Conceitos básicos de teoria da probabilidade

Experimento Aleatório: procedimento que, ao ser repetido sob as mesmas condições, pode fornecer resultados diferentes

Exemplos:

1. Resultado no lançamento de um dado;
2. Resultado do lançamento de uma moeda;
3. Condições climáticas do próximo domingo;
4. Questão sobre hábito de fumar;
5. Taxa de inflação do próximo mês;
6. Tipo sanguíneo de um habitante escolhido ao acaso.
7. O valor das ações no próximo dia.
8. Ganho de peso e de altura de crianças após 3 meses usando vitaminas.
9. Tempo de vida de uma lâmpada selecionada de um lote.
10. Administrar antibiótico em pacientes com alguma infecção até que um tenha uma reação adversa.

Evento simples: resultado que não pode ser decomposto em componentes mais simples.

Espaço Amostral (Ω ou S): conjunto de todos os resultados possíveis (eventos simples) de um experimento aleatório.

Exemplos:

- Lançamento de um dado. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Lançamento de uma moeda: Ω = {cara, coroa}
- Exame de sangue (tipo sangüíneo) . Ω = {A, B, AB, O}
- Hábito de fumar. Ω = {Fumante, Não fumante}
- Aparecer uma reação ao antibiótico. Seja N não ter reação e R ter reação: Ω = { R, NR, NNR, NNNR, NNNNR,NNNNNR,....}
- Tempo de duração de uma lâmpada. $\Omega = \{t: t \geq 0\}$
- Altura x e o ganho de peso y de crianças após 3 meses tomando vitamina: $\Omega = \{(x,y): x \geq 0;$ y positivo, 0 ou negativo}

Eventos: subconjuntos do espaço amostral Ω.

Notação: letras maiúsculas A, B, C ...
$\varnothing$ (conjunto vazio): *evento impossível*
Ω: *evento certo*

Exemplo: Lançamento de um dado.
Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Alguns eventos:

A: sair face par $A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$
B: sair face 1 $B = \{1\} \subset \Omega$
C: sair face maior que 3 $C = \{4, 5, 6\} \subset \Omega$

Exemplo: lançamento de uma moeda
Espaço amostral: Ω= {cara, coroa}

Eventos: $\varnothing$, {cara}, {coroa}, {cara, coroa}

Um espaço amostral que contém um número finito ou um número infinito mas enumerável de elementos é chamado um espaço amostral discreto.

Exemplos:
lançamento de um dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ número finito de elementos
Aparecer uma reação ao antibiótico. Ω = { R, NR, NNR, NNNR, NNNNR,NNNNNR,....} infinito mas enumerável, a lista não termina mas pode ser arranjado em uma sequência.

Quando o espaço amostral inclui todos os números em algum intervalo da reta real, ele é chamado um espaço amostral contínuo.

Exemplos:
Tempo de duração de uma lâmpada. $\Omega = \{t: t \geq 0\}$
Ganho de altura x e de peso y de crianças após 3 meses tomando vitamina:
$\Omega = \{(x,y): x \geq 0$, y positivo, 0 ou negativo$\}$

Operações com eventos

Eventos são conjuntos, logo as operações com eventos são operações com conjuntos estudados no curso de matemática aplicada

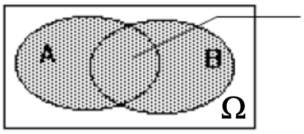
Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral.

$A \cup B$: *união dos eventos A e B.* Representa a ocorrência de <u>pelo menos um</u> dos eventos, A ou B.

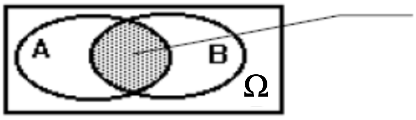
$A \cap B$: *interseção dos eventos A e B*. Representa a ocorrência <u>simultânea</u> dos eventos A e B.

A e B são disjuntos ou mutuamente exclusivos quando não têm elementos em comum, isto é,
$A \cap B = \emptyset$

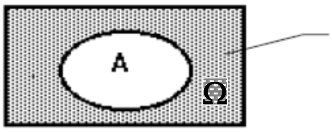
A e B são complementares se sua interseção é vazia e sua união é o espaço amostral, isto é,
$A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$
O complementar de A é representado por $\bar{A}$ (ou A^c).



$A \cup B$



$A \cap B$



$\overline{A}$

Exemplo: Lançamento de um dado

Ω= {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Eventos: A = {2, 4, 6}, B = {4, 5, 6} e C = {1}

- **sair uma face par e maior que 3**
  $A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$

- **sair uma face par e face 1**
  $A \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1\} = \varnothing$

- **sair uma face par ou maior que 3**
  $A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$

- **sair uma face par ou face 1**
  $A \cup C = \{2, 4, 6\} \cup \{1\} = \{1, 2, 4, 6\}$

- **não sair face par**
  $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$

Probabilidade

PROBABILIDADE: um número que expressa a chance de ocorrência de um evento específico.

O símbolo P(A) indica a probabilidade do evento A, onde

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Como atribuir probabilidade aos elementos do espaço amostral?

abordagens possíveis:

1. **Freqüências de ocorrências (frequência relativa)**
2. **Eventos igualmente prováveis (abordagem clássica)**
3. **Probabilidades subjetivas.**

Atribuição da probabilidade:

1. Através das freqüências relativas de ocorrências (empírico).

- **O experimento aleatório é repetido *n* vezes**
- **Calcula-se a freqüência relativa com que cada resultado ocorre.**

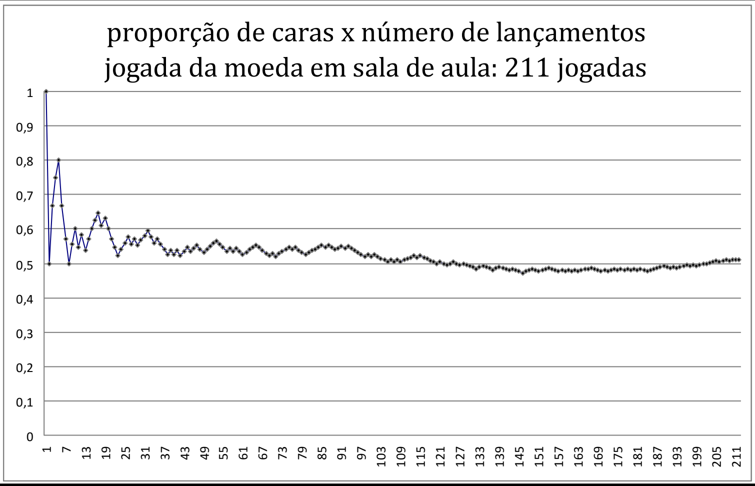
Para um número grande de realizações, a freqüência relativa aproxima-se da probabilidade.

Frequência relativa de um evento A em N repetições

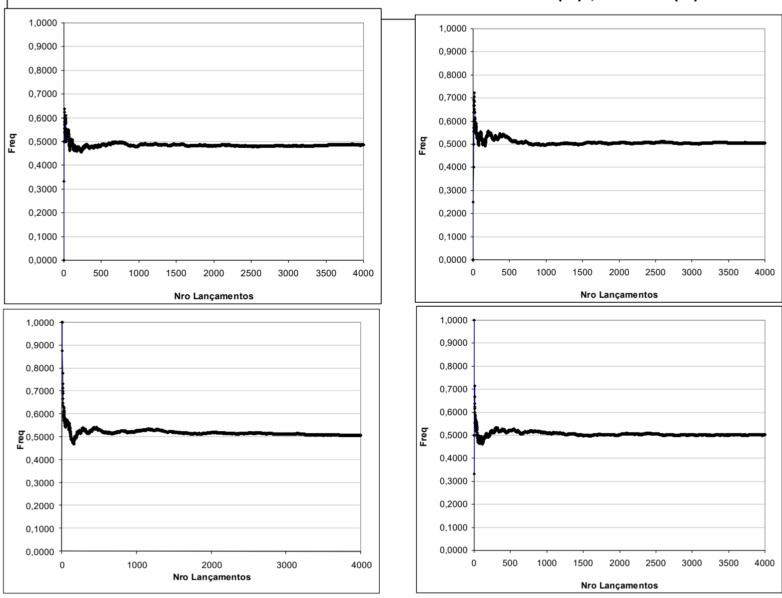
$$f_{Ar} = \frac{\text{Número de vezes que A ocorre}}{N}$$

Ou seja, f_{Ar} é a proporção de vezes que A ocorre em N repetições de um experimento.

Se o experimento é realizado sob iguais condições, após um número muito grande de repetições a frequência relativa estabiliza em um valor numérico. O valor em que f_{Ar} estabiliza a medida que N aumenta é tomado como a probabilidade P(A) de ocorrência do evento A.



Simulação:
sorteio de um número aleatório 4000 vezes: cara (0) , coroa (1)



2. Eventos igualmente prováveis (método clássico).

Exemplo: Lançamento de um dado

Admite-se que o dado é perfeitamente equilibrado

P(face 1) = ··· = P(face 6) = 1/6.

Se um espaço amostral consiste de k resultados elementares $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_k\}$ que são igualmente prováveis de ocorrer, a probabilidade de cada resultado é

$$\frac{1}{k}$$

Se o evento A consiste de m dos k elementos, então a probabilidade de A será

$$P(A) = \frac{m}{k}$$

2. Subjetivo (avaliação pessoal do grau de viabilidade de um evento): A probabilidade é estimada com base no conhecimento de circunstâncias relevantes.

Exemplo: O dia amanheceu nublado, então saio de guarda - chuva pois tem grande probabilidade de chover.

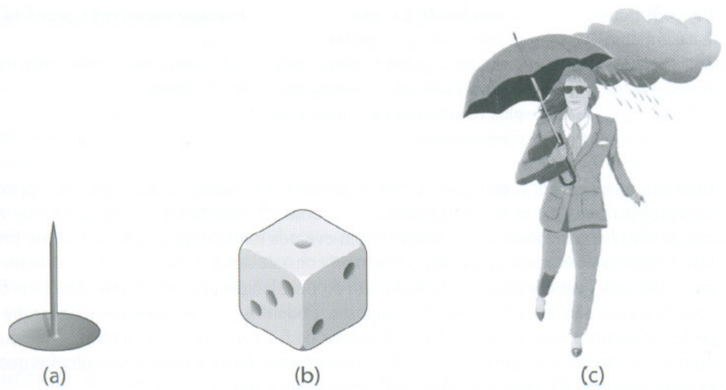


FIGURA 4-1 Três Abordagens para o Cálculo de Probabilidades

(a) Abordagem da Freqüência Relativa (Regra 1): Ao tentarmos determinar *P* (tachinha cai de ponta para cima), devemos repetir o procedimento de jogar a tachinha muitas vezes e depois achar a razão entre o número de vezes que a tachinha caiu de ponta para cima e o número de jogadas.

(b) Abordagem Clássica (Regra 2): Ao tentarmos determinar *P* (2) com um dado balanceado, cada uma das seis faces tem uma chance igual de ocorrência.

$$P(2) = \frac{\text{número de maneiras em que 2 pode ocorrer}}{\text{número de eventos simples}} = \frac{1}{6}$$

(c) Probabilidade Subjetiva (Regra 3): Ao tentarmos estimar a probabilidade de chuva amanhã, os meteorologistas usam seu conhecimento de especialistas em condições do tempo para desenvolver uma estimativa da probabilidade.

No **caso discreto**, todo experimento aleatório tem seu **modelo probabilístico** especificado quando estabelecemos:

Conjunto dos eventos elementares

•O *<u>espaço amostral</u>* $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$

•A *<u>probabilidade P(ei) para cada ponto amostral</u>* de tal forma que:

$$\text{(a)} \quad 0 \le P(e_i) \le 1$$

$$\text{(b)} \quad P(\Omega) = P(\{e_1, e_2, \dots\}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(e_i) = 1.$$

Números não negativos cuja soma é igual a 1.

Considere o experimento de observar o sexo do filho mais velho e do filho mais novo de famílias com dois filhos.
h: homem
m: mulher
Possiveis resultados: e1= (h,h), e2=(h,m), e3=(m,h), (m,m)

Considere as probabilidades atribuidas aos eventos:

(a) P(e1)=P(e2)=P(e3)=P(e4)=1/4

(b) P(e1)=3/16, P(e2)=3/8, P(e3)=1/4, P(e4)=3/16

(c) P(e1)=1/2, P(e2)=1/4, P(e3)=1/4, P(e4)=1/2

Note que (a) e (b) satisfazem as condições de probabilidade (números não negativos cuja soma é 1), entretanto (c) não satisfaz, pois as soma das probabilidades dos eventos elementares é 1,5.

Ainda no caso discreto,

- **Se A é um evento, então** $$P(A) = \sum_{e_j \in A} P(e_j)$$
- **Se** $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ **e** $P(e_i) = \dfrac{1}{N}$ **(*pontos equiprováveis*), então**

$$P(A) = \frac{\text{nº. de elementos de A}}{\text{nº. de elementos de } \Omega}$$

Regra da adição de probabilidades

Sejam A e B eventos de Ω. Então,

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Conseqüências:

- **Se A e B forem *eventos disjuntos (ou mutuamente exclusivos)*, então**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- **probabilidade do completar: Para qualquer evento A de Ω,**

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

- **probabilidade do conjunto vazio,** $P(\Phi) = 0.$

Exemplo: A tabela a seguir apresenta as proporções de um grupo de estudantes de ensino médio segundo seu desempenho (numa escala categórica) em matemática e educação física

Matemática	Educação física		
	Bom	Médio	Ruim
Bom	0.06	0.11	0.18
Médio	0.12	0.18	0.10
Ruím	0.16	0.05	0.04

Fonte: Statistics, concepts and methods, johnson 1977

A probabilidade que um estudante pertença a uma das categorias é associada a proporção (frequência relativa)

Considere os eventos

A: o estudante é bom em matemática;
B : o estudante é bom em educação física;
C : o estudante é bom pelo menos em um dos assuntos (matemática ou educação física) ;
D : o estudante não é ruim em matemática

Qual a probabilidade associada a cada evento?

Matemática	Educação física: Bom	Educação física: Médio	Ruim
Bom	**0.06**	**0.11**	**0.18**
Médio	**0.12**	**0.18**	**0.10**
Ruím	**0.16**	**0.05**	**0.04**

Fonte: Statistics, concepts and methods, johnson 1977

Bom em matemática e em educação física

$$P(A) = 0.06 + 0.11 + 0.18 = 0.35$$

$$P(B) = 0.06 + 0.12 + 0.16 = 0.34$$

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.35 + 0.34 - 0.06 = 0.63$$

$$P(D) + P(D^c) = 1 \Rightarrow P(D) = 1 - P(D^c) = 1 - (0.16 + 0.05 + 0.04) = 0.75$$

Ruím matemática

Não é ruím matemática

PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA

Probabilidade condicional: Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é denotada por P(A | B) e definida por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Da definição de probabilidade condicional, obtemos a regra do produto de probabilidades

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A \mid B) \,.\, P(B)}$$

Analogamente, se P(A) >0,

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B \mid A) \,.\, P(A)}$$

• *No exemplo anterior: Qual é a probabilidade de um estudante ser bom em educação física sabendo que é bom em matemática?*

Matemática	Educação física: Bom	Médio	Ruim
Bom	0.06	0.11	0.18
Médio	0.12	0.18	0.10
Ruím	0.16	0.05	0.04

Fonte: Statistics, concepts and methods, johnson 1977

Pela definição,

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.06}{0.35} = 0{,}1714.$$

Independência de eventos: Dois eventos A e B são <u>independentes</u> se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é,

$$\boxed{P(A\,|\,B) = P(A),} \quad P(B) > 0.$$

Do resultado acima temos que a probabilidade de eventos independentes é o produto das probabilidades de cada evento:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$$

- ***Considerando exemplo anterior:***

Matemática	Educação física		
	Bom	**Médio**	**Ruim**
Bom	**0.06**	**0.11**	**0.18**
Médio	**0.12**	**0.18**	**0.10**
Ruím	**0.16**	**0.05**	**0.04**

Fonte: Statistics, concepts and methods, johnson 1977

Temos que

$$P(A).P(B) = 0.35 \times 0.34 = 0.119 \neq P(A \cap B) = 0.06$$

ser bom em matemática e em educação física não são independentes.

Exemplo: A probabilidade de Jonas ser aprovado no vestibular é 1/3 e a de Madalena é 2/3. Qual é a probabilidade de ambos serem aprovados?

A: Jonas é aprovado

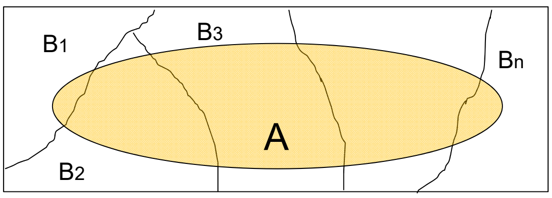
B: Madalena é aprovada

Supondo que os eventos Jonas ser aprovado e Madalena ser aprovado sejam independentes:

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B) = 1/3 \,.\, 2/3 = 2/9$$

Teorema da probabilidade total

Considere uma partição do espaço amostral Ω numa coleção de eventos disjuntos $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ de modo que $B_1 \cup B_2 \cup B_3 ... \cup B_n = \Omega$, e o evento A de Ω.



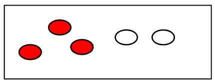
então o evento A de Ω tem probabilidade:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) + ... + P(A \cap B_n)$$

ou, usando a probabilidade condicional

$$P(A) = P(A/B_1)\,P(B_1) + P(A/B_2)\,P(B_2) + P(A/B_3)\,P(B_3) + ... + P(A/B_n)\,P(B_n)$$

Exemplo: Em uma urna, há 5 bolas: 2 brancas (B) e 3 vermelhas (V). Duas bolas são sorteadas sucessivamente, ***sem reposição*.**

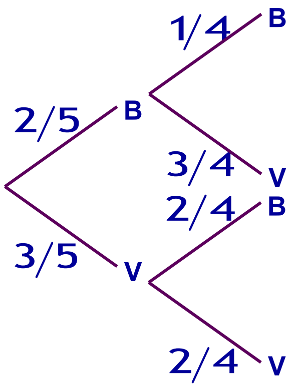


Para representar todas as possibilidades, utilizamos, um diagrama conhecido como *diagrama de árvores* ou *árvore de probabilidades.*

Em cada galho da árvore estão representadas as probabildades de ocorrência, sendo que para a segunda bola as probabildades são condicionais e dadas pela expressão

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A \mid B)\,.\,P(B)}$$

Vamos comparar a P(branca na 2a retirada) com a P(branca na 2a| branca na 1a).



Resultados	Probabilidades
BB	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$
BV	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$
VB	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$
V V	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$
Total	1

A probabilidade de bola branca na segunda extração é:

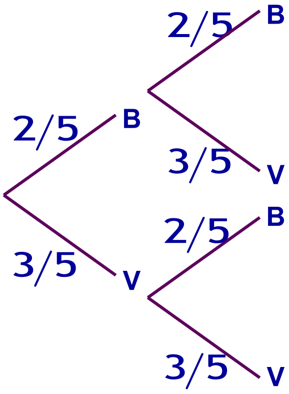
$$P(B\,\text{na}\,2^a) = P(B\,\text{na}\,2^a \mid B\,\text{na}\,1^a).P(B\,\text{na}\,1^a) + P(B\,\text{na}\,2^a \mid V\,\text{na}\,1^a).P(V\,\text{na}\,1^a)$$

$$= \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = \frac{2}{5}$$

A probabilidade de bola branca na segunda dado que ocorreu branca na primeira extração: $P(B\,\text{na}\,2a \mid B\,\text{na}\,1a) = \frac{1}{4} \neq P(B\,\text{na}\,2^a)$

Os eventos são dependentes

Considere agora que as extrações são feitas ***com reposição***, ou seja, a 1ª bola sorteada é reposta na urna antes da 2ª extração. Nesta situação, temos



Resultados	Probabilidade
BB	$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$
BV	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$
VB	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$
VV	$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$
Total	1

Neste caso,

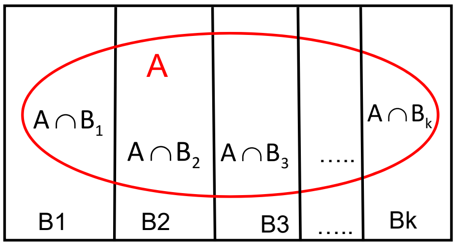
P(B na 2ª) = $\frac{4}{25}+\frac{6}{25}=\frac{2}{5}$

P(B na 2a | B na 1ª) = $\frac{2}{5}=P(B\ na\ 2^a)$

P(B na 2ª | V na 1ª) = $\frac{2}{5}=P(B\ na\ 2^a)$

ou seja, o resultado na 2ª extração *independe* do que ocorre na 1ª extração.

Teorema de Bayes



B1, B2, …, Bk são partições do espaço amostral em eventos disjuntos.

O evento A ocorre em conjunção com um e apenas um dos eventos B1, B2,…Bk

São dados: as probabilidades P(B1), P(B2),…., P(Bk) e as probabilidades condicionais P(A|B1), P(A|B2),…, P(A|Bk)

Qual a probabilidade condicional P(Bi | A), onde i=1,2, 3, 4…,k ?

Sabemos que: $P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$, **ou seja,**

$P(B_i|A) == \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$ **é o teorema de Bayes na sua forma inicial**

Note que A é a união dos eventos $A \cap B_1, A \cap B_2, \ldots, A \cap B_k$:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_k)$$
$$= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \ldots + P(B_k)P(A|B_k)$$

Combinando os resultados vamos obter:

TEOREMA DE BAYES:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \ldots + P(B_k)P(A|B_k)}$$

As máquinas A e B são responsáveis por 60% e 40%, respectivamente, da produção de uma empresa. O índices de peças defeituosas na produção destas máquinas são 3% e 7% , respectivamente.

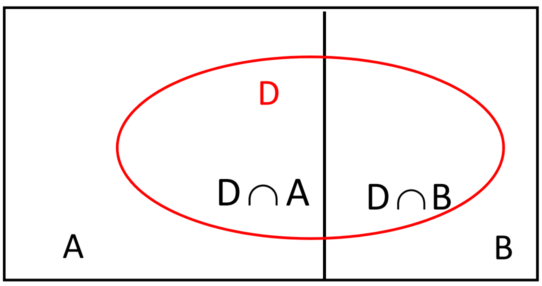
Se uma peça defeituosa foi selecionada da produção da empresa, qual a probabilidade que tenha sido produzida pela máquina B?

Vamos definir os eventos:

A: peça produzida pela máquina A
B: peça produzida pela máquina B
D: peça ser defeituosa

Neste caso o Teorema de Bayes reduz-se a:

$$P(B|D) = \frac{P(B)P(D|B)}{P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B)}$$



Temos:

P(A)=0,60 probabilidade da peça ser produzida pela máquina A
P(B)=0,40 probabilidade da peça ser produzida pela máquina B
P(D|A)=0,03 probabildade da peça defeituosa ter sido produzida pela máquina A
P(D|B)=0,07 probabildade da peça defeituosa ter sido produzida pela máquina B

Pelo teorema de Bayes que a probabilidade de que a peça tenha vindo da máquina B, dado que ela é defeituosa é:

$$P(B|D) = \frac{P(B)P(D|B)}{P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B)} = \frac{0{,}07.0{,}4}{0{,}03.0{,}6 + 0{,}07.0{,}4} = 0{,}6087$$

Exercício:
Qual a probabilidade da peça defeitosa ter sido selecionada da máquina A?

Inferência Bayesiana: é uma linha de pensamento estatístico devido a uma interpretação do teorema de Bayes

Os eventos Bi , i=1,2,...,k, são consideradas como os possíveis estados da natureza que o experimentador atribui probabilidades subjetivas P(Bi). Essas probabilidades, que podem ser baseadas mais em razões pessoais do que em dados (que podem nem existir), são combinadas com a evidência experimental do evento A.

P(Bi) são chamadas PROBABILIDADES A PRIORI (ou pré-experimental)

O pesquisador procede, com a observação ou experimento, e coleta dados do evento A dado que ele ocorreu sob um específico estado da natureza Bi, obtendo as probabilidades P(A|Bi), i=1,2,...,k. **O teorema de Bayes permite calcular as probabilidades condicionais P(Bi|A), i=1,2.,...,k; que representam as probabilidade dos estados originais revisadas após a observação de uma evidência experimental.**

As probabilidades revisadas são chamadas PROBABILIDADES A POSTERIORI (ou pós-experimental)

Técnicas de contagem

O calculo de probabilidades muitas vezes envolve a contagem do número de elementos que ocorrem em um evento.

Nem sempre isso é uma tarefa fácil e algumas tácnicas de contagem foram desenvolvidas.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM
Se um acontecimento é composto por duas etapas sucessivas, independentes uma da outra, e

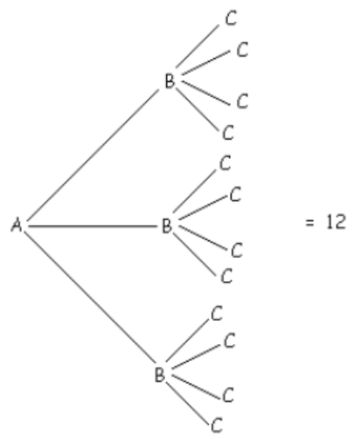
- a etapa 1 pode ocorrer de n modos
- a etapa 2 pode ocorrer de m modos

Então o número de possibilidades de ocorrência do acontecimento é n. m

Exemplo:
Pode-se ir da cidade A para a cidade B de 3 maneiras diferentes e de B para a cidade C de 4 maneiras.
De quantas maneiras diferentes pode-se ir das cidades A para C ?

$\mathbf{A} \to 3 \to \mathbf{B} \to 4 \to \mathbf{C} = 12$ (PFC)

ou usando a **árvore de possibilidades**:



Arranjos

"n" elementos **distintos** tomados "p" a "p"

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

a ordem dos elementos é **importante**!

Ex.: $32 \neq 23$

Lembre-se:

$n! = n.(n-1).(n-2).(n-3)....1$

$1! = 1$

$0! = 1$

Exemplo:

Quantos números de 3 dígitos podem ser formados pelos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Note que a ordem importa.

Temos:

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 120$$

Permutações

"n" elementos **distintos**

arranjados **n** a **n**

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1!} = n! = P_n$$

$\boxed{P_n = n!}$ → *Caso particular de* ***arranjo***

Combinações

n elementos distintos

tomados p a p

→ **A ordem não é importante**

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

Uma notação muito usada para combinação é :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

propriedades da fórmula para combinação:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{1} = n$$

Exercício: A partir da definição verifique as propriedades acima.

Exemplo:
Quantas combinações podem ser formadas por 6 jogadores de xadrez.
(Partida = 2 pessoas)

Neste caso a ordem não importa:
(jogador x, jogador y)=(jogador y, jogador x)

Temos :

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6.5.4!}{2!\,4!} = 15$$