Aula 01 - 06.03.2016 - Terça

Eduardo Colli
cálculo numérico - MAP0151

-> colli@ime.usp.br
-> Tudo via Stoa

.PDF
colli/Asana

TÓPICOS PRINCIPAIS

* Interpolações polinomial e splines cúbicos

DESENHO

* mínimos quadrados - análise harmônica
* integração numérica -> comprimento da curva
* Zeros de funções -> diâmetro da curva

Curva no espaço

-> parametrização

$$\underbrace{t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))}_{\text{função : Dom: } \mathbb{R} \text{, contra: } \mathbb{R}^3}, \quad t \in [0, M]$$

-> Tarefa: desenhar $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ separadamente

- Sobre os nós: faça uma escala da curva

média

A - P_1, P_2, Sub
B - PCOC
C - Nó
D - Exercício

$$\sqrt[20]{A^{10} \cdot B^{4} \cdot C^{5} \cdot D}$$

↳ SOFTWARES .OCTAVE
.BLENDER 2.78c

Aula 02 - 10.03.2016 - Sexta

coord x : valores da parametrização (t) tais que x(t) tem pto crítico

*

t	pts críticos e inter. de x(t)
0	5,0
0,5	4,5 C
1	4,5
2	7
3	12,7
4	15,5 C
4,5	15,2 C
5,4	16,6 C
6	14,3
~~7~~ 6,8	9,5 ~~C~~
8	4,5 C
9	8
9,5	8,7 C
10	8,2
11	5
12	1,5 C
13	5,2
14	10,1
15	13,6
16,1	18,3 C
17	14,5
17,4	12,5
18	11
19,8	7,5

4,5 15,8
5,4 17
8

**

t	pts críticos e inter. de y(t)
0	18
1	12,5
1,3	11,5 C
2	14,5
3,2	8 C
4	15,1
5	9,5
5,6	6,5 C
6,8	9,3 C
8	5,5
8,2	3,5 C
9	5
10	10,5
11,1	14,5 C
12	10
13	6,5
14	4,5 C
15	7,5
16	11,6
17	15,5 C
18	17,3
18,8	19,5 C

***

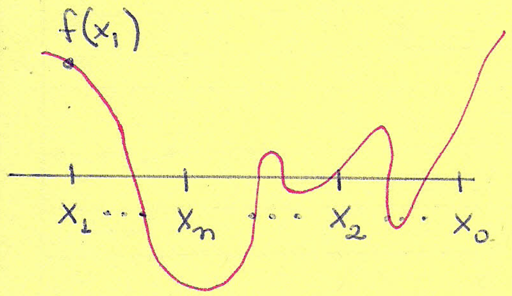
t	ptos críticos e intermediários de z(t)

Aula 03 - 14.03.2017 - Terça

Interpolação polinomial

→ Problema: dada a tabela

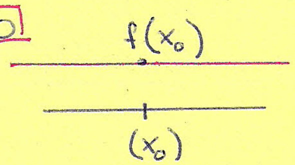
	0	1	2	...	n
x_i	x_0	x_1	x_2		x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_n)$



- Problema - Encontrar polinômio p t.q. $p(x_i) = f(x_i), \forall i = 0, \dots, n$

- Exemplo $\boxed{n=0}$

1 ponto: x_0

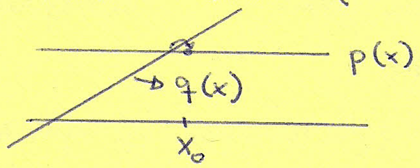


Queremos p. tal que $p(x_0) = f(x_0)$

$p(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{cte}}$ grau zero

→ Como mostrar que esse exemplo tem infinitas soluções

$q(x) = f(x_0) + (x - x_0)$



ou ainda

$q(x) = \underbrace{f(x_0)}_{p(x)} + \underline{m}\,(x - x_0), m \in \mathbb{R}$

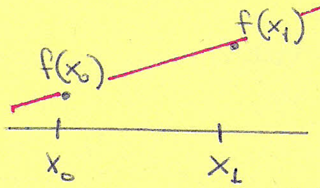
→ Em particular, como há infinitas escolhas de m, então há infinitos polinômios interpoladores p/ esse problema

OU AINDA

$q(x) = f(x_0) + (x - x_0)\underbrace{r(x)}_{\text{qualquer polinômio}}$

obs:. Só há uma solução de grau zero. Grau maior, há infinitas

$\boxed{n=1}$



- grau zero: não dá, a não ser que $f(x_0) = f(x_1)$.
- grau ≤ 1: tem única solução
- grau ≤ 2: $q(x) = p(x) + c\underbrace{(x - x_0)(x - x_1)}_{\text{anula em } x_0 \text{ e } x_1}$

∴ infinitas soluções ↓ cte

$P_n = \{\text{POLINÔMIO DE GRAU} \leq n\}$

$= \{p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n;\ a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$

~ espaço vetorial ~

↳ de dimensão $n+1$

TEOREMA: Existe um única polinômio p de P_n que interpola f nos pontos $x_0, \dots, x_n$.

- nome dele

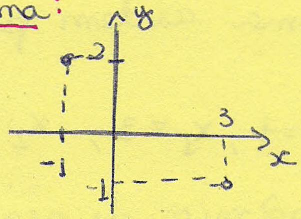
$P_f[x_0, x_1, \dots x_n]$. Se eu quiser colocar como função de x,

$P_f[x_0, \dots, x_n](x) = \dots$

→ Problema:

TABELA

-1	2
3	-1



Quero achar $p_f[-1,3] = p$.

1° MODO: Sistema linear $p(x) = a_0 + a_1 x$

incógnitas

(I) $p(-1) = 2$ e $p(3) = -1$

(II) $\begin{cases} a_0 - a_1 = 2 \\ a_0 + 3a_1 = -1 \end{cases}$ $a_1 = -\frac{3}{4}$ e $a_0 = \frac{5}{4}$

$P(x) = \frac{5}{4} - \frac{3}{4}x$

2° MODO: $L_0, L_1 \in P_1$ $L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0$

$L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1$

(I) $p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$

$p(x_0) = f(x_0)\underbrace{L_0(x_0)}_{1} + f(x_1)\underbrace{L_1(x_0)}_{0}$

$P(x_0) = f(x_0)$

(II) $p(x_1) = f(x_0)\underbrace{L_0(x_1)}_{0} + f(x_1)\underbrace{L_1(x_1)}_{1}$

$P(x_1) = f(x_1)$ INTERPOLA!!

(III) $L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$ e $L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

- No exemplo:

. $L_0(x) = \frac{x-3}{(-4)} = -\frac{x}{4} + \frac{3}{4}$

. $L_1(x) = \frac{x+1}{4} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$

$p(x) = \underbrace{2}_{f(x_0)} \underbrace{\left(-\frac{x}{4} + \frac{3}{4}\right)}_{L_0(x)} + \underbrace{(-1)}_{f(x_1)} \underbrace{\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{L_1(x)}$

$= -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

$\boxed{\text{Li's; polinômios de Lagrange}}$

3° MODO: Começa com $q \in P_0$, que interpola um ponto a menos

(I) $q = P_f[-1]$

$q(x) = 2$ (constante)

(II) $P(x) = q(x) + \underline{c}\,(x+1)$ → se anula em $x_0 = -1$

procurado

(III) Quem é c? Sai pela equação

$p(3) = -1$

$P(3) = q(3) + c(3+1) = -1$

$c = -\frac{3}{4}$ $\boxed{P(x) = 2 - \frac{3}{4}(x+1)}$

Aula 04 - 17.03.2017 - Sexta

Interpolação polinomial

→ Exemplo da aula passada

x_i	-1	3	1
$f(x_i)$	2	-1	-2

→ 3 maneiras

1) Sistema linear

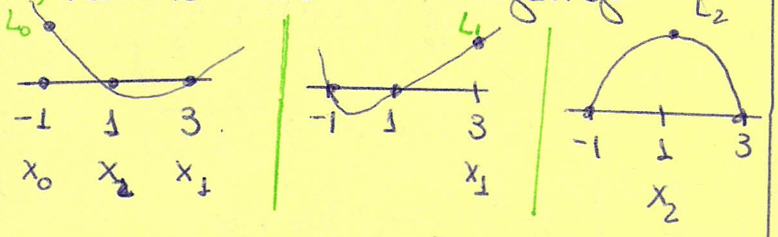
$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ • 3 equações p/3 coeficientes

3 incógnitas

$P(-1) = 2$
$P(3) = -1$
$P(1) = -2$

$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 2 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 = -1 \\ \cancel{a_0 - 2a_1 + 4a_2} = -2 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{cases}$

2) Polinômios de Lagrange



- $L_0(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(-1-1)(-1-3)}$ (I) $= \dfrac{1}{8}(x-1)(x-3)$

(I) Encontra um polinômio que se anula em 1 e 3?

(II) ~~Quando se anu~~ O que acontece quando $x = -1$?

(III) Divide pela cte encontrada em (II)

- $L_1(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(3+1)(3-1)} = \dfrac{1}{8}(x^2-1)$

- $L_2(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(1+1)(1-3)} = -\dfrac{1}{4}(x+1)(x-3)$

→ Pegue uma combinação linear de L_0, L_1, L_2

$$q(x) = \alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x)$$

• $q(-1) = \alpha_0 \underbrace{L_0(-1)}_{=1} + \alpha_1 \underbrace{L_1(-1)}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{L_2(-1)}_{=0}$

• Igualmente: $q(3) = \alpha_1 \; (q(x_1) = \alpha_1)$

$q(+1) = \alpha_2 \; (q(x_2) = \alpha_2)$

→ Se quisermos

$q(-1) = 2$, basta pegar $\alpha_0 = 2$

$q(3) = -1$, basta pegar $\alpha_1 = -1$

$q(1) = -2$, basta pegar $\alpha_2 = -2$.

Solução:

$$p(x) = 2L_0(x) - L_1(x) - 2L_2(x)$$

$$= \frac{1}{4}(x-1)(x-3) - \frac{1}{8}(x^2-1) + \frac{1}{2}(x+1)(x-3)$$

3) método das "diferenças divididas".

(I) Escolha uma ordem para interpolar

P. exemplo: $x_0 = -1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$

- $P_f[-1]$: polinômio de grau zero (P_0), que interpola f em (-1)
- $P_f[-1,3]$: polinômio em P_1, que interpola f em 3.
- $P_f[-1,3,1]$: polinômio em P_2, que interpola f em 1.

(II) $P_f[-1](x) = c_0$

Quem é c_0? Basta resolver a equação $\underbrace{P_f[-1](-1)}_{=c_0} = 2$

(III) $P_f[-1,3](x) = \underbrace{P_f[-1](x)}_{\text{interpola } x_0=-1} + c_1(x+1)$

→ c_1 sai de impor o 2º ponto:

$P_f[-1,3](3) = -1$

$\underbrace{P_f[-1](3)}_{\text{(II)} = 2} + c_1(3+1) = -1 \iff$

$2 + c_1 \cdot 4 = -1 \iff c_1 = \dfrac{-3}{4}$

→ $P_f[-1,3](x) = 2 - \dfrac{3}{4}(x+1)$

(IV) Por fim, vamos colocar o 3º pto.

$$P_f[-1,3,1](x) = P_f[-1,3](x) + c_2 (x+1)(x+3)$$

C_2 sai de impor o pt. adicional

$$P_f[-1,3,1](\underset{\uparrow\, x_2}{1}) = -2$$

- $\underbrace{P_f[-1,3](1)}_{} + c_2\underbrace{(1+1)(1-3)}_{-4} = -2$

De (III),

$$2 - \frac{3}{4}(1+1) = \frac{1}{2}$$

- $c_2 = 5/8$

→ Por fim, $P_f[-1,3,1](x) = \underset{c_0}{2} - \underset{c_1}{\frac{3}{4}}(x+1) + \underset{c_2}{\frac{5}{8}}(x+1)(x-3)$

● Agora, suponha mais um ponto: (x_3)

• $P_f[-1,3,1,x_3](x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)(x-3) + c_3(x+1)(x-3)(x-1)$

• e c_3 sai da informação sobre x_3: $f(x_3)$

Percebam:

→ c_0 é o coeficiente de x^0 do polinômio $P_f[-1] \in P_0$

$$P_f[-1](x) = c_0 x^0$$

→ c_1 é o coeficiente de x^1 do polinômio $P_f[-1,3] \in P_1$

$$P_f[-1,3](x) = c_1 x^1 + \text{termo de grau } 0$$

↳ coeficiente angular

→ c_2 é o coeficiente de x^2 de $P_f[-1,3,1] \in P_2$

→ c_3 é o coeficiente de x^3 de $P_f[-1,3,1,x_3] \in P_3$.

● Nome: $\Delta f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ é o coeficiente de x^n do polinômio $P_f[x_0,\dots,x_n] \in P_n$

→ Com a notação:

$$P_f[-1,3,1,x_3](x) = \Delta f[\underset{\downarrow\, -1}{x_0}] + \underbrace{\Delta f[-1,3]}_{c_1}(x+1) + \underbrace{\Delta f[-1,3,1]}_{c_2}(x+1)(x-3) + \underbrace{\Delta f[-1,3,1,x_3]}_{c_3}(x+1)(x-3)(x-1)$$

→ Precisamos investigar as relações entre os Δf's

→ $\Delta f[-1] = f(-1) = f(x_0) = 2$

→ $\Delta f[x_0,x_1] = \underset{\uparrow\ \text{coef. angular}}{\Delta f[-1,3]} = \dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}$

$$= \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

obs:. $P_f[x_1](x) = f(x_1)\, x^0$

↳ coef. de $x^0 = \Delta f[x_1]$

conclusão:

$$\Delta f[x_0,x_1] = \frac{\Delta f[x_1] - \Delta f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

obs:. $\Delta f[x_1,x_0] = \Delta f[x_0,x_1]$

Vamos deduzir uma fórmula parecida p/ $\Delta f[x_0,x_1,x_2]$

→ Vou escrever $P_f[x_0,x_1,x_2]$ de 2 jeitos

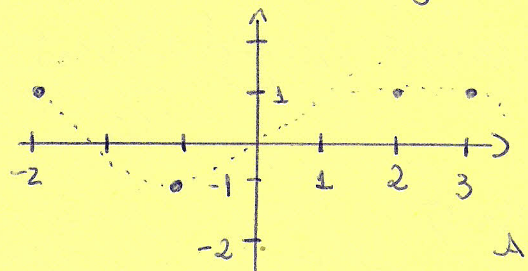
. $x_0 \rightsquigarrow x_1 \rightsquigarrow x_2$

(I) $\cancel{P_f[x_0,x_1,x_2](x) = \Delta f[x_0] + \Delta f[x_0,x_1](x-x_0) + \Delta f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)}$

Aula 05 - 20.03.2017 - Terça

Interpolação Polinomial (forma de Newton)

• Exemplo: (4 pts ⇝ grau 3)



A ordem não importa

x_i	-2	-1	2	3
$f(x_i)$	1	-1	1	1

-> Será que existe uma curva que passa por esses ptos?

-> Aonde estão os pontos críticos e de inflexão?

(I) $$p_f[-2,-1,2,3](x) = \underbrace{\underbrace{\Delta f[-2]}_{f(-2)=1} + \Delta f[-2,-1](x+2)}_{p_f[-2,-1](x)}$$

$$+\Delta f[-2,-1,2](x+2)(x+1) + \Delta f[-2,-1,2,3](x+1)(x+2)(x-2)$$

(II) Como calcular (facilmente) os coeficientes?

*Lembrando: Nem p_f, nem Δf dependem da ordem dos pontos dentro do colchete.

-> $P_f[-2,-1,2,3] = P_f[-2,2,3,-1]$

• É imediato que o polinômio interpola f nos pontos -2, 2 e 3

• Como são 3 pontos, $\exists!$ polinômio em P_2 que faz isso, e a ele nós demos o nome de

$$p_f[-2,2,3]$$

Logo, $p_f[-2,2,3](x) = p(x) = 1$

• Para chegar em $p_f[-2,2,3,-1]$, basta acrescentar o último ponto na interpolação.

$$P_f[-2,2,3,1](x) = \overbrace{P_f[-2,2,3](x)}^{\text{em } (-1) = 1} + \Delta f[-2,2,3,-1](x+2)(x-2)(x-3)$$

IMPORTANTE: $\Delta f[-2,-1,2,3] = \Delta f[-2,2,3,-1]$

-> coefs. de grau zero.

$\Delta f[w] = f(w)$

-> coef. de grau um do interpolador

$\Delta f[w_1, w_2]$

ou ainda, coef. angular da reta que passa por $(w_1, f(w_1))$ e $(w_2, f(w_2))$.

$$\Delta f[w_1,w_2] = \frac{f(w_2)-f(w_1)}{w_2-w_1} = \cancel{\Delta f[w_2]}$$

$$\frac{\Delta f[w_2]-\Delta f[w_1]}{w_2-w_1}$$

EXEMPLOS:

$\therefore \Delta f[-2,2] = 0 \quad \therefore \Delta f[-2,-1] = -2$

$\therefore \Delta f[-1,3] = 1/2$

-> grau 2:

$$\begin{tikzcd} & p_f[x_1] \arrow[dl, "\text{``+''} x_0"', "1"] \arrow[dr, "\text{``+''} x_2", "2"'] & \\ p_f[x_0,x_1] \arrow[dr, "\text{``+''} x_2"'] & & p_f[x_1,x_2] \arrow[dl, "\text{``+''} x_0"] \\ & p_f[x_0,x_1,x_2] & \end{tikzcd}$$

- Podemos escrever $P_f[x_0,x_1,x_2]$ de duas maneiras

(1) $$p_f[x_0,x_1,x_2] = p_f[x_1](x) + \Delta f[x_0,x_1](x-x_1) + \Delta f[x_0,x_1,x_2](x-x_1)(x-x_0)$$

(2) $P_f[x_0,x_1,x_2](x) = P_f[x_1](x) + \Delta f[x_1,x_2](x-x_1) + \Delta f[x_0,x_1,x_2](x-x_1)(x-x_2)$

Agora, faça uma subtração:

(1) - (2) $\Rightarrow 0 = 0 + \cancel{(x-x_1)}\{\Delta f[x_0,x_1] - \Delta f[x_1,x_2]\} + \cancel{(x-x_1)}\,\Delta f[x_0,x_1,x_2]\{(\cancel{x}-x_0) - (\cancel{x}-x_2)\} \Leftrightarrow$

$x \neq x_1$

$\rightarrow \Delta f[x_1,x_2] - \Delta f[x_0,x_1] = (x_2-x_0)\,\Delta f[x_0,x_1,x_2]$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta f[x_0,x_1,x_2] = \frac{\Delta f[x_1,x_2] - \Delta f[x_0,x_1]}{(x_2-x_0)}}$$

→ De forma geral:

$$\Delta f[w_1, \dots, w_2] = \frac{\Delta f[\dots, w_2] - \Delta f[w_1, \dots]}{w_2 - w_1}$$

ptos

TABELAS DE DIFERENÇAS DIVIDIDAS

x_i	$f(x_i)$		
x_0	$f(x_0)$		
		$\Delta f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	
x_1	$f(x_1)$		(*)
		$\Delta f[x_1,x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	
x_2	$f(x_2)$		(**)
		$\Delta f[x_2,x_3] = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$	
x_3	$f(x_3)$		

(*) $\Delta f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{\Delta f[x_1,x_2] - \Delta f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$ (+)

(**) $\Delta f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{\Delta f[x_2,x_3] - \Delta f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$

(+) $\Delta f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \dfrac{\Delta f[x_1,x_2,x_3] - \Delta f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$

→ tabela no exemplo da aula 04

x_i	$f(x_i)$			
-2	1			
		$\frac{-1-1}{-1-(-2)} = -2$		
-1	-1		$\frac{2}{3}$	
		$\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{6}$
2	1		$-\frac{1}{6}$	
		0		
3	1			

→ Dessa forma, eu encontro os coeficientes da interpolação

→ A tabela também fornece outras "ordenações" de montagem.

~~2 → 3 → -1 → -2 (x_i)~~

- $P_f[-2,-1,2,3](x) =$

$1 - 2(x+2) + \frac{2}{3}(x+2)(x+1) - \frac{1}{6}(x+2)(x+1)(x-2)$

- 2 → 3 → -1 → -2

$= 1 + 0(x-2) + \left(-\frac{1}{6}\right)(x-2)(x-3) + \left(-\frac{1}{6}\right)(x-2)(x-3)(x+1)$

OUTRA ORDENAÇÃO

x_i	$f(x_i)$			
-2	1			
		0		
2	1		0	
		0		$-\frac{1}{6}$
3	1		$-\frac{1}{6}$	
		$\frac{1}{2}$		
-1	-1			

→ Acrescente o ponto (0,0) e chegue em $\frac{1}{12}$

Aula 06 - 24/03/2017 - Sexta

→ Aula de exercícios

Aula 07 - 28.03.2017 - Terça

→ Problema semelhante ao da última aula

- O número de infos tem a ver c/ o grau.

→ Achar polinômios cúbica que interpola $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ em $-1, 0, 1$ e tem derivada igual a $f'(0)$ em $x = 0$.

(I)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
-1 & f(-1) & & & \\
 & & \frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)} & & \\
0 & f(0) & & ? & \\
 & & f'(0) & & ? \\
0 & f(0) & & ? & \\
 & & \frac{f(1)-f(0)}{1-0} & & \\
1 & f(1) & & &
\end{array}$$

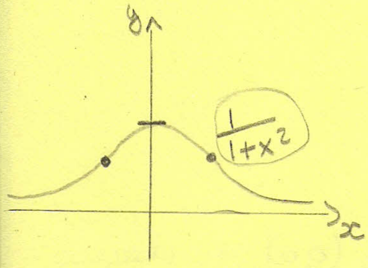
(II) $f(-1) = \frac{1}{2}$; $f(0) = 1$; $f(1) = 1/2$; $f'(0) = 0$

(III)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
-1 & 1/2 & & & \\
 & & \frac{1}{2} & & \\
0 & 1 & & -1/2 & \\
 & & 0 & & 0 \\
0 & 1 & & -\frac{1}{2} & \\
 & & -1/2 & & \\
1 & 1/2 & & &
\end{array}$$

(IV) $p(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)x + \underline{0(x+1)x^2}$

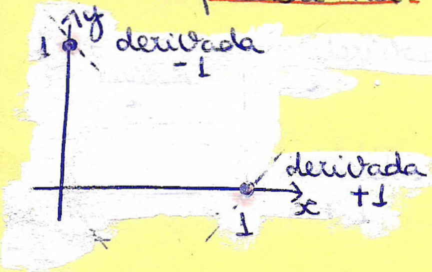
↓ polinômio é quadrático



Ou ainda, $p(x) = \frac{1}{2}\left(1+x+1-x^2-x\right)$

$\Leftrightarrow p(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$.

→ Outro problema:



4 informações

Procurar em P_3

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
x_i & f & \text{(I)} & & \\
\hline
0 & 1 & & & \\
 & & -1 & & \\
0 & 1 & & 0 & \\
 & & -1 & & 2 \\
1 & 0 & & 2 & \\
 & & 1 & & \\
1 & 0 & & &
\end{array}$$

(II) $p(x) = 1 - 1(x-0) + 0(x-0)(x-0) + 2(x-0)(x-0)(x-1) \Leftrightarrow$

$p(x) = 2x^2(x-1) - x + 1 \Leftrightarrow$

$p(x) = 1 - x - 2x^2 + 2x^3$

(III) Prova Real:

$p(0) = 1$

$p(1) = 1 - 1 - 2 + 2 = 0$

$p'(x) = -1 - 4x + 6x^2$ ok!

$p'(0) = 1$ e $p'(1) = -1 - 4 + 6 = 1$

(IV) Por curiosidade - ptos críticos

i) $-1 - 4x + 6x^2 = 0$

ii) $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(6)(-1)}}{2.6} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{12}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{6} \Leftrightarrow x_1 \cong 0,8604$

$x_2 \cong 0,1937$

→ Valores críticos

$p(0,8604) \approx -0,067$

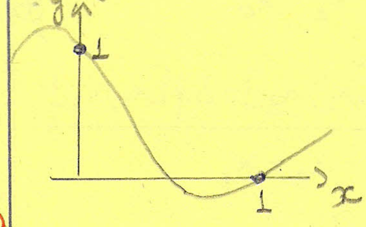
$p(-0,1937) \approx 1,104$

- ptos de inflexão

$-4 + 12x = 0 \Leftrightarrow x = 1/3$

$p\left(\frac{1}{3}\right) \cong 0,519$

(V) gráfico:

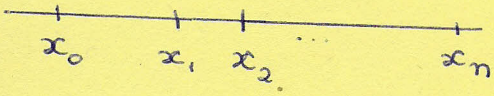


Interpolação de Hermite

→ **Problema:**

1) São dados ptos distintos, respeitando a ordem numérica

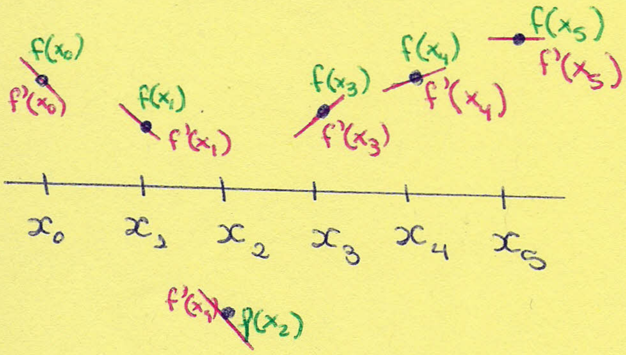
$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$$



2) Valores: $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$

3) derivadas: $f'(x_0), f'(x_1), \dots, f'(x_n)$

→ Desenho com $n = 5$



→ É procurada: Uma função h, que respeite esses dados, isto é,

$$h(x_0) = f(x_0), \dots, h(x_n) = f(x_n)$$

(h tem que interpolar f)

$$h'(x_0) = f'(x_0), \dots, h'(x_n) = f'(x_n)$$

OBS: . tenho 6 ptos e 6 derivadas → 12 infos. Ou seja, estou procurando polinômio de grau 11?!

→ E cuja restrição a cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ seja um polinômio em P_3

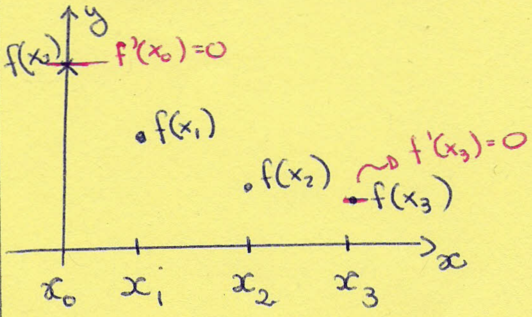
• Ou seja,

$$h\Big|_{[x_{i-1}, x_i]} = P_i \in P_3, \ \forall i = 1, \dots, n$$

Solução:

Para achar h, basta achar cada P_i usando a técnica do último exemplo

→ **EXEMPLO DA ISABELA:**



Spline cúbica nesse exemplo

→ Em vez de 1 polinômio em P_5, vou procurar 3 polinômios p_1, p_2, p_3 em P_3.

p_1 para $[x_0, x_1]$

p_2 para $[x_1, x_2]$

p_3 para $[x_2, x_3]$

* 3 polinômios cúbicos $= 4 \cdot 3 = 12$ incógnitas.

→ Quantas informações temos?

$$\begin{cases} p_1(x_0) = f(x_0) \ ; & p_2(x_1) = f(x_1) \ ; \\ p_1(x_1) = f(x_1) \ ; & p_2(x_2) = f(x_2) \ ; \\ p_3(x_2) = f(x_2) & \text{e} \quad p_3(x_3) = f(x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1'(x_0) = f'(x_0) = 0 \ ; \\ p_3'(x_3) = f'(x_3) = 0 \end{cases}$$

* 8 informações (faltam 4)

• Como podemos colocar mais quatro exigências, pedimos:

(i) derivada contínua

$$p_1'(x_1) = p_2'(x_1)$$
$$p_2'(x_2) = p_3'(x_2)$$

(ii) 2ª derivada contínua

$$p_1''(x_1) = p_2''(x_1)$$
$$p_2''(x_2) = p_3''(x_2)$$