0/03

Interpolação polinomial

· exercício

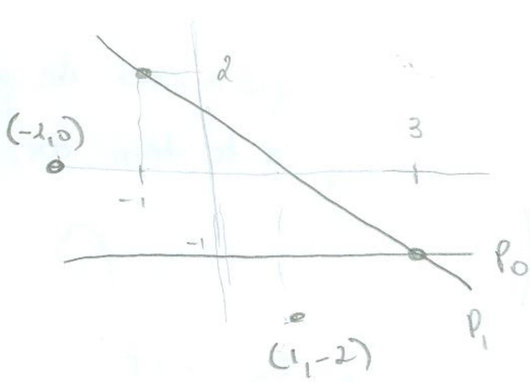
x_i	3	-1	1	-2
$f(x_i)$	-1	2	-2	0

Ideia

1) Interpolar 1 ponto com grau zero.

$P_0(x) = -1 \leftarrow c_0$

2) Colocamos o 2º ponto p/ interpolar c/ grau 1



$P_1(x) = P_0(x) + c_1(x-3)$

P/ achar c_1, resolvemos a equação $P_1(-1) = 2 \leftarrow f(\text{pt. novo})$

pt. novo

$P_0(-1) + c_1(-1-3) = 2$

$c_1 = -\frac{3}{4}$

$$\boxed{P_1(x) = -1 - \frac{3}{4}(x-3)}$$

c_1 é coef. angular $\therefore c_1 = \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{-1-2}{4} = -\frac{3}{4}$

3) Colocamos o 3° ponto p/ interpolar grau 2:

$$P_2(x) = P_1(x) + c_2(x+1)(x-3)$$

p/ que $P_2(-1) = P_1(-1) = f(-1)$
$P_2(3) = P_1(3) = f(3)$

c_2: sai da equação $\underset{\text{pt. novo}}{P_2(1)} = -2 \leftarrow f(\text{pt. novo})$

$$P_1(1) + c_2(1+1)(1-3) = -2$$

$$\frac{1}{2} - 4c_2 = -2 \longrightarrow c_2 = 5/8$$

$$P_2(x) = -1 - \frac{3}{4}(x-3) + \frac{5}{8}(x-3)(x+1)$$

$\boxed{c_2 \text{ é o coef. de } x^2 \text{ de } P_2.}$

4) 4° pt.

$$P_3(x) = P_2(x) + c_3(x-3)(x+1)(x-1)$$

$\boxed{c_3 \text{ é o coef. de } x^3 \text{ de } P_3.}$

qdo o coef. de x^3 é > 0, a fç tem forma

c_3 sai de: $P_3(-2) = 0$ [conta] $\longrightarrow c_3 = +\frac{47}{120}$

· Nomenclatura:

⊗ P_n: polinômio de grau $\leq n$

⊗ P_0 é apelido! seu nome é: · $P_f[3]$ por extenso: "o polinômio interpolador em P_0 de f p/ o ponto $x=3$"

└ p. ex: $P_f[1](x) = -2$
(ñ é mais o P_0 do ex)

P_0 pq tem só 1 pt.

• $p_f[3,-2]$ "o polinômio interpolar em $\underset{\text{pq são 2 pontos}}{\underline{P_1}}$ de f p/ os pontos 3 e -2"

P. ex: Quem é p_1 do exercício?

$$p_1 = p_f[3,-1]$$

---

calculando $p_f[3,-2]$

coef. angular

· Yoyomixoxô de dois jeitos:

$$\text{(i)}\quad p_f[3,-2](x) = \overset{b_0}{0} + \left(\frac{-1}{5}\right)(x+2) = \frac{-2}{5} - \frac{1}{5}x$$

$$\text{(ii)}\quad p_f[-2,3](x) = -1 + \left(\frac{-1}{5}\right)(x-3) = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}x$$

são $='s$

Assim por diante!

esses pts são definidos na f.

P. ex. $p_f[3,-1,1,-2]$ é o polinômio cúbico p_3 do exercício.

OBSERVAÇÃO: A ordem dos pontos colocados entre colchetes não importa!

$$p_f[3,-3,1] = p_f[1,3,-3] = p_f[3,1,-3] \text{ etc.}$$

$$p_f[3,-1,1,-2](x) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\overset{c_0}{-1}}_{p_f[3]} + \overset{c_1}{\left(\frac{-3}{4}\right)}(x-3)}_{p_f[3,-1]} + \overset{c_2}{\frac{5}{8}}(x-3)(x+1)}_{p_f[3,-1,1]} + \overset{c_3}{\frac{47}{120}}(x-3)(x+1)(x-1)$$

$\frac{47}{120}$ é o coet. de x^3 de $p_f[3,-1,1,-2] = \Delta f[3,-1,1,-2]$ → é o coet. de x^3 do polinômio $p_f[3,-1,1,-2]$

· $\frac{5}{8}$ é o coet. de x^2 de $p_f[3,-1,1] = \Delta f[3,-1,1]$

· $\frac{-3}{4}$ é coet. de x de $p_f[3,-1] = \Delta f[3,-1]$

· -1 é coet. de x^0 de $p_f[3] = \Delta f[3]$

P. ex: $\Delta f[3,-2] = -\frac{1}{5}$

· Relações entre os $\Delta f[\ ]$'s:

Investigando...

· grau zero: $\Delta f[3] = f(3)$

$p_f[x_i](x) = f(x_i)$

$\Delta f[x_i] = f(x_i)$

· grau 1: $\Delta f[3,-1]$ é o coet. de x (coet. angular) de $p_f[3,-1]$

$$\Delta f[3,-1] = \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{\Delta f[3]-\Delta f[1]}{3-(-1)}$$

Indo p/ grau 2

Posso chegar em $p_f[3,-1,1]$ de vários jeitos, em particular dois:

(I) $-1 \rightsquigarrow 3 \rightsquigarrow 1$

(II) $-1 \rightsquigarrow 1 \rightsquigarrow 3$

(I) $p_f[3,-1,1] = p_f[-1,3,1](x) = \Delta f[-1] + \Delta f[-1,3](x+1) + \Delta f[-1,3,1](x+1)(x-3)$

(II) $p_f[3,-1,1] = p_f[-1,1,3](x) = \Delta f[-1] + \Delta f[-1,1](x+1) + \Delta f[-1,1,3](x+1)(x-1)$

$\mathrm{I} - \mathrm{II}$:

$$0 \equiv \cancel{(x+1)} \left\{ \Delta f[-1,3] - \Delta f[-1,1] \right\} + \Delta f[-1,3,1] \cancel{(x+1)} \left\{ (x-3) - (x-1) \right\}$$

$$(3-1)\, \Delta f[-1,3,1] = \Delta f[-1,3] - \Delta f[-1,1]$$

$$\Delta f[-1,3,1] = \frac{\Delta f[-1,3] - \Delta f[-1,1]}{(3-1)}$$

loucura!

Em geral:

$$\Delta f[\sim, w, z] = \frac{\Delta f[\sim, w] - \Delta f[\sim, z]}{w - z}$$