No século XX tivemos o privilégio de testemunhar duas revoluções capitais em nossa visão física do mundo. Passamos a usar o termo "relatividade" para encerrar a primeira destas revoluções, e "teoria quântica" para a segunda.

É particularmente notável que um único físico – Albert Einstein – tivesse percepções tão extraordinariamente profundas sobre o funcionamento da natureza, a ponto de colocar as pedras fundamentais em ambas as revoluções do século XX no ano de 1905.

Do prefácio de Roger Penrose, Professor Rouse Ball de Matemática da Universidade de Oxford.

Com a coleção Clássicos da Ciência, a Editora UFRJ coloca à disposição do leitor alguns dos textos mais importantes da ciência universal, em primeira edição no Brasil. Trata-se de autores de grande importância para o desenvolvimento da ciência, os quais agora poderão ser consultados em português por alunos e professores universitários e do ensino médio, bem como por cientistas e pesquisadores, podendo interessar também àqueles que apreciam a ciência e sua história.

ISBN 85-7108-241-3
9 788571 082410

O ano miraculoso de Einstein

John Stachel

EDITORA UFRJ

Einstein

O ano miraculoso de Einstein

Cinco artigos que mudaram a face da física

Organização e introdução de John Stachel

ARTIGO 3

Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento

Como é bem conhecido, a eletrodinâmica de Maxwell — tal como usualmente entendida no momento —, quando aplicada a corpos em movimento, produz assimetrias que não parecem ser inerentes ao fenômeno. Considere-se, por exemplo, a interação eletrodinâmica entre um ímã e um condutor. O fenômeno observável, aqui, depende apenas do movimento relativo entre o condutor e o ímã, ao passo que o ponto de vista usual faz uma distinção clara entre os dois casos, nos quais um ou outro dos dois corpos está em movimento. Pois se o ímã está em movimento e o condutor está em repouso, surge, nas vizinhanças do ímã, um campo elétrico com um valor definido de energia que produz uma corrente onde quer que estejam localizadas partes do condutor. Se o ímã, contudo, estiver em repouso, enquanto o condutor se move, não surge qualquer campo elétrico na vizinhança do ímã, mas, sim, uma força eletromotriz no condutor, que não corresponde a nenhuma energia *per se*, mas que, supondo-se uma igualdade do movimento relativo, nos dois casos, dá origem a correntes elétricas de mesma magnitude e sentido que as produzidas, no primeiro caso, pelas forças elétricas.

Exemplos desse tipo — em conjunto com tentativas malsucedidas de detectar um movimento da Terra relativo ao "meio luminífero" — levam à conjectura de que não apenas os fenômenos da mecânica mas também os da eletrodinâmica não têm propriedades que correspondam ao conceito de repouso absoluto. Ao contrário, as mesmas leis da eletrodinâmica e da óptica serão válidas[1] para todos os sistemas de coordenadas nos quais valem as equações da mecânica, como foi recentemente demonstrado para quantidades de primeira ordem. Elevaremos essa conjectura (cujo conteúdo, daqui em diante, será chamado de "princípio da relatividade") à condição de um postulado. Iremos introduzir também um outro postulado, apenas aparentemente incompatível com esse, a saber: que a luz sempre se propaga no espaço vazio com uma velocidade definida, que é independente do estado de movimento do corpo emissor. Esses dois postulados são suficientes para a obtenção de uma eletrodinâmica dos corpos em movimento simples e consistente, baseada na teoria de Maxwell para corpos em repouso. A introdução de um "éter luminífero" irá se provar supérflua, uma vez que o ponto de vista a ser desenvolvido aqui não exigirá um "espaço em repouso absoluto", dotado de propriedades especiais, nem atribuirá um vetor velocidade a um ponto do espaço vazio, onde os processos eletromagnéticos estão ocorrendo.

Como toda eletrodinâmica, a teoria a ser aqui desenvolvida está baseada na cinemática de um corpo rígido, pois as assertivas de qualquer teoria desse tipo têm a ver com as relações entre corpos rígidos (sistemas de coordenadas), relógios e processos eletromagnéticos. Uma consideração insuficiente desse aspecto está na raiz das dificuldades que a eletrodinâmica dos corpos em movimento tem de enfrentar no momento.

