

Eletricidade e Magnetismo - IGC

Lei de Gauss

Prof. Cristiano Oliveira

Ed. Basilio Jafet – sala 202

crislpo@if.usp.br

Linhas de Campo

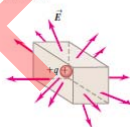
Uma carga elétrica gera *linhas de campo elétrico* no espaço ao redor destas cargas.

Assim, dado uma distribuição de cargas podemos obter o campo elétrico resultante e assim, construir as linhas de campo elétrico.

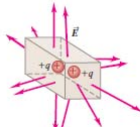
Será que é possível **fazer** o oposto? Dado uma configuração de campo elétrico em uma dada região, poderíamos **obter** informações sobre a distribuição de cargas nesta região?

A resposta é SIM! E essa é a base da LEI DE GAUSS!

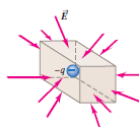
(a) Positive charge inside box, outward flux



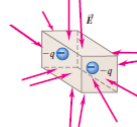
(b) Positive charges inside box, outward flux



(c) Negative charge inside box, inward flux

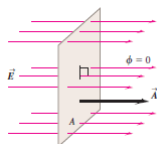


(d) Negative charges inside box, inward flux

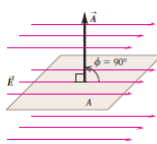


Fluxo Elétrico

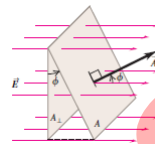
Definimos como fluxo elétrico o produto do campo elétrico com a *projeção paralela ao campo* da superfície plana de Área A



$$\Phi_E = EA$$



$$\Phi_E = 0$$

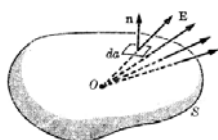


$$\Phi_E = EA \cos \phi$$

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} \cdot \hat{n} A$$

Mas... E se a superfície não for plana?

Neste caso, somamos pequenas regiões da superfície como sendo planas, definimos uma diferencial de fluxo elétrico como sendo o produto escalar do vetor campo elétrico com normal ao elemento de área e integramos sobre toda a superfície considerada:



$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$

Fluxo Elétrico / Carga puntiforme

Carga dentro de uma superfície esférica

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{r}$$

Sabemos que o campo é **radial**. Assim, para o elemento de área com mesma região angular, teremos o mesmo fluxo.

Tome uma superfície esférica com esta carga no centro. Por simetria vemos que para essa superfície, $\vec{E} \parallel d\vec{A}$, ou seja,

$$\vec{E} \cdot \hat{n} = E$$

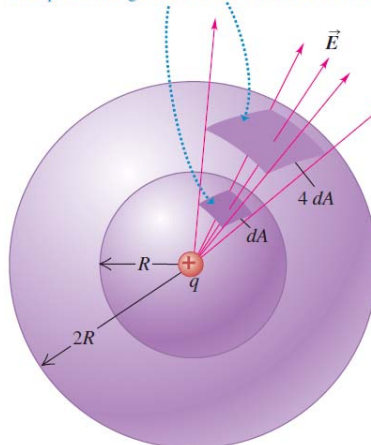
$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \int dA = EA$$

Logo,

$$\Phi_E = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

The same number of field lines and the same flux pass through both of these area elements.



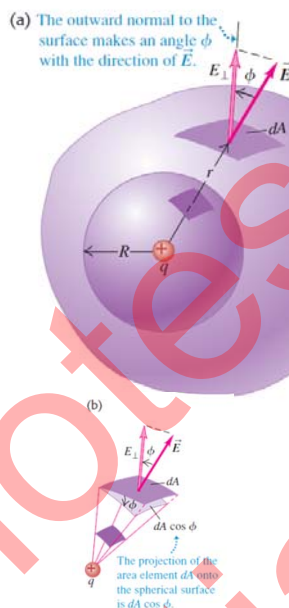
Fluxo Elétrico / Carga puntiforme

Carga dentro de uma superfície irregular

Mesmo no caso de superfícies irregulares, podemos dividir em elementos de área DA , calcular o fluxo elétrico $E \, dA \cos \phi$ para cada elemento e somar os resultados fazendo a integral.

