Noções Básicas de Medidas e Algarismos Significativos

1 - O Sistema Internacional de Unidades (SI)

No SI, a Mecânica utiliza três grandezas físicas fundamentais das quais são derivadas várias outras. São elas:

- **tempo**
- **comprimento**
- **massa**

Cada unidade fundamental tem um padrão ou alguma coisa que pode ser reproduzida em qualquer lugar. Por exemplo, se alguém for verificar se uma régua tem suas divisões corretas deve utilizar o padrão adequado. Os padrões de comprimento (o metro), de tempo (o segundo) segundo e de massa (o grama) têm definições muito complicadas devido às exigências da Ciência e da tecnologia modernas.

O padrão de massa é o mais antigo, criado em 1889, e também o mais simples (Quadro 1). Cada país deve ter laboratórios capazes de reproduzir os padrões ou cópias devidamente aferidas e cuidadosamente guardadas. No Brasil essa tarefa é desempenhada pelo Inmetro, Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial, do Ministério da Indústria e do Comércio.

QUADRO 1 - TRÊS UNIDADES FUNDAMENTAIS DO SI

GRANDEZA	NOME	SÍMBOLO	DEFINIÇÃO
Comprimento	Metro	**m**	Distância percorrida pela luz, no vácuo, num intervalo de tempo de 1/299792458 s.
Massa	Quilograma	**kg**	Massa de um cilindro padrão de platina--irídio conservada no Bureau Internacional de Pesos e Medidas em Sèvres, na França.
Tempo	Segundo	**s**	Duração de 9.192.631.770 períodos da radiação de transição de dois níveis do estado fundamental do átomo do césio 133.

Observações
1. Note que os símbolos não são abreviaturas, por isso não têm ponto final.
2. As definições serão discutidas mais adiante no curso, por isso, não é necessário decorá-las.

A tabela 2 mostra algumas unidades derivadas das grandezas fundamentais do SI.

QUADRO 2 – ALGUMAS UNIDADES DERIVADAS DO SI		
GRANDEZA	**NOME**	**SÍMBOLO**
Área	Metro quadrado	m^2
Volume	Metro cúbico	m^3
Velocidade	Metro por segundo	m/s
Aceleração	Metro por segundo ao quadrado	m/s^2
Densidade	Quilograma por metro cúbico	kg/m^3

2 - Erros nas Medidas

O ato de medir é, em essência, um ato de comparar, e essa comparação envolve erros de diversas origens (dos instrumentos, do operador, do processo de medida, etc.). Pretende-se aqui estudar esses erros e suas consequências, de modo a expressar os resultados de dados experimentais em termos que sejam compreensíveis a outras pessoas.
Quando se pretende medir o valor de uma grandeza, pode-se realizar apenas uma ou varias medidas repetidas, dependendo das condições experimentais particulares ou ainda da postura adotada frente ao experimento. Em cada caso, deve-se extrair do processo de medida um valor adotado como melhor na representação da grandeza e ainda um limite de erro dentro do qual deve estar compreendido o valor real.

3 - CLASSIFICAÇÃO DOS ERROS

a) **Erros grosseiros**: são erros que resultam de uma desatenção do experimentador.
Ex. Uma leitura de 80 cm ao invés de 8,0 cm.
b) **Erros sistemáticos**: são erros oriundos de causas constantes e que afetam as medidas de um modo uniforme.
Ex. Medida de comprimento feita com uma trena de aço que encolheu; medida feita com instrumento de medida mal calibrado.
c) **Erros acidentais**: são erros que resultam de causas indeterminadas e afetam de modo imprevisível as medidas.
Ex. Erros devidos à variação de pressão, temperatura; erro de leitura ou julgamento do observador quanto à estimativa de frações da menor escala do instrumento; irregularidades do objeto a ser medido; etc.

DEFINIÇÕES:

1 - VALOR **MÉDIO** DE UMA SÉRIE DE MEDIDAS:
Para uma série de medidas (x_1, x_2 ,..., x_n) de mesma confiança, o valor mais provável ($\bar{x}$) da grandeza medida é dado pela média aritmética dos valores experimentais obtidos.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

2 - **DESVIO ABSOLUTO** PARA CADA MEDIDA:
Define-se desvio absoluto (Δx_i) para cada medida, como sendo o módulo da diferença entre o valor experimental da i-ésima medida e o valor médio.

$$\Delta x_i = |x_i - \bar{x}|$$

3 - **DESVIO RELATIVO** PARA CADA MEDIDA:

Define-se desvio relativo (δx_i) para cada medida, como sendo o quociente entre o desvio absoluto correspondente Δx_i e o valor médio.

