Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" - ESALQ
Disciplina: LCE0120 Cálculo I
Prof. Idemauro Antonio Rodrigues de Lara

2^a lista de exercícios - Fundamentos

1. Resolva as equações exponenciais a seguir.

   a. $2^{x^2+1} = 2^{3x-1}$

   b. $3^{2x-1} = \dfrac{1}{3}$

   c. $(2^x)^x = 16$

   d. $2.4^x - 3.9^x = 0$

   e. $5^{x-1} = \sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{25}}{5\sqrt{25}}}$

   f. $25^x - 30.5^x + 125 = 0$

   Resp.: a. $\{1; 2\}$ b. $\{0\}$ c. $\{-2; 2\}$ d. $\{-\frac{1}{2}\}$ e. $\{\frac{1}{3}\}$ f. $\{1; 2\}$

2. Considere a função exponencial generalizada $y = a.b^{cx}$, com $b > 1$. Explique o significado geométrico dos parâmetros a e c do modelo. Obtenha sua função inversa e explique matematicamente o significado da restrição $c \neq 0$.

3. Construa no mesmo eixo cartesiano o gráfico de cada uma das funções a seguir.

   a. $f(x) = 3^x$; $g(x) = 3^{3x}$ e $h(x) = 3.3^x$

   b. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}$ e $h(x) = 2.\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

4. Dadas as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2 - 2x$, calcule $f(g(-1))$ e $g(f(-1))$.

   Resp. 8 e $-\frac{3}{4}$

5. (Aplicação) Numa cultura de bactérias existem inicialmente 1000 bactérias presentes e a quantidade após t minutos é $N(t) = 1000.3^{0,7t}$. Construa uma representação gráfica desse crescimento exponencial. Verifique que em 10 minutos a quantidade de bactérias será superior a 2.000.000.

6. Suponha que um distribuidor de vinho possua uma quantidade dada desse produto, que pode ser vendida no presente por um preço R$$k, 00$ ou pode ser estocada por um período de tempo variável e, então, vendida por um preço maior. Suponha que o valor crescente do vinho seja dado pela equação $V = k \exp^{\sqrt{t}}$, sendo V o preço de venda; $\exp = e$ a base natural e t o tempo variável de estocagem. Mostre que quando o tempo de estocagem é zero o preço de venda é K. Calcule o tempo necessário de armazenamento para que o preço de venda seja $4k$ (Adaptado de Chiang, pág. 272).

7. Calcule os valores dos logaritmos a seguir

   a. $\log_2 32$ b. $\log_2 0,25$ c. $\log_{0,5} 8\sqrt{2}$ d. $\log_5 1$ e. $\log_{\frac{9}{4}} \frac{2}{3}$

   Resp. a. 5 b. -2 c. $-3,5$ d. 0 e. $-0,5$

8. Sabendo-se que $\log_{10} 2 = 0,3010$ e $\log_{10} 3 = 0,4771$, calcule:

   a. $\log_{10} 6$ b. $\log_{10} 1,5$ c. $\log_{10} 5\sqrt{2}$ d. $\log_{10} 72$

   Resp. a. $0,7781$ b. $0,1760$ c. $0,8494$ d. $1,8573$

9. Resolver as equações logaritmicas a seguir.

   a. $\log_3(2x+7) = 1$

   b. $\ln(3x^2 - 1) = \ln(x-1)$

   c. $\log_2(x-2) - \log_4(2x-3) = 1$

   d. $\log_2(\log_2 x) = 0$

   Resp. a. $S = \{-2\}$ b. $S = \emptyset$ c. $S = \{\frac{12+\sqrt{80}}{2}\}$ d. 2

10. Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações a seguir.

a. $5^x > 25$	Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
b. $4^x \leq 3^x$	Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
c. $3^{2x} - 4.3^x + 3 \geq 0$	Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1\}$
d. $1 \leq 10^x \leq 100$	Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$
e. $\log(3x-2) \geq \log(x+4)$	Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$
f. $\log_2 x - \log_4(x - 3/4) \geq 1$	Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$
g. $3\log x - \dfrac{\log x}{2} \leq 5$	Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 100\}$
g. $(\log x)^2 - 3\log x + 2 > 0$	Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10 \text{ ou } x > 100\}$

11. Encontre o domínio para cada uma das funções a seguir.

    a. $y = \dfrac{1}{2^x - 1}$

    b. $y = \sqrt{2^{x^2} - 1}$

    c. $y = \log(x^2 - 5x + 6)$

    d. $y = \log_x(2x - 1)$

    Resp. a. $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ b. $D(f) = \mathbb{R}$ c. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

    d. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1/2 \text{ e } x \neq 1\}$

12. (Aplicação) O número $-\log_b a$ é denominado cologaritmo de a na base b. Em Química, ele é usado para definir o pH de uma solução. Sendo assim, o número pH = colog$[H^+]$ representa a concentração de íons de hidrogênio em uma solução. Essa medida serve para categorizar a solução em ácida (se pH < 7), básica (se pH > 7) ou neutra (pH $= 7$). Suponha que em uma solução obteve-se $[H^+] = 2,0 \times 10^{-8}$. Classifique a solução de acordo com seu pH.

13. Construa o gráfico das funções a seguir.

    a. $y = \log_3 x$ b. $y = \log_{1/5} x$ c. $y = \log_4(x-1)$ d. $y = \log_x(x^2)$

14. Considere $\alpha = 135^o$. Represente o arco correspondente no ciclo trigonométrico e calcule seno, cosseno, tangente, cotangente, secante, cossecante de α.

15. Considere $\beta = -\frac{4\pi}{3}$. Represente o arco correspondente no ciclo trigonométrico e calcule seno, cosseno, tangente, cotangente, secante, cossecante de β.

16. Calcule

    a. $\arccos 0$ b. $\text{arctg}\, 1$ c. $\text{arcsen}\, 1$ b. $\text{arctg}\, 0$

17. Demonstre as identidades:

    a. $\text{sen}^4 x = 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$

    b. $\dfrac{\text{tg} x}{1 + \text{tg}^2 x} = \text{sen} x \cos x$

    c. $(\sec x + \text{tg} x)(\sec x - \text{tg} x) = 1$

    d. $\dfrac{\sec x - \text{cossec} x}{\sec x + \text{cossec} x} = \dfrac{\text{tg} x - 1}{\text{tg} x + 1}$

18. Na Trigonometria as identidades:

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha \quad (1)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta \quad (2)$$

$$\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\beta\cos\alpha \quad (3)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta \quad (4)$$

    são conhecidas como seno e cosseno da soma e da diferença. Usando as relações 1 a 4, desenvolva

    a. $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ b. $\cos(\pi - x)$ c. $\text{sen}\,(\pi + x)$ d. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

19. Considere $\alpha = 105^o$. Calcule seno, cosseno, tangente, cotangente, secante, cossecante de α.

20. Considere as seguintes identidades envolvendo multiplicação de arcos

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha \quad (5)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha \quad (6)$$

$$\text{tg}(2\alpha) = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} \quad (7)$$

    a. Sabendo-se que $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{12}}{12}$, calcule $\cos 2\alpha$.

    b. Se $\text{cotg}\,\alpha = -4$, calcule $\text{tg}\,2\,\alpha$.

    c. Demonstre a identidade $(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \text{sen}(2\alpha)$

21. Nas funções trigonométricas a seguir, identifique o domínio, conjunto imagem e período. Represente graficamente.

    a. $f(x) = 3 \operatorname{sen} x$ b. $f(x) = 1 + \cos x$ c. $f(x) = \operatorname{cotg} x$ d. $f(x) = \operatorname{tg} 2x$

22. Estude a paridade das funções a seguir.

    a. $f(x) = x \cos x$ b. $x \operatorname{sen} x + 4$ c. $f(x) = \operatorname{tg} x$ d. $f(x) = \sec x$

23. Resolver as equações:

    a. $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ Resp.: $\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ ou } \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

    b. $\operatorname{sen}^2 x - 1 - \cos x = 0,\ \ 0 \leq x \leq 2\pi$ Resp.: $\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$

    c. $\operatorname{tg} x = 1,\ \ 0 \leq x \leq 4\pi$ Resp.: $\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}\}$

    d. $2\operatorname{sen} x - \operatorname{cossec} x = 1,\ \ 0 \leq x \leq 2\pi$ Resp.: $\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$

    e. $\operatorname{cossec}^2 x = 1 - \operatorname{cotg} x,\ \ 0 \leq x \leq 2\pi$ Resp.: $\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\}$

    f. $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ Resp.: $\{x \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \text{ ou } \ x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

    g. $\operatorname{tg} x = 1$ Resp.: $\{x \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

    h. $\operatorname{sen} 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Resp.: $\{x \mid x = \frac{\pi}{8} + k\pi \ \text{ ou } \ x = \frac{3\pi}{8} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$