Sendo assim, o fluxo elétrico total através da superfície irregular deve ser igual ao fluxo elétrico total sobre a superfície de uma esfera, ou seja, q/ϵ_0 . Assim,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



Lei de Gauss

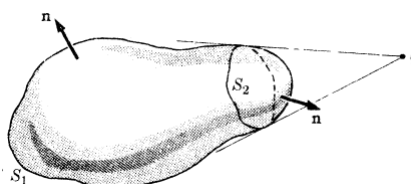
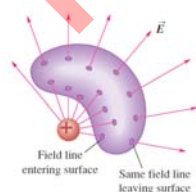
Suponha que no interior da superfície existam diversas cargas, $q_1, q_2, q_3, \dots$. O campo elétrico total em qualquer ponto é dado pela soma vetorial das cargas.

A carga total será $Q_{tot} = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$

Podemos considerar o fluxo total como a soma dos fluxos de cada uma das cargas. Assim, podemos somar as contribuições e escrever a lei de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0} \quad \text{Lei de Gauss / Forma Integral}$$

O fluxo elétrico total através de qualquer superfície fechada é igual à carga elétrica total (líquida) existente no interior da superfície dividida por ϵ_0 .



Cargas fora de superfícies fechadas fornecem fluxos nulos.

Operadores vetoriais

O operador gradiente, **grad**, $\vec{\nabla}$ é dado por, $\mathbf{grad} = \vec{\nabla} = \frac{d}{dx}\hat{i} + \frac{d}{dy}\hat{j} + \frac{d}{dz}\hat{k}$

Seja uma função escalar $\varphi(x, y, z)$. Aplicando o operador gradiente nesta função,

$$\mathbf{grad} \varphi = \vec{\nabla} \varphi = \frac{d\varphi}{dx}\hat{i} + \frac{d\varphi}{dy}\hat{j} + \frac{d\varphi}{dz}\hat{k}$$

O gradiente indica a velocidade de variação de um campo escalar no espaço

O operador divergente, **div**, $\vec{\nabla} \cdot$, é o produto escalar do operador gradiente em um campo vetorial

Seja um campo vetorial $\vec{E}$ dado por

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\hat{i} + F_y(x, y, z)\hat{j} + F_z(x, y, z)\hat{k}$$

O divergente do campo vetorial é dado por

$$\mathbf{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz}$$

O divergente indica a presença de fontes ou sorvedouros de campo

Lei de Gauss / Forma diferencial

Partimos da Lei de Gauss na Forma integral: $\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$

Assumimos que o conjunto de cargas possa ser descrito como um Sistema contínuo com densidade $\rho(\mathbf{r})$:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dv$$

Usamos o teorema do divergente em E: $\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \mathbf{div} \mathbf{F} \, dv$

Isso transforma a integral de superfície da projeção perpendicular do campo na superfície na integral do volume do divergente: $\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \mathbf{div} \mathbf{E} \, dv$,

Com isso, teremos integrais no volume nos dois lados: $\int_V \mathbf{div} \mathbf{E} \, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dv$

As integrais são idênticas se os integrandos forem idênticos, logo:

$$\mathbf{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

Lei de Gauss / Forma Diferencial

Lei de Gauss

Lei de Gauss / Forma Integral

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$$

“O fluxo de campo elétrico atravessando perpendicularmente uma superfície fechada é igual à carga total englobada por essa superfície”

Lei de Gauss / Forma Diferencial

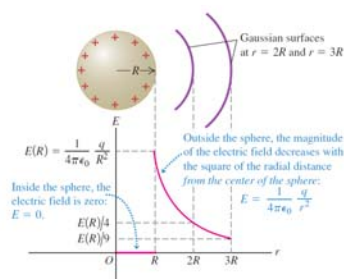
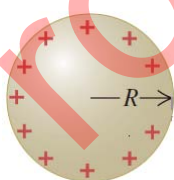
$$\text{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

“O sorvedouro (fonte) de campo de elétrico que atravessa uma superfície fechada é igual a densidade de carga no interior dessa superfície”

Ambas formas são idênticas e significam a mesma coisa. No entanto, em muitos casos é conveniente utilizar a forma diferencial.