$$\delta x_i = \frac{\Delta x_i}{\overline{x}}$$

4 - **DESVIO MÉDIO ABSOLUTO** PARA UM CONJUNTO DE n MEDIDAS:
Define-se desvio médio absoluto, $\Delta\overline{x}$, para um conjunto de n medidas,como sendo a média aritmética dos desvios absolutos de cada medida.

$$\Delta\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$$

5 - **DESVIO MÉDIO RELATIVO** PARA UM CONJUNTO DE n MEDIDAS:
Define-se desvio médio relativo, $\delta\overline{x}$, para um conjunto de n medidas, como sendo o quociente entre o desvio médio absoluto e o valor médio.

$$\delta\overline{x} = \frac{\Delta\overline{x}}{\overline{x}}$$

6 - **DESVIO-PADRÃO** DE UMA AMOSTRA:
Define-se desvio-padrão de uma amostra (pequena série de medidas) como a raiz quadrada da razão entre a soma dos quadrados dos desvios absolutos e o número de medidas realizadas menos uma.

$$\sigma x = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}{n-1}}$$

7 – **DESVIO PADRÃO DO VALOR MÉDIO** DE n MEDIDAS OU ERRO DA MÉDIA (também conhecido como desvio padrão da média).

$$\varepsilon = \frac{\sigma x}{\sqrt{n}}$$

8 - **DESVIO AVALIADO ABSOLUTO**:
É definido como sendo a metade da menor divisão da escala do instrumento utilizado. Isto faz com que o desvio absoluto só deva ter um único algarismo significativo.

9 - **APRESENTAÇÃO DO RESULTADO**:
Admitamos que na medida de uma grandeza física x foram feitas n medidas obtendo-se um valor mais provável (valor médio) e um desvio médio absoluto associado ($\Delta\overline{x}$). O verdadeiro valor de x não é possivel ser determinado, porém podemos concluir, com alto grau de confiança, que seu valor está compreendido no intervalo:

$$\overline{x} - \Delta\overline{x} \leq x \leq \overline{x} + \Delta\overline{x}$$

cuja notação usual é dada por:

$$x = \overline{x} \pm \Delta\overline{x}$$

Na verdade, para representar o intervalo descrito acima, deve-se usar o maior desvio dentre o avaliado absoluto (do instrumento) e o médio absoluto.

3 - ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS:

Quando se trabalha com medidas quase sempre aparece uma dúvida: com quantos algarismos se escreve uma medida?

Suponhamos que queremos medir o comprimento de uma barra. Dispomos de uma régua graduada de um em um centímetro, tal como é mostrada na figura 1. A régua nos dá com precisão o valor da medida em centímetros, mas a casa dos milímetros só pode ser estimada, porque a régua não tem graduação em milímetros. O nosso resultado deverá ser expresso com todos os algarismos precisos mais o algarismo avaliado.O comprimento da barra será expresso como 7,5 cm. Se a nossa régua fosse graduada em milímetros nossa medida deveria ser igual a 7,50 cm, **por quê**?

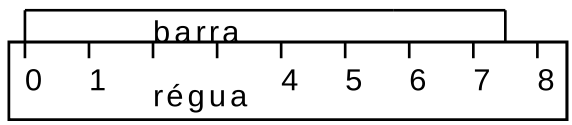

Fig. 1

Os algarismos que compõem o resultado de uma medida são chamados algarismos significativos. Deles fazem parte todos os algarismos precisos mais um e somente um algarismo duvidoso.Toda medida se expressa por n algarismos precisos mais o algarismo duvidoso.

Todos os algarismos que se obtém ao fazer uma medida, incluindo o duvidoso, são algarismos significativos. Se outra pessoa fizer a mesma medida, talvez encontre um valor um pouco diferente, mas, ao escrevê-lo, deverá utilizar o número correto de algarismos significativos.

Suponha que, ao medir o diâmetro desse lápis com um paquímetro, Maristela encontre o valor 7,34 mm e Rosinha 7,37 mm. Pelo resultado, percebe-se que elas têm certeza do 7 e do 3, mas o último algarismo È incerto. Imagine agora que elas resolvam entrar num acordo e considerar, como melhor medida, um valor que seja igual à média aritmética dos seus resultados.

Qual será esse valor?

Para achar a média aritmética basta somar as medidas de cada um e dividir por 2 (que È o número total de medidas). Assim teremos:

m = (7,34mm+ 7,37mm)/ 2

m = 14,71mm / 2

m = 7,355 mm

Será correto expressar o diâmetro do lápis com tantos algarismos? … claro que não! Se cada uma só teve certeza de dois algarismos e avaliaram, discordando, mais um, não tem sentido dar uma resposta com quatro algarismos!