A. PARTE CINEMÁTICA

1. Definição de simultaneidade

Considere-se um sistema de coordenadas no qual as equações mecânicas de Newton sejam válidas. Para diferenciar verbalmente esse sistema daqueles a serem introduzidos

posteriormente, e para tornar nossa apresentação mais precisa, iremos chamá-lo de "sistema de repouso".

Se uma partícula estiver em repouso em relação a esse sistema de coordenadas, sua posição relativa a ele pode ser determinada por meio de réguas rígidas, utilizando-se os métodos da geometria euclidiana, e pode ser expressa em coordenadas cartesianas.

Se quisermos descrever o *movimento* de uma partícula, devemos fornecer os valores de suas coordenadas como funções do tempo. Entretanto, devemos ter em mente que uma descrição matemática desse tipo tem significado físico apenas se nós, de antemão, tivermos clareza a respeito do que entendemos aqui por "tempo". Devemos pensar que todos os nossos juízos que envolvem o tempo são sempre referentes a *eventos simultâneos*. Se digo, por exemplo, que "o trem chega aqui às sete horas", isso significa, mais ou menos: "a posição do ponteiro pequeno do meu relógio indicando o 7 e a chegada do trem são eventos simultâneos".[1]

Poderia parecer que todas as dificuldades envolvidas na definição de "tempo" estariam superadas se substituíssemos "posição do ponteiro pequeno do meu relógio" por "instante de tempo". Tal definição, de fato, é suficiente quando um tempo deve ser definido exclusivamente para o lugar no qual o relógio está localizado. Mas ela não é mais satisfatória quando diversos eventos que ocorrem em localizações diferentes devem ser relacionados temporalmente, ou — o que significa a mesma coisa — quando eventos que ocorrem em lugares muito afastados do relógio devem ser temporalmente avaliados.

[1] Não discutiremos aqui a imprecisão inerente ao conceito de simultaneidade de dois eventos que ocorrem (aproximadamente) no mesmo lugar, que pode ser eliminada apenas por uma abstração.

Na verdade, poderíamos nos contentar em calcular o instante de tempo dos eventos colocando um observador com um relógio na origem das coordenadas. Esse observador associaria a posição correspondente dos ponteiros dos relógios a um evento a ser medido quando um sinal de luz, que partisse do evento, chegasse até o observador através do espaço vazio. No entanto, sabemos, por experiência, que tal coordenação apresenta a desvantagem de não ser independente da posição do observador que está com o relógio. Podemos obter um arranjo bastante mais prático usando o argumento seguinte.

Se há um relógio em um ponto A no espaço, então, um observador localizado em A pode calcular o tempo dos eventos nas vizinhanças imediatas de A, encontrando as posições dos ponteiros do relógio que são simultâneas a esses eventos. Se houver, em um ponto B, um relógio que, sob todos os aspectos, assemelha-se ao relógio em A, então, o instante da ocorrência dos eventos na vizinhança imediata de B pode ser medido por um observador em B. Mas não é possível comparar o instante da ocorrência de um evento em A com o instante da ocorrência de um evento em B sem que haja uma estipulação complementar. Até agora definimos apenas um "instante de tempo A" e um "instante de tempo B", mas não um "instante de tempo comum" a A e B. Mas este instante pode ser agora determinado estabelecendo-se, *por definição*, que o "tempo" necessário para a luz ir de A até B é igual ao "tempo" necessário para ir de B até A. Pois suponha-se que um raio de luz que parta de A para B, no "instante de tempo A de t_A", seja refletido de B para A no "instante de tempo B de t_B" e chegue de volta a A no "instante de tempo A de t'_A". Os dois relógios estarão sincronizados, por definição, se

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Admitimos como possível que essa definição de sincronismo esteja livre de contradições e que ela assim o seja para pontos arbitrariamente numerosos, e, portanto, que as seguintes relações sejam de modo geral válidas:

1. Se o relógio em B funciona em sincronia com o relógio em A, o relógio em A funciona em sincronia com o relógio em B.
2. Se o relógio em A funciona em sincronia com o relógio em B, assim como com um relógio em C, então os relógios em B e C também funcionam em sincronia um em relação ao outro.

Por certos experimentos físicos (imaginados), estabelecemos o que deve ser entendido por relógios sincronizados, em estado de repouso relativo um em referência ao outro e localizados em lugares diferentes. Com isso, chegamos obviamente às definições de "sincronizado" e de "instante de tempo". O "instante de tempo" de um evento é a leitura obtida simultaneamente de um relógio estacionário que está localizado no lugar de ocorrência do evento, o qual, para todas as determinações temporais, funciona em sincronia com um relógio especificado em repouso, e, de fato, com o relógio estacionário especificado.

Baseados na experiência, estipulamos, além disso, que a quantidade

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

é uma constante universal (a velocidade da luz no espaço vazio).

É essencial que tenhamos definido instante de tempo usando relógios em repouso no sistema de repouso; como o tempo que acabamos de definir está relacionado com o sistema de repouso, nós o chamamos de "tempo do sistema em repouso".

2. *Sobre a relatividade dos comprimentos e tempos*

As considerações seguintes estão baseadas no princípio da relatividade e no princípio da constância da velocidade da luz. Definimos esses dois princípios como:

1. As leis que descrevem a mudança dos estados dos sistemas físicos são independentes de qualquer um dos dois sistemas de coordenadas que estão em movimento de translação uniforme, um em relação ao outro, e que são utilizados para descrever essas mudanças.
2. Todo raio de luz move-se no sistema de coordenadas de "repouso" com uma velocidade fixa V, independentemente do fato de este raio de luz ter sido emitido por um corpo em repouso ou em movimento. Portanto,

$$\text{velocidade} = \frac{\text{comprimento do trajeto da luz}}{\text{intervalo de tempo}},$$

onde "intervalo de tempo" deve ser entendido no sentido da definição dada na seção 1.

Considere-se um bastão rígido em repouso; seja seu comprimento l medido com uma régua que também está em repouso. Agora, suponha-se que o eixo do bastão esteja colocado ao longo do eixo X do sistema de coordenadas em repouso, e que esse bastão tenha um movimento translacional, paralelo e uniforme (com velocidade v) ao longo do eixo X, no sentido crescente dos x. Perguntamo-nos agora a respeito do comprimento do bastão *em movimento*, que imaginaríamos ser determinado pelas duas operações seguintes:

a. O observador move-se juntamente com a régua antes mencionada e com o bastão rígido a ser medido; e mede o comprimento do bastão dispondo a régua da mesma maneira que o faria caso o bastão a ser medido, o observador e a régua estivessem, todos, em repouso.
b. Usando relógios em repouso e sincronizados no sistema de repouso, tal como esquematizado na seção 1, o observador determina em que pontos do sistema em repouso a extremidade inicial e a extremidade final do bastão a ser medido estão localizadas em um dado instante de tempo t. A distância entre esses dois pontos, medida com a régua utilizada antes — mas agora em repouso —, é também um comprimento que podemos chamar de "comprimento do bastão".

De acordo com o princípio da relatividade, o comprimento determinado pela operação (a), a que chamaremos de "o comprimento do bastão no sistema em movimento", deve ser igual ao comprimento l do bastão em repouso.

O comprimento que se obtém quando se usa a operação (b), e que chamaremos de "o comprimento do bastão (em movimento) no sistema em repouso", será determinado com base em nossos dois princípios, e iremos descobrir que ele difere de l.

A cinemática atual supõe tacitamente que os comprimentos determinados pelas duas operações acima são exatamente iguais entre si, ou, em outras palavras, que, em um instante de tempo t, um corpo rígido em movimento seja totalmente substituível, nos seus aspectos geométricos, pelo *mesmo* corpo quando ele está *em repouso* em uma posição particular.

Mais ainda, supomos que as duas extremidades (A e B) do bastão estão equipadas com relógios sincronizados com os relógios do sistema de repouso, cujas leituras sempre correspondem ao "instante de tempo do sistema em repouso" nas localizações que os relógios ocupam; logo, esses relógios estão "sincronizados no sistema de repouso".

Além disso, imaginamos que cada relógio tem um observador que se move com ele, e que esses observadores aplicam aos dois relógios o critério para o funcionamento sincronizado de dois relógios, formulado na seção 1. Seja um raio de luz que parte de A no instante de tempo t_A;[2] esse raio é refletido em B no instante t_B e retorna a A no instante t'_A. Levando-se em conta o princípio da constância da velocidade da luz, chegamos a

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}$$

e

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

onde r_{AB} denota o comprimento do bastão em movimento, medido no sistema de repouso. Observadores que se movem junto com o bastão descobririam, desse modo, que os dois relógios não funcionam em sincronia, ao passo que observadores no sistema de repouso diriam que sim.

