Mecânica Clássica 1 (Sem. 1/2017): ED IV- Simetrias e Leis de Conservação

Quando estudamos o movimento de uma partícula ou de um sistema fechado, isto é, livre de forças externas, consideramos que o espaçõ é homogêneo e isotrópico, e que o tempo é homogêneo. Estas definições sáo como segue:

a) O espaçõ é homogêneo se as propriedades do sistema físico fechado não são afetadas por um delocamento arbitrário da origem do sistema de referência.

b) O espaço é isotrópico se as propriedades de um sistema físico fechado não variam quando o sistema de referência sofre uma rotação arbitrária em torno da origem.

c) O tempo é chamado homogêneo se as propriedades de um sistema físico fechado não variam ao se deslocar arbitariamente a origem do tempo.

Vamos verificar que essas simetrias estão relacionadas a leis de conservação de grandezas físicas.

1 Homegeneidade do espaço e conservação do momento linear.

Ao se deslocar a origem do sistema de coordenadas, temos $\mathbf{r}_i \to \mathbf{r'}_i = \mathbf{r}_i + \varepsilon$

1) Mostre que

$$\delta L = \varepsilon \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r_i}} \,. \tag{1}$$

2) A partir da propriedade (a) e das equações de Lagrange, mostre que o momento total do sistema é conservado.

2 Homegeneidade do tempo e conservação de energia.

Ao se deslocar a origem do tempo, temos $t \to t' = t + \delta t$.

3) Usando a propriedade (c), mostre que $dL/dt = 0$.

4) A partir deste resultado e usando as equaçoes de Lagrange, mostre que a energia mecânica se conserva.

3 Isotropia do espaço e conservação do momento angular.

Uma rotação sempre tem um eixo em torno do qual ela resulta. Seja $\hat{z}$ este eixo. Então temos

$$\delta \mathbf{r_i} = \hat{z} \times \mathbf{r_i} \delta\theta \tag{2}$$

e

$$\delta \mathbf{v_i} = \hat{z} \times \mathbf{v_i} \delta\theta \,. \tag{3}$$

5) Considerando que $L = L(\mathbf{r_i}, \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i})$, determine a expressão para δL em função de $\delta \mathbf{r_i}$ e de $\delta \mathbf{v_i}$.

6) Usando as equações de Lagrange, mostre que

$$\delta L = \frac{d}{dt}(\delta \mathbf{r_i} \times \delta \mathbf{p_i} \,. \tag{4}$$

1. Usando a identidade $\delta \mathbf{p_i}.(\hat{z} \times \delta \mathbf{r_i}) = \hat{z}.(\mathbf{p_i} \times \mathbf{r_i})$, mostre que o momento angular é conservado.

4 Invariancia segundo as transformações de Galileu.

Transformações de Galileu correspondem a mudanças de um referencial inercial para outro. Neste caso temos $\mathbf{r_i} \to \mathbf{r'_i} = \mathbf{r_i} + \mathbf{v_o} t$.

7) Mostre que $\mathbf{v'_i} = \mathbf{v_i} + \mathbf{v_0}$.

8) Mostre que na ausência de forças externas, $L' = T' + V = L + dF/dt$, onde $F = (1/2) m v_o^2 t + m \mathbf{v_0}.\mathbf{v_i}$, onde F é chamada função de gauge (ou calibre).

9) Mostre que a presença da função de gauge não altera as equações de Lagrange.