Mecânica Quântica — 7600022

Solução da Primeira Prova — 27/3/2017

I. ENUNCIADO

Um elétron se encontra no poço infinito de potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a) \\ \infty & (x < 0 \text{ ou } x > a). \end{cases}$$

A função de onda do elétron é dada pela expressão

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{1}{a}}\Big(\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{a})e^{-iAt/\hbar} + \operatorname{sen}(\frac{2\pi x}{a})e^{-iBt/\hbar}\Big),$$

onde A e B são duas constantes que você deverá determinar.

1. Que valores devem ter A e B para que $\Psi(x,t)$ satisfaça a Equação de Schrödinger dependente do tempo?
2. $\Psi(x,t)$ obedece à Equação de Schrödinger independente do tempo? Explique por quê?
3. Se a energia do elétron for medida, que valores podem resultar?
4. Qual é o valor médio esperado de uma série muito grande de medidas da energia?
5. Encontre a densidade de probabilidade de encontrar o elétron em $x = a/2$ e mostre que ela independe de t.
6. A probabilidade de encontrar o elétron em um ponto x qualquer é sempre independente do tempo? Explique.

II. SOLUÇÃO

1. A equação dependente do tempo tem a forma

$$H\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \tag{1}$$

No caso, na região de interesse $(0 < x < a)$, o Hamiltoniano se reduz a

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Substituímos a função de onda à esquerda e à direita na Eq. (1). Resulta que

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}\Big(\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{a})e^{-iAt/\hbar} + 4\operatorname{sen}(\frac{2\pi x}{a})e^{-iBt/\hbar}\Big) = A\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{a})e^{-iAt/\hbar} + B\operatorname{sen}(\frac{2\pi x}{a})e^{-iBt/\hbar}. \tag{3}$$

Essa igualdade somente é possível se

$$A = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2} \tag{4}$$

$$B = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{4\pi^2}{a^2} \tag{5}$$

As constantes A e B são as energias associadas aos estados estacionários $\operatorname{sen}(\pi x/a)$ e $\operatorname{sen}(2\pi x/a)$, respectivamente.

2. **Não.** O lado esquerdo da Eq. (3) é igual a $H\Psi$. Como $A \neq B$, segundo as Eqs. (4) e (5), o lado direito da Eq. (3) não é proporcional a Ψ. Assim $\Psi(x,t)$ não obedece à equação $H\Psi = E\Psi$.

3. Uma vez que $\Psi(x,t)$ é uma combinação linear de dois estados estacionários, os únicos resultados possíveis de uma medida de sua energia são A e B, dados pelas Eqs. (4) e (5), respectivamente.

4. O valor médio esperado é dado pela expressão

$$\langle H\rangle = \int \Psi^*(x,t)H\Psi(x,t)\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

O lado esquerdo da Eq. (3) nos dá $H\Psi(x,t)$, que substituímos no integrando da Eq. (6). Resulta que

$$\langle H\rangle = \frac{1}{a}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}\int_0^a \Big(\operatorname{sen}^2(\frac{\pi x}{a}) + 4\operatorname{sen}^2(\frac{2\pi x}{a})\Big)\,\mathrm{d}x, \tag{7}$$

depois de desprezarmos os termos cruzados no integrando, proporcionais a $\operatorname{sen}(n\pi x/a)\operatorname{sen}(2n\pi x/a)$, cuja integral é nula. Dado que o valor médio de sen^2 é $1/2$, temos que

$$\langle H\rangle = \frac{1}{a}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}(\frac{a}{2} + 4\frac{a}{2}), \tag{8}$$

ou seja

$$\langle H\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}\frac{5}{2}. \tag{9}$$

O valor médio esperado é a média aritmética entre as duas energias A e B.

5. Em $x = a/2$, a função de onda vale

$$\Psi(\frac{a}{2},t) = \sqrt{\frac{1}{a}}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})e^{-iAt/\hbar} = \frac{e^{-iAt/\hbar}}{\sqrt{a}}, \tag{10}$$

e assim a densidade de probabilidade é $|\Psi(x,t)|^2 = 1/a$, independente do tempo.

6. **Não.** Para que a densidade de probabilidade seja independente do tempo, a função de onda em um ponto $x = x_0$ tem de ser da forma $\Psi(x_0,t) = \psi(x_0)e^{-iEt/\hbar}$, para que $|\Psi(x,t)|$ seja uma constante ($|\psi(x_0|$), no ponto em questão. No ponto $x = a/2$ isso acontece porque $\operatorname{sen}(2\pi x/a)$ se anula. Nos pontos $x = 0$ e $x = a$ isso também acontece, porque $\Psi(x,t)$ se anula. Nos demais pontos, porém, isso não acontece e a densidade de probabilidade depende do tempo.