Vemos, assim, que não podemos atribuir significado *absoluto* ao conceito de simultaneidade; ao contrário, dois eventos que são simultâneos, quando observados a partir de um sistema de coordenadas particular, não podem mais ser assim considerados quando observados a partir de um sistema que está em movimento em relação àquele sistema.

[2] "Instante de tempo" aqui significa tanto "instante de tempo do sistema em repouso" quanto "a posição dos ponteiros do relógio em movimento localizado no lugar em questão".

3. Teoria das transformações de coordenadas e de tempo do sistema em repouso para um sistema em movimento translacional uniforme em relação ao primeiro

Consideremos dois sistemas de coordenadas no espaço "em repouso", isto é, dois sistemas constituídos de três linhas materiais rígidas, mutuamente perpendiculares, que se originam em um ponto. Suponhamos que os eixos X dos dois sistemas sejam coincidentes e que seus respectivos eixos Y e Z sejam paralelos. Cada sistema deverá estar munido de uma régua rígida e de muitos relógios; supõe-se que as réguas e todos os relógios dos dois sistemas sejam exatamente iguais.

Agora, coloquemos a origem de um dos dois sistemas, digamos k, em um estado de movimento com velocidade (constante) v no sentido de crescente x do outro sistema (K), que permanece em repouso; os eixos coordenados de k, sua régua e seus relógios terão também essa mesma velocidade. Para cada instante de tempo t do sistema de repouso K corresponde uma localização definida dos eixos do sistema em movimento. Por razões de simetria, podemos justificadamente supor que o movimento de k pode ser tal que, no instante t ("t" significa sempre o instante de tempo no sistema de repouso), os eixos do sistema em movimento são paralelos aos eixos do sistema de repouso.

Imaginemos agora que o espaço seja medido a partir do sistema de repouso K, com uma régua em repouso; e do sistema em movimento k, com uma régua que se move juntamente com o sistema; e que as respectivas coordenadas x, y, z e ξ, η, ζ sejam obtidas dessa maneira. E mais ainda: por meio dos relógios em repouso no sistema de repouso, e fazendo uso de sinais de luz, como está descrito na seção 1, determinamos o tempo t do sistema de repouso para todos os pontos onde existam relógios. De modo similar, aplicando-se novamente o método dos sinais de luz descrito na seção 1, determinamos o tempo τ do sistema em movimento, para todos os pontos desse sistema nos quais existam relógios em repouso em relação a ele.

Para cada conjunto de valores de x, y, z, t, que determina completamente o lugar e o instante de tempo de um evento no sistema de repouso, corresponde um conjunto de valores ξ, η, ζ, τ que fixa esse evento em relação ao sistema k, e o problema, agora, é encontrar o sistema de equações que relaciona essas quantidades.

Antes de mais nada, é evidente que essas equações devem ser *lineares*, por causa das propriedades de homogeneidade que atribuímos ao espaço e ao tempo.

Se fizermos $x' = x - vt$, então é evidente que um ponto em repouso no sistema k tem um conjunto definido, independente do tempo, de valores para x', y, z que pertencem a ele. Primeiro determinaremos τ como função de x', y, z e t. Para isso, devemos expressar em equações que τ é de fato o conjunto de leituras dos relógios em repouso no sistema k, sincronizados de acordo com a regra dada na seção 1.

Suponha-se que, no instante τ_0, um raio de luz seja enviado da origem do sistema k ao longo do eixo X até x', e que, nesse ponto, ele seja refletido de volta para a origem, no instante τ_1, ali chegando no instante τ_2. Devemos ter então

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1,$$

ou, inserindo os argumentos da função τ e aplicando o princípio da constância da velocidade da luz no sistema de repouso,

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t) + \tau\left(0,0,0,\left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right]$$

$$= \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v}\right).$$

A partir disso, fazendo com que x' seja infinitesimalmente pequeno, obtém-se que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t},$$

ou

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0.$$

Deve-se observar que, no lugar da origem das coordenadas, poderíamos ter escolhido qualquer outro ponto como origem do raio de luz. A equação recém-deduzida, portanto, vale para todos os valores de x', y, z.

Raciocínio análogo — aplicado aos eixos H[2] e Z —, lembrando-se que a luz sempre se propaga ao longo desses eixos com a velocidade $\sqrt{V^2 - v^2}$, quando observada do sistema de repouso, leva a

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial z} = 0.$$

Como τ é uma função *linear*, essas equações resultam em

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right),$$

onde a é uma função $\varphi(v)$, até o momento desconhecida, e onde supusemos que, para simplificar, na origem de k temos $t = 0$, quando $\tau = 0$.

Fazendo uso desse resultado, podemos determinar facilmente as quantidades ξ, η, ζ, expressando em equações que (tal como exigido pelo princípio da constância da velocidade da luz em conjunto com o princípio da relatividade) a luz também se propaga com velocidade V, quando medida no sistema em movimento. Para um raio de luz emitido no instante $\tau = 0$, no sentido de ξ crescente, temos

$$\xi = V\tau,$$

ou

$$\xi = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right).$$

Mas, quando medido no sistema de repouso, o raio de luz propaga-se com velocidade $V - v$ em relação à origem de k, de modo que

$$\frac{x'}{V - v} = t.$$

Substituindo-se esse valor de t na equação para ξ, obtemos

$$\xi = a\frac{V^2}{V^2 - v^2}x'.$$

De modo análogo, considerando-se raios de luz que se movem ao longo dos dois outros eixos, temos

$$\eta = V\tau = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right),$$

onde

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t; \quad x' = 0;$$

portanto,

$$\eta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}y$$

e

$$\zeta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}z.$$

Se substituirmos por x' seu valor, temos

$$\tau = \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$

$$\xi = \varphi(v)\beta(x - vt),$$

$$\eta = \varphi(v)y,$$

$$\zeta = \varphi(v)z,$$

onde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

e φ é, até agora, uma função desconhecida de v. Se não se fizer qualquer suposição quanto à posição inicial do sistema em movimento e ao valor zero de τ, deve-se acrescentar uma constante ao lado direito dessas equações.

Agora, devemos provar que, medido no sistema em movimento, todo raio de luz propaga-se com a velocidade V, se o mesmo ocorrer, como supusemos, no sistema de repouso; pois ainda não provamos que o princípio da constância da velocidade da luz é compatível com o princípio da relatividade.

Suponha-se que, no instante $t = \tau = 0$, uma onda esférica seja emitida da origem das coordenadas, que, naquele instante, é comum aos dois sistemas; suponhamos que essa onda se propague no sistema K com a velocidade V. Portanto, se (x, y, z) for um ponto atingido pela onda, temos

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2t^2.$$

Transformamos essa equação usando as equações de transformação e, depois de um cálculo simples, obtemos

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2\tau^2.$$

Desse modo, nossa onda é também uma onda esférica, com velocidade de propagação V, quando observada no sistema em movimento. Isso prova que os nossos dois princípios fundamentais são compatíveis.[3]

As equações de transformação que deduzimos também contêm uma função incógnita φ de v, que agora queremos determinar.

Com essa finalidade, introduzimos um terceiro sistema de coordenadas K', que, em relação ao sistema k, encontra-se em movimento paralelo translacional, paralelo ao eixo Ξ,[4] de tal forma que sua origem move-se ao longo do eixo Ξ com velocidade $-v$. Consideremos que todas as três origens das coordenadas sejam coincidentes no instante $t = 0$; e seja o instante t' do sistema K' igual a zero em $t = x = y = z = 0$. Indicamos as coordenadas medidas no sistema K' por x', y', z' e, pela dupla aplicação das nossas equações de transformação, obtemos

$$\begin{aligned} t' &= \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} &&= \varphi(v)\,\varphi(-v)t, \\ x' &= \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + vt\} &&= \varphi(v)\,\varphi(-v)x, \\ y' &= \varphi(-v)\eta &&= \varphi(v)\,\varphi(-v)y, \\ z' &= \varphi(-v)\zeta &&= \varphi(v)\,\varphi(-v)z. \end{aligned}$$

Como as relações entre x', y', z' e x, y, z não contêm o instante de tempo t, os sistemas K e K' estão em repouso um em relação ao outro, e é evidente que a transformação de K para K' deve ser a transformação identidade. Logo,

$$\varphi(v)\,\varphi(-v) = 1.$$

Exploremos agora o significado de $\varphi(v)$. Iremos centrar nossa atenção na porção do eixo H do sistema k que está entre $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, e $\xi = 0$, $\eta = l$, $\zeta = 0$. Essa porção do

eixo H é um bastão que, em relação ao sistema K, move-se perpendicularmente ao seu eixo, com uma velocidade v; as extremidades têm coordenadas em K:

$$x_1 = vt, \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}, \quad z_1 = 0$$

e

$$x_2 = vt, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0.$$

O comprimento do bastão, medido em K, é portanto $l/\varphi(v)$; isso dá o significado da função φ. Por razões de simetria, fica evidente agora que o comprimento de um bastão medido no sistema de repouso e movendo-se perpendicularmente ao seu eixo pode depender apenas da velocidade, e não da direção e do sentido de seu movimento. Assim, o comprimento do bastão em movimento medido no sistema de repouso não se modifica se for substituído por $-v$. Daí concluímos que

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)},$$

ou

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Dessa relação e daquela encontrada anteriormente, temos que $\varphi(v) = 1$, de tal modo que as equações de transformação obtidas tornam-se

$$\begin{aligned} \tau &= \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right), \\ \xi &= \beta(x - vt), \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z, \end{aligned}$$

onde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

4. O significado físico das equações obtidas no que se refere aos corpos rígidos e relógios em movimento

Consideremos uma esfera rígida[3] de raio R, que está em repouso em relação ao sistema em movimento k e cujo centro está na origem de k. A equação da superfície dessa esfera, que se move com velocidade v em relação ao sistema k, é

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

Expressa em termos de x, y, z, a equação dessa superfície no instante $t = 0$ é

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Um corpo rígido que tem uma forma esférica, quando medido em repouso, quando está em movimento — considerado a partir do sistema de repouso — tem a forma de um elipsóide de revolução com eixos

$$R\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2},\ R,\ R.$$

Desse modo, enquanto as dimensões Y e Z da esfera (e, portanto, também de todo corpo rígido, qualquer que seja sua forma) não parecem sofrer alteração produzida pelo movimento, a dimensão X parece ser contraída na razão $1:\sqrt{1-(v/V)^2}$; portanto, quanto maior o valor de v, maior a contração. Para $v = V$, todos os objetos em movimento — considerados a partir do sistema de "repouso" — contraem-se, transformando-se em estruturas planas.

[3] Isto é, um corpo que tem uma forma esférica quando observado em repouso.

Nossas considerações não têm significado para velocidades supraluminais. Como veremos, a partir de considerações posteriores, na nossa teoria, a velocidade da luz, do ponto de vista físico, desempenha o papel de velocidades infinitamente grandes.

É evidente que os mesmos resultados aplicam-se a corpos em repouso no sistema de "repouso", quando considerados a partir de um sistema que se move uniformemente.

Imaginemos também que um dos relógios seja capaz de indicar o tempo t, quando em repouso em relação ao sistema de repouso, e o tempo τ, quando em repouso em relação ao sistema em movimento, e que ele seja colocado na origem de k e esteja acertado de forma tal que indique o tempo τ. Qual é a taxa desse relógio quando considerada a partir do sistema de repouso?

As quantidades x, t e τ, que se referem à posição desse relógio, obviamente satisfazem as equações

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$$

e

$$x = vt.$$

Desse modo, temos

$$\tau = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)t.$$

Daí conclui-se que a leitura do relógio, considerado a partir do sistema de repouso, atrasa $\left(1-\sqrt{1-(v/V)^2}\right)$ segundos a cada segundo, ou, desconsiderando-se quantidades de quarta ordem ou mais, em $1/2(v/V)^2$ segundos.

Isso leva à seguinte conseqüência peculiar: se, nos pontos A e B de K, houver relógios em repouso que, considerados a partir do sistema de repouso, estão funcionando em sincronia; e se o relógio em A for transportado até B, ao longo da linha que os une, com velocidade v; então, quando esse relógio chegar a B, os dois relógios não estarão mais funcionando em sincronia; pelo contrário, o relógio que foi transportado de A até B estará atrasado de $\frac{1}{2}(tv^2/V^2)$ segundos (a menos de quantidades de quarta ordem ou superior) em relação ao relógio que ficou em B desde o início (sendo t o tempo necessário ao relógio para viajar de A até B).

Vemos, desde logo, que esse resultado vale mesmo quando o relógio se move de A para B ao longo de qualquer linha poligonal arbitrária, e até mesmo quando os pontos A e B coincidem.[5]

Se supusermos que o resultado demonstrado para uma linha poligonal vale também para uma linha continuamente encurvada, então chegamos à seguinte formulação: se houver dois relógios que funcionem em sincronia em A, e um deles é movimentado ao longo de uma curva fechada com velocidade constante até retornar a A, o que, digamos, leva t segundos, então, ao chegar a A, esse relógio estará $\frac{1}{2}(tv^2/V^2)$ segundos atrasado em relação ao relógio que não foi movimentado. A partir disso, concluímos que um relógio mecânico de mola[6] localizado no equador da Terra deve, mantidas as demais condições idênticas, marcar o tempo mais lentamente, embora com uma diferença muito pequena, do que um relógio absolutamente idêntico localizado em um dos pólos terrestres.

5. O teorema da adição de velocidades

No sistema k movendo-se com velocidade v ao longo do eixo X do sistema K, considere-se um ponto que se move de acordo com as equações

$$\xi = w_\xi \tau,$$
$$\eta = w_\eta \tau,$$
$$\zeta = 0,$$

onde w_ξ e w_η significam constantes.

Queremos encontrar o movimento do ponto em relação ao sistema K. Introduzindo as quantidades x, y, z, t nas equações de movimento do ponto, por meio das equações de transformação deduzidas na seção 3, iremos obter

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \dfrac{v w_\xi}{V^2}}\, t,$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{V}\right)^2}}{1 + \dfrac{v w_\xi}{V^2}}\, w_\eta t,$$

$$z = 0.$$

Assim, de acordo com nossa teoria, a adição vetorial de velocidades vale apenas em primeira aproximação. Seja

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2$$

e

$$\alpha = \arctan \frac{w_y}{w_x}.$$ [7]

Então, α deve ser considerado como o ângulo entre as velocidades v e w. Após um simples cálculo, obtemos

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha) - \left(\dfrac{vw \operatorname{sen}\alpha}{V}\right)^2}}{1 + \dfrac{vw\cos\alpha}{V^2}}.$$

Vale a pena observar que v e w entram nessa expressão para a velocidade resultante de modo simétrico. Se w também tem a direção do eixo X (eixo Ξ), obtemos

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}.$$

Dessa equação segue-se que a composição de duas velocidades que são menores do que a velocidade da luz V resulta sempre em uma velocidade que é menor do que V. Pois se fizermos $v = V - \kappa$, e $w = V - \lambda$, onde κ e λ são positivos e menores do que V, então

$$U = V \frac{2V - \kappa - \lambda}{2V - \kappa - \lambda + \frac{\kappa\lambda}{V}} < V.$$

Resulta também que a velocidade da luz V não pode ser modificada pela composição com uma "velocidade subluminal". Para esse caso, obtemos

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V.$$

No caso em que v e w têm a mesma direção, de acordo com a seção 3, a fórmula para U também poderia ser obtida pela composição de duas transformações. Se, além dos sistemas K e k, que aparecem na seção 3, introduzirmos um terceiro sistema de coordenadas k', que se move paralelamente a k e cuja origem move-se com a velocidade w ao longo do eixo Ξ, iremos obter equações entre as quantidades x, y, z, t e as quantidades correspondentes de k' que diferem daquelas encontradas na seção 3, apenas porque "v" foi substituído pela quantidade

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}};$$

daí podemos ver que tais transformações paralelas formam um grupo — como de fato deveriam formar.

Derivamos as leis da cinemática que correspondem aos nossos dois princípios. Iremos prosseguir com suas aplicações à eletrodinâmica.

B. PARTE ELETRODINÂMICA

6. Transformação das equações de Maxwell-Hertz no espaço vazio. Sobre a natureza das forças eletromotrizes que surgem pelo movimento em um campo magnético

Consideremos que as equações de Maxwell-Hertz para o espaço vazio sejam válidas no sistema de repouso K:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

onde (X, Y, Z) indicam o vetor força elétrica e (L, M, N), o vetor força magnética.

Se aplicarmos as transformações deduzidas na seção 3 a essas equações, para relacionar os processos eletromagnéticos com o sistema de coordenadas que se move com velocidade v e que foi lá introduzido, iremos obter as seguintes equações:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \xi},$$