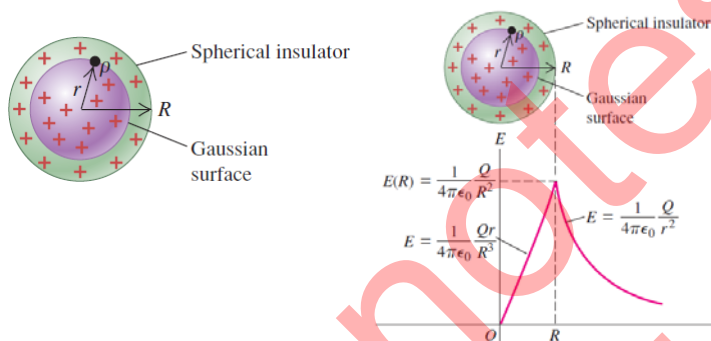
Aplicações da Lei de Gauss

Uma carga q positiva é colocada em uma esfera condutora de raio R . Encontre o campo $\vec{E}$ em qualquer ponto dentro e fora da esfera



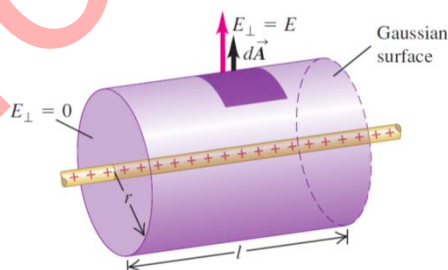
Aplicações da Lei de Gauss

Uma carga positiva Q é distribuída uniformemente ao longo do volume de uma **esfera isolante** de raio R . Encontre a magnitude do campo elétrico em um ponto P localizado a uma distância r do centro da esfera.



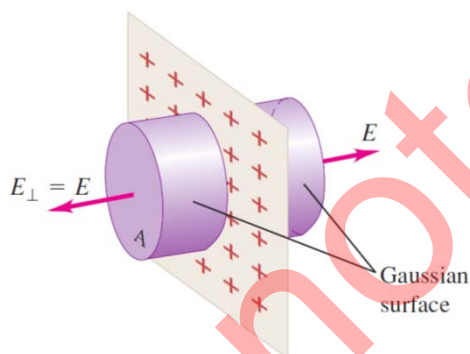
Aplicações da Lei de Gauss

Uma quantidade de carga elétrica é distribuída uniformemente ao longo de um fio fino infinitamente longo. A carga por unidade de comprimento é λ (assuma que é positiva). Encontre o campo elétrico gerado utilizando a lei de Gauss.



Aplicações da Lei de Gauss

Use a Lei de Gauss para encontrar o campo elétrico causado por um plano fino, infinito carregado uniformemente com densidade de carga σ

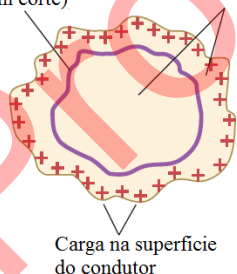


Aplicações da Lei de Gauss

Campo elétrico dentro de um Corpo condutor sólido

Superfície Gaussiana A dentro do condutor (mostrada em corte)

Condutor (mostrado em corte)



Quando temos um equilíbrio eletrostático (cargas em repouso) a força resultante deve ser zero e assim, o campo elétrico resultante também deve ser zero. Por isso o **campo elétrico E deve ser zero dentro de um condutor e suas cargas excedentes devem estar na superfície**. Caso E não fosse zero, as cargas estariam em movimento

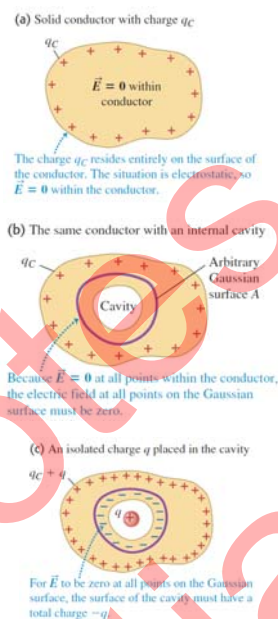
Desenhe uma superfície Gaussiana no interior do condutor. Como $E=0$, a carga dentro da superfície deve ser zero. Repita esta operação para todas as partes internas do condutor. Sendo assim, a carga deve estar armazenada na superfície do condutor sólido.