Se outras pessoas participarem e fizerem outras medidas, a média aritmética terá um número muito maior de parcelas e o seu valor representará melhor o diâmetro do lápis.

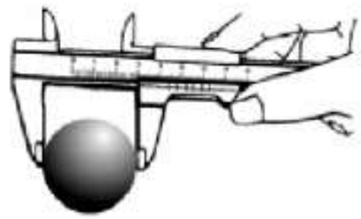

Figura 2: Medidores de comprimento com precisão: paquímetro e micrômetro

OBSERVAÇÕES:

a) Os zeros à esquerda do primeiro algarismo não nulo, não são significativos, pois o número de significativos não depende da unidade que expressamos o resultado da medida. Assim,

7,5 cm = 0,075 m = 0,000075 km

têm somente dois significativos nos três casos.

b) Os zeros à direita do último algarismo não nulo são significativos, pois indicam um valor medido. Assim,

0,0750 m tem três significativos,

7,5000 cm tem cinco significativos.

c) Às vezes, pode surgir dúvida no caso b (acima), quanto aos zeros à direita do último algarismo não nulo serem significativos ou estarem presentes apenas para mostrar a localização do ponto decimal. 310 tem dois ou três significativos ?

Para evitar essa ambigüidade, devemos adotar a **notação científica**:

$3,10 \times 10^{2}$ (três significativos) ou

$3,1 \times 10^{2}$ (dois significativos).

Dessa forma, **todos os algarismos à esquerda da potência de 10 são significativos**.

Ex: $7,5 \times 10^{0}$ cm (2 significativos); $7,5 \times 10^{-2}$ m (2); $7,5 \times 10^{-5}$ km (2); $7,50 \times 10^{-2}$ m (3); $7,5000 \times 10^{0}$ cm (5).

Em geral, as medidas têm um certo número de algarismos precisos e um algarismo duvidoso. É sobre este algarismo duvidoso que incide o desvio. Por esta razão, o desvio avaliado absoluto é definido como sendo metade da menor divisão da escala do instrumento utilizado. Cumpre ressaltar ainda, que o desvio médio absoluto deve sempre conter um único algarismo significativo e que o número de casas decimais do valor mais provável e do desvio médio absoluto deve ser o mesmo.

3.1 - OPERAÇÃO DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO:

Quando se faz operações com algarismos significativos, muitas vezes é necessário tirar um ou vários algarismos significativos. No caso da adição ou subtração, **as parcelas e o resultado devem ser expressos com o número de casas decimais da parcela mais pobre** (a que tem o menor número de casas decimais). O critério para o arredondamento das parcelas deve ser o seguinte: se o primeiro algarismo desprezado (da esquerda para a direita) for maior que 5, aumente o último algarismo significativo de 1; se o primeiro algarismo desprezado for menor que 5, mantenha o último significativo inalterado. Se o primeiro algarismo desprezado for igual a 5, analise o último significativo: se ele for ímpar, aumente-o de 1; se ele for par, mantenha-o inalterado.

a) 20,23 +17,853 + 23,78 + **2,6** = 64,5
b) 154,75 - **110,1** = 154,8 - 110,1 = 44,7

3.2 - OPERAÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO OU DIVISÃO:

O resultado deve ter o **mesmo número de algarismos significativos.** **Ex**: 18,56 x 6,82 = 127 (3 algarismos significativos)

Se o **divisor tiver um número menor de algarismos significativos que o dividendo, o resultado deve ter o mesmo número de algarismos significativos do divisor**. Ex:

68,32 / **3,2** = 21 (2 significativos)

Caso contrário, o resultado pode ter o mesmo número de algarismos significativos do dividendo (menor ou igual ao do divisor)

Ex: **a) 62,56** / 68,32 = 0,9157 (4 significativos)
b) 3,2 / 68,32 = 0,047 (2 significativos)

Note que: 0,0**47** x 68,32 = 3,2 (2 significativos), enquanto que 0,0**5** x 68,32 = 3 (1 significativos); 0,9157 x 68,32 = 62,56 (4 significativos), enquanto que 0,**916** x 68,32 = 62,6 (3 significativos).

4 - ÍNDICES DE EXATIDÃO:

a) PRECISÃO:

Uma medida é tão mais precisa quanto mais próxima estiver do valor médio da grandeza associada. A precisão da medida está ligada apenas aos erros acidentais, de modo que um aumento do número n de medidas aumenta a precisão do resultado pois atenua a influência dos erros acidentais.

O desvio médio absoluto tem as mesmas unidades da grandeza x medida e o seu valor não é significativo para indicar a precisão da medida realizada. O desvio médio relativo, sendo um número puro, é um índice da precisão da medida: quanto menor o desvio médio relativo, maior a precisão da medida.

b) EXATIDÃO:

Uma medida é tão mais exata quanto menor for o "vício" da medida, ou seja, a diferença entre o valor mais provável (valor médio) encontrado e o verdadeiro valor da grandeza medida, suposto teoricamente conhecido. A exatidão do resultado de uma medida, além de depender de erros acidentais, depende, sobretudo, dos erros sistemáticos. Assim o aumento do número n de medidas, apesar de atenuar os erros acidentais, não altera os erros sistemáticos, não conseguindo melhorar significativamente a exatidão.

5 - PROPAGAÇÃO DOS DESVIOS

Dadas as medidas de duas grandezas físicas:

$a = \bar{a} \pm \Delta\bar{a}$ e $b = \bar{b} \pm \Delta\bar{b}$

Se efetuarmos operações com a e b, os desvios cometidos acumular-se-ão:

a) **Produto** ou **quociente**: os **desvios médios relativos** se somam.

$$a.b = (\bar{a}.\bar{b}) \pm [\bar{a}.\bar{b}(\frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}})]$$

$$\frac{a}{b} = (\frac{\bar{a}}{\bar{b}}) \pm [\frac{\bar{a}}{\bar{b}}(\frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}})]$$

b) Adição ou **subtração**: os **desvios médios absolutos** se somam.

$$a + b = (\bar{a} + \bar{b}) \pm (\Delta\bar{a} + \Delta\bar{b})$$

$$a - b = (\bar{a} - \bar{b}) \pm (\Delta\bar{a} + \Delta\bar{b})$$

EXERCÍCIO MODELO: Na medida dos lados a e b de um prisma retangular obtivemos os seguintes resultados, supostos merecedores da mesma confiança.

Lado a: 20.2cm;20.1cm;19.7cm 20.2cm;19,8cm

Lado b: 9.8cm;10.0cm;10.3cm;10.2cm;9.7cm

Determine:

a) A maneira correta de se exprimir o lado a

$$\bar{a} = \frac{20,2 + 20,1 + 19,7 + 20,2 + 19,8}{5} = 20,0\ \mathbf{cm}$$

$$\Delta a_1 = |20,2 - 20,0| = 0,2\ \mathbf{cm}$$

$$\Delta a_i = |a_i - \bar{a}|$$

$$\Delta\bar{a} = \frac{0,2 + 0,1 + 0,3 + 0,2 + 0,3}{5} = 0,2\ \mathbf{cm}$$

$$\delta\bar{a} = \frac{0,2}{20,0} = 0,01 = 1\%$$

Portanto :

$$a = \bar{a} \pm \Delta\bar{a} = (20,0 \pm 0,2)\ \mathbf{cm}$$

ou :

$$19,8 \le a \le 20,2\ \mathbf{cm}$$

b) A maneira correta de se exprimir o lado b

$$\bar{b} = \frac{9,8+10,0+10,3+10,2+9,7}{5} = 10,0 \text{ cm}$$

$$\Delta b_1 = |9,8-10,0| = 0,2 \text{ cm}$$

$$\Delta b_i = |b_i - b|$$

$$\Delta\bar{b} = \frac{0,2+0,0+0,3+0,2+0,3}{5} = 0,2 \text{ cm}$$

$$\delta\bar{b} = \frac{0,2}{10,0} = 0,02 = 2\%$$

Portanto: $b = (10,0 \pm 0,2)$ cm ou
$9,8 \leq b \leq 10,2$ cm

c) A maneira correta de se exprimir a área do retângulo

$$A = a.b = (20,0 \pm 0,2).(10,0 \pm 0,2)$$

$$A = (20,0.10,0) \pm (20,0.10,0).(0,01+0,02)$$

$$A = (200,0 \pm 6,0) = (200 \pm 6) \text{ cm}^2$$ ou

$$194 \leq A \leq 206 \text{ cm}^2$$

d) A maneira correta de se exprimir o perímetro do retângulo

$$P = a+a+b+b$$

$$P = 2.(20,0 \pm 0,2) + 2.(10,0 \pm 0,2)$$

$$P = 2.[(20,0+10,0) \pm (0,2+0,2)] = (60,0 \pm 0,8) \text{ cm}$$ ou

$$59,2 \leq P \leq 60,8 \text{ cm}$$