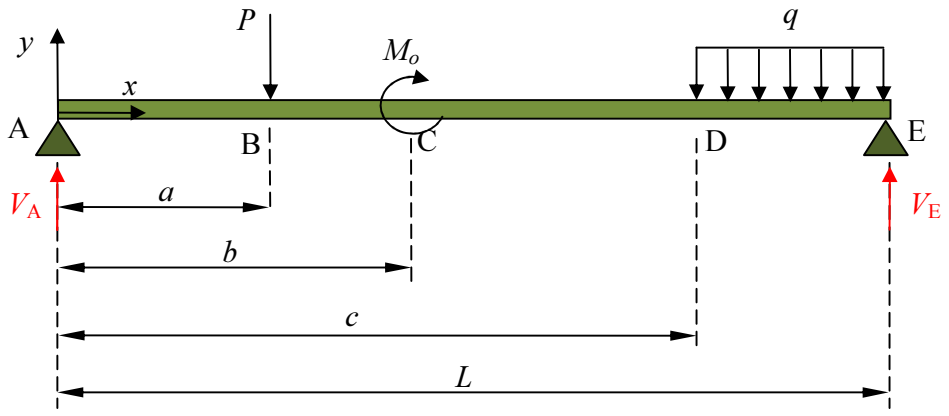

Fig. 1 Viga submetida a diversos tipos de carregamento

É evidente que a cada inserção de um novo carregamento (ou retirada do mesmo, no caso de carregamentos distribuídos) há uma correspondente alteração na expressão do momento fletor no trecho que segue logo após a introdução (ou retirada) deste carregamento. Desta forma, para a viga submetida ao carregamento indicado na Fig.1, teríamos um total de quatro trechos a serem analisados: AB, BC, CD e DE, com as respectivas expressões de momento fletor dadas por:

Trecho 1 (AB): $M_1(x) = V_A x \ , \quad 0 \leq x \leq a$

Trecho 2 (BC): $M_2(x) = V_A x - P(x-a) \ , \quad a \leq x \leq b$

Trecho 3 (CD): $M_3(x) = V_A x - P(x-a) + M_o \ , \quad b \leq x \leq c$

Trecho 4 (DE): $M_4(x) = V_A x - P(x-a) + M_o - \frac{1}{2} q (x-c)^2 \ , \quad c \leq x \leq L$

Naturalmente, a cada nova expressão do momento fletor (em cada um dos quatro trechos considerados) está associada uma expressão correspondente para a linha elástica da viga (naquele trecho), a qual poderia ser obtida pela integração de:

$$EI.v_j''(x) = M_j(x) \quad , \quad (1 \leq j \leq 4)$$

o que levaria à necessidade de determinação de oito constantes de integração (duas para cada trecho), as quais devem ser obtidas pela solução do sistema linear de oito equações algébricas indicado a seguir:

Eq.(1): $v_1(0) = 0$ (deslocamento transversal nulo em A);

Eq.(2): $v_1(a) = v_2(a)$ (compatibilidade de deslocamentos em B);

Eq.(3): $v_1'(a) = v_2'(a)$ (compatibilidade de rotações em B);

Eq.(4): $v_2(b) = v_3(b)$ (compatibilidade de deslocamentos em C);

Eq.(5): $v_2'(b) = v_3'(b)$ (compatibilidade de rotações em C);

Eq.(6): $v_3(c) = v_4(c)$ (compatibilidade de deslocamentos em D);

Eq.(7): $v_3'(c) = v_4'(c)$ (compatibilidade de rotações em D);

Eq.(8): $v_4(L) = 0$ (deslocamento transversal nulo em E);

Mesmo tratando-se da solução de um sistema linear, é notório que o esforço depreendido para resolver um problema simples como o apresentado é demasiado. Contudo, com o uso das funções de Macaulay ou de outras funções de singularidade (delta de Dirac, Heaviside, dipolo unitário), é possível expressar seja a distribuição de carregamento seja a de momento fletor numa única expressão, facilitando a análise estrutural de forma significativa. A seguir serão apresentadas as funções de Macaulay.

1.2 As funções de Macaulay

Seja $0 < a < L$, e n um número natural qualquer (n = 0, 1, 2, ...). Consideremos a função $\langle x - a \rangle^n$ definida no intervalo aberto (0, L) por:

$$\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0\ , & se \quad 0 < x < a \\ & e \\ (x-a)^n, & se\ a < x < L \end{cases}$$

Percebe-se, claramente, que o uso dos símbolos $\langle \quad \rangle$, empregados por Macaulay para representar as singularidades decorrentes de descontinuidades no carregamento aplicado em vigas, nada mais faz do que tornar nula a função $(x - a)^n$ antes do ponto de singularidade ($x = a$), mantendo a função inalterada após este mesmo ponto, conforme ilustra a Fig.2.

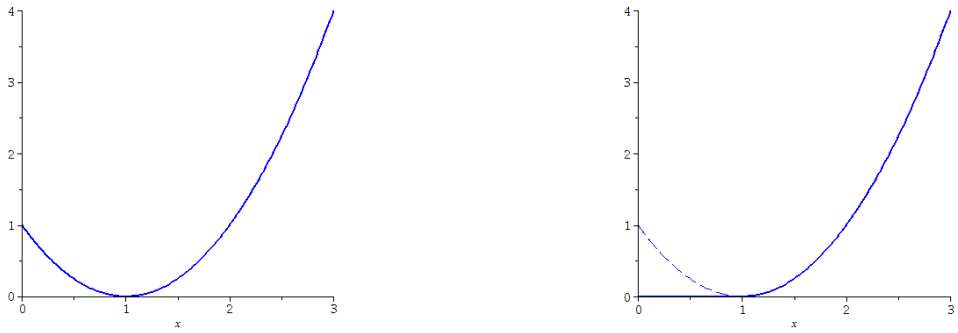

Fig. 2 Exemplo com a função de Macaulay: $(x-1)^2$ (à esq.) ; $\langle x-1\rangle^2$, (à dir).

Verifica-se de imediato que a integral indefinida da função $\langle x-a\rangle^n$ fica dada por:

$$\int \langle x-a\rangle^n dx = \frac{\langle x-a\rangle^{n+1}}{n+1} + C$$

Onde C é uma constante de integração a ser determinada.

1.3 Exemplos de aplicação da função de Macaulay na análise de vigas

a) Momento concentrado aplicado em $x = a$:

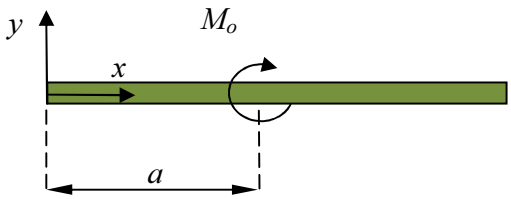

Fig. 3 Momento concentrado em $x = a$

Para o carregamento decorrente de um momento concentrado aplicado em $x = a$, a parcela do momento fletor total <u>devida unicamente a este momento</u> de magnitude M_o é dada por:

$$M(x) = M_o\langle x-a\rangle^0 = \begin{cases} 0, & se\ \ 0 < x < a \\ & e \\ M_o, & se\ \ a < x < L \end{cases}$$

b) Força concentrada aplicada em $x = a$:

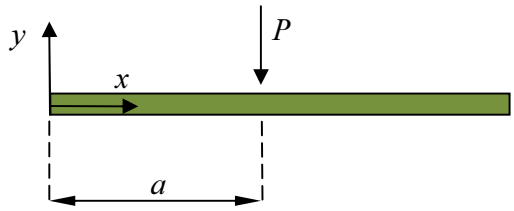

Fig. 4 Força concentrada em $x = a$

Para o carregamento decorrente de uma força concentrada aplicada em $x = a$, a parcela do momento fletor total <u>devida unicamente a esta força</u> de magnitude P é dada por:

$$M(x) = -P\langle x-a\rangle^1 = \begin{cases} 0, & se \;\; 0 < x < a \\ & e \\ -P(x-a), & se \;\; a < x < L \end{cases}$$

c) Carregamento uniformemente distribuído no intervalo $a \leq x \leq L$ (até o final da viga):

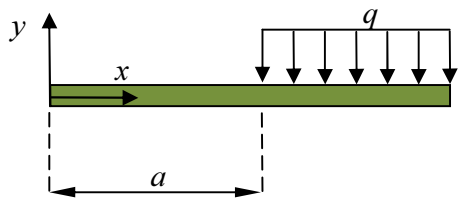

Fig. 5 Carregamento uniforme no trecho $a \leq x \leq L$

Para um carregamento uniformemente distribuído de intensidade q (em N/m, no S.I.), aplicado no intervalo $a \leq x \leq L$ (ou seja, <u>até o final da viga</u>), a parcela do momento fletor total <u>devida unicamente a este carregamento</u> é dada por:

$$M(x) = -\frac{q}{2}\langle x-a\rangle^2 = \begin{cases} 0, & se \;\; 0 < x < a \\ & e \\ -\frac{q}{2}(x-a)^2, & se \;\; a < x < L \end{cases}$$

d) Carregamento linearmente distribuído no intervalo $a \leq x \leq L$ (até o final da viga):

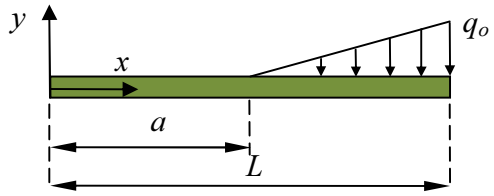

Fig. 6 Carregamento linearmente distribuído no trecho $a \leq x \leq L$

Para um carregamento linearmente distribuído de intensidade máxima q_o (em N/m, no S.I.), aplicado no intervalo $a \leq x \leq L$ (ou seja, <u>até o final da viga</u>), a parcela do momento fletor total <u>devida unicamente a este carregamento</u> é dada por:

$$M(x) = -\frac{\beta}{6}\langle x-a\rangle^3 = \begin{cases} 0, & se\ \ 0 < x < a \\ & e \\ -\frac{\beta}{6}(x-a)^3, & se\ \ a < x < L \end{cases}$$

Onde $\beta = \frac{q_o}{L-a}$ é declividade angular do carregamento linearmente distribuído (expressa em N/m^2).

1.4 <u>Exemplo de aplicação completo</u>

A viga ABCD indicada na Fig. 7 encontra-se simplesmente apoiada em B e D, estando rigidamente conectada a um suporte CEF, em cuja extremidade atua uma força vertical *P*. Pede-se:

a) obter a linha elástica da viga ABCD utilizando as funções de Macaulay, partindo da equação diferencial de 2ª ordem que estabelece a relação entre a curvatura e o momento fletor na viga. Utilize os eixos indicados e expresse a resposta apenas em função dos parâmetros dados;

b) obter o deslocamento vertical na seção A e estabelecer as condições em que tal deslocamento é para cima.

Dados: *P, l, a, EI.*

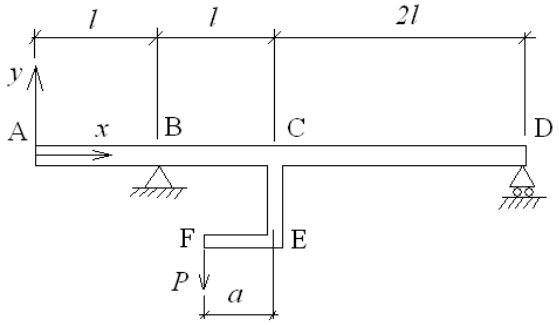

Fig. 7 Viga ABCD com carregamento transversal

Solução:

a) Pelas equações da estática determinam-se as reações nos apoios B e D:

$$V_B = \frac{Pa}{3.l} + \frac{2P}{3} \qquad\qquad V_D = \frac{P}{3} - \frac{P.a}{3.l}$$

(ambas, V_B e V_D, orientadas para cima).

Da relação (momento fletor) × (curvatura) temos:

$$EI.v''(x) = M(x) = V_B.\langle x-l\rangle - M_C.\langle x-2l\rangle^0 - P.\langle x-2l\rangle$$

onde:

$M_C = P.a$ (momento em C, devido ao transporte da força P)

Integrando duas vezes, virá:

$$EI.v(x) = \frac{V_B}{6}.\langle x-l\rangle^3 - \frac{M_C}{2}.\langle x-2l\rangle^2 - \frac{P}{6}.\langle x-2l\rangle^3 + C_1.x + C_2$$

onde as constantes de integração são obtidas através das condições de contorno que são:

i) $v(l) = 0$

ii) $v(4l) = 0$

resultando, finalmente:

$$v(x) = \frac{P}{EI}.\left[\left(\frac{a}{18.l} + \frac{1}{9}\right).\langle x-l\rangle^3 - \frac{a}{2}.\langle x-2l\rangle^2 - \frac{1}{6}.\langle x-2l\rangle^3 + lx.\left(\frac{a}{6} - \frac{5.l}{9}\right) + \frac{5.l^3}{9} - \frac{a.l^2}{6}\right]$$

b) Para $x = 0$, teremos;

$$\delta_{V,A} = v(0) = \frac{P}{EI}.\left[\frac{5.l^3}{9} - \frac{a.l^2}{6}\right]$$

Assim: $\delta_{V,A} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < \frac{10.l}{3}$

1.5 Apêndice 1: Convenção de sinais

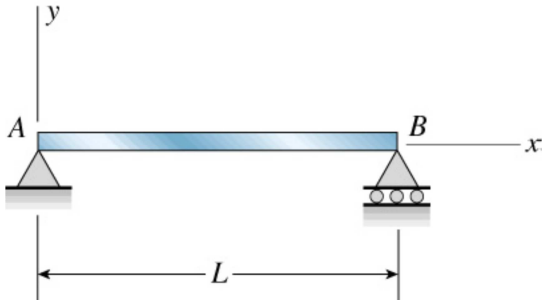

Fig. 8 Convenção de orientação para os eixos coordenados

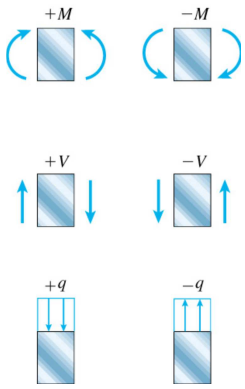

Fig. 9 Convenção de sinais para os esforços solicitantes e carregamentos

1.6 Apêndice 2: Equações úteis para a análise de uma viga

a) Relação entre momento fletor e curvatura:

Considerando o seguinte conjunto de hipóteses:

i. Material elástico-linear;
ii. Seções transversais planas permanecem planas;
iii. Linearidade geométrica.

Chega-se à seguinte equação constitutiva:

$$M(x) = EI.\kappa(x)$$

Em que $\kappa(x)$ é a curvatura do eixo central da viga ($\kappa(x) = {}^{1}/_{\rho(x)}$, sendo $\rho(x)$ o raio de curvatura local). Pode-se verificar que a expressão exata da curvatura $\kappa(x)$ é dada por:

$$\kappa(x) = \frac{v''(x)}{[1 + (v'(x))^2]^{3/2}}$$

Porém, considerando novamente a hipótese de linearidade geométrica, temos de forma aproximada:

$$\kappa(x) \cong v''(x)$$

Obtendo-se a equação diferencial ordinária linear de segunda ordem abaixo:

$$EI\, v''(x) = M(x)$$

b) <u>Equações diferenciais de equilíbrio:</u>

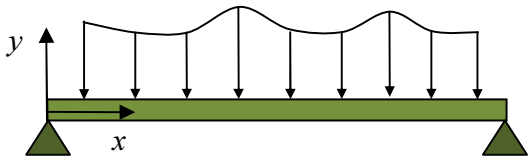

Fig. 10 Viga sob carregamento transversal genérico

Da aplicação do equilíbrio de forças na direção vertical (direção *y*):

$$\frac{dV(x)}{dx} = -q(x).$$

Da aplicação do equilíbrio de momentos:

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x).$$

Combinando as equações acima, chega-se a:

$$EI\frac{d^4v(x)}{dx^4} = -q(x).$$