Cargas em condutores

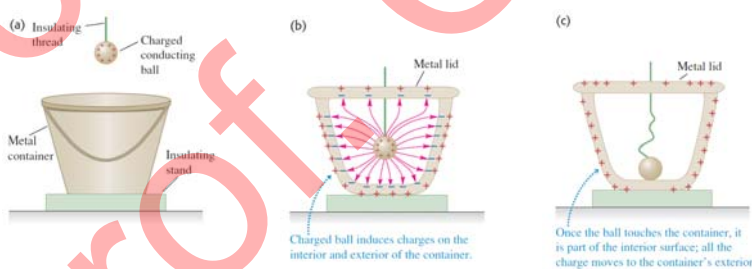
Vimos que o campo elétrico dentro de um condutor carregado é zero, $E=0$.

Quando temos uma cavidade no interior do condutor, podemos usar a lei de Gauss e demonstrar que a carga total na superfície da cavidade também é zero.

Colocamos agora uma carga q na cavidade. O campo elétrico no interior do condutor deve ser zero. Logo, a carga englobada pela superfície Gaussiana também deve ser zero. Isso só pode acontecer se surgir uma carga $-q$ na superfície interna da cavidade. Na superfície do condutor externo surge uma carga total $q_c + q$



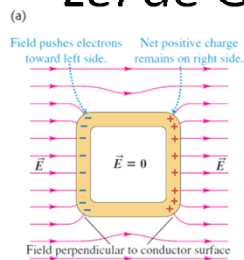
Lei de Gauss / Gaiola de Faraday



Experimento do balde de gelo de Faraday: uma carga dentro de um condutor oco fechado induz cargas elétricas na região interna e externa do condutor. Ao colocar a carga interna em contato com as paredes internas, a lei de Gauss exige que a carga dentro de um condutor seja zero. Portanto a bola perde todas as suas cargas. Retirando a bola do balde, vemos que ela está descarregada

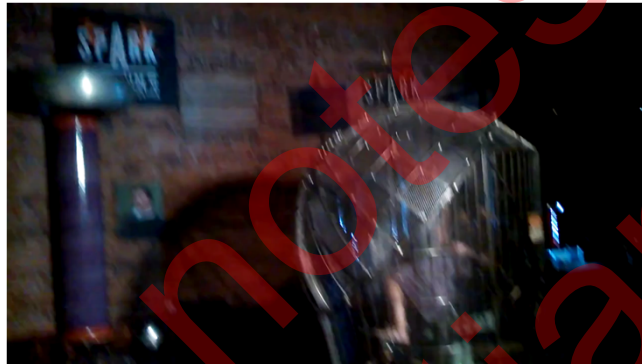
Este princípio é usado para blindagem eletrostática. Dentro de um condutor, o campo elétrico deve ser nulo. Assim, instrumentos eletrônicos colocados dentro de caixas condutoras ficará livre de campos elétricos externos.

Lei de Gauss / Gaiola de Faraday



<https://www.youtube.com/watch?v=x7uCAvEhP1E>

O campo elétrico produz uma redistribuição dos elétrons livres no condutor resultando no acúmulo de cargas negativas sobre uma superfície e uma quantidade igual na outra parte. Este campo elétrico adicional se sobrepõe com o campo elétrico externo de modo que o campo dentro do condutor seja nulo. Por isso, em uma tempestade, é mais seguro ficar dentro do carro.



Gaiola de Faraday no Museu de Faiscas, em Bellingham/ Washington/ SA