

"Investigações sobre a origem das forças", de Leonard Euler

Mem. Acad. Sciences Berlin, 6, 419 (1752)

(tradução livre a partir da versão em R. Bruce Lindsay, Energy: Historical Development of the Concept, Dowden 1975)

35. Independentemente de considerarmos corpos elásticos ou inelásticos, o cálculo será o mesmo, durante o tempo em que durar o impacto. A Fig. 1 mostra dois corpos esféricos, A e B, que se movem no mesmo sentido ao longo da linha MN. Supõe-se que a velocidade de A seja maior do que a de B, antes da colisão, de maneira que A possa alcançar e chocar-se com B. ...

36. Considere que a velocidade de A antes do impacto seja a e que a de B seja b , de forma que $a > b$. No instante do impacto, a distância entre os centros dos dois corpos, AB, deverá ser a soma de seus raios. Se fazemos o raio do primeiro corpo, AC, igual a α , e o do segundo corpo, BC, igual a β , temos $AB = \alpha + \beta$. Vamos supor que no instante t após o impacto, em que os corpos estão na situação representada na figura por ab , o centro de A tenha se movido uma distância $Aa = x$ e o centro de B tenha se movido uma distância $Bb = y$. Neste estado a distância entre os centros, ab , torna-se

$$AB + Bb - Aa = \alpha + \beta + y - x$$

que será menor que $\alpha + \beta$ por causa da deformação que os corpos sofrem durante a colisão. Temos então $x > y$; se fazemos $x - y = z$, a quantidade z deve medir a quantidade de deformação, ou a diferença entre as distâncias ab e AB .

37. Agora fazemos a suposição que, imediatamente após o impacto, a velocidade de A, em a , torna-se v , e a velocidade de B, em b , torna-se u , e que estas velocidades sejam diferentes de a e b , respectivamente. Supomos também que a velocidade v de A depois do impacto é maior que a velocidade u de B, de forma que os corpos estejam ainda obrigados a agir um sobre o outro para evitar a penetração de um corpo no outro. Considere que a força com que um corpo age sobre o outro seja P . Como o plano de contacto dos dois corpos (de, na Fig1) é perpendicular à linha reta MN, o corpo A em a sofrerá a ação desta força na direção ca , e o corpo B em b sofrerá a ação da mesma força P na direção cb .

38. Como os corpos estão comprimidos um contra o outro pela mesma força P , sua deformação crescerá em proporção à distância entre os centros $\alpha + \beta - z$. Após um intervalo de tempo elementar, dt , ficará menor; isto é, $\alpha + \beta - z - dz$. A força P deve ter a magnitude exata tal que atuando nos corpos por um intervalo de tempo dt ela reduz a distância entre seus centros para $\alpha + \beta - z - dz$

39. Para encontrar o valor correto da força P , é necessário apenas utilizar os princípios da mecânica. Seja a massa do corpo A igual a A e a do corpo B igual a B . As velocidades u e v sofrerão variações du e dv no intervalo de tempo dt , respectivamente, tal que

$$Adv = -Pdt, \quad Bdu = Pdt.$$

Como o corpo A é puxado para trás pela força, sua velocidade ficará diminuída, e sua diferencial será negativa. Analogamente, a diferencial para B será positiva.

40. Somando as duas equações, encontramos

$$Adv + Bdu = 0$$

de forma que após a integração, obtemos

$$Av + Bu = \text{constante}.$$

Essa equação é válida independentemente do valor da força P , até mesmo se esta for indeterminada. A cada instante durante a colisão, