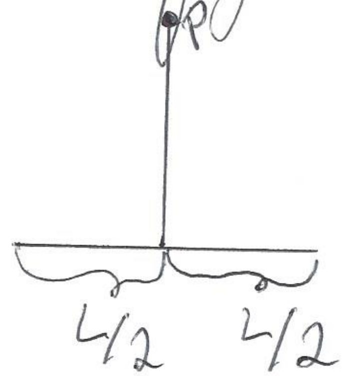
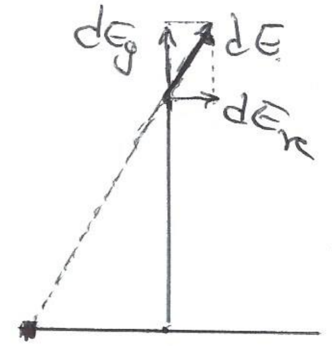
Campo elétrico devido a uma linha carregada de comprimento finito.

Um bastão de comprimento L e carga Q está uniformemente carregado e tem densidade linear de carga igual a $\lambda = Q/L$. Determine o campo elétrico no ponto P, a uma distância y acima do centro do bastão, conforme a figura



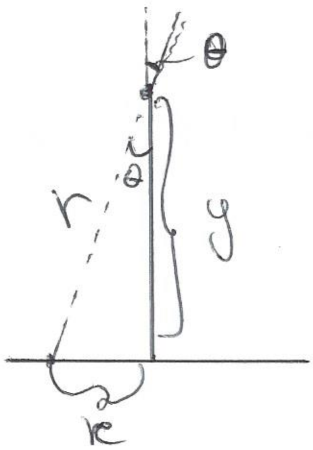
Definindo o eixo de referência como $y \uparrow \longrightarrow x$, estando a origem no centro do bastão



Por simetria, cada elemento dL do bastão à esquerda terá um elemento dL à direita que produzirá um elemento de campo $d\vec{E}$ que cancelará a componente x do campo elétrico e irá SOMAR (no caso dobrar) a componente vertical do campo elétrico dE_y

logo, por questão de simetria, cada elemento dL e seu simétrico só contribuir com um elemento de campo elétrico 2dE.

Portanto,



A cada elemento dL, teremos

um dE_y, tal que

$$dE_y = dE \cos\theta, \text{ sendo}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(x^2+y^2)} \text{ e } q = \lambda dL, r^2 = x^2+y^2$$

que neste caso $dL = dx$, então

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx}{(x^2+y^2)} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

e $$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{y\lambda dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Visto que cada segmento de metade do bastão terá contribuição de um segmento simétrico, o campo elétrico, será

$$E = 2\int dE_y$$

ou

$$E = 2\int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{y\lambda\, dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Retirando as constantes da integral

$$E = \frac{y\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int\frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$, nesta configuração os limites da integral será de $\frac{L}{2}$ à 0

ou

$$E = \frac{y\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{-L/2}^{0}\frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Sabendo que $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$

$$\int_{-L/2}^{0} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \left.\frac{x}{y^2(x^2+y^2)^{1/2}}\right|_{-L/2}^{0}$$

ou

$$E = \frac{y\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{-(-L/2)}{y^2\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2+y^2\right]^{1/2}}\right)$$

$$E = \frac{+Ly\lambda}{4\pi\epsilon_0\left[y^2\left(\frac{L^2}{4}+y^2\right)^{1/2}\right]}$$

$$E = \frac{+\lambda L}{4\pi\epsilon_0\, y\left(\frac{L^2}{4}+y^2\right)^{1/2}}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\cdot\frac{+\lambda L}{\left[(yL)^2+y^4\right]^{1/2}}$$

O termo $\dfrac{\lambda L}{[(yL)^2+y^4]^{1/2}} = \dfrac{\lambda L}{yL\left[1+\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^{1/2}}$

ou

$$\frac{\lambda L}{[(yL)^2+y^4]^{1/2}} = \frac{\lambda \cancel{L}}{y\cancel{L}\left[1+\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^{1/2}}$$

logo

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{\lambda}{y\left[1+\left(\frac{y}{2}\right)^2\right]^{1/2}}$$

Para $L \to \infty$ ou $L >> y$

$$\lim_{L\to\infty} E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}$$

logo para um bastão ou fio infinito

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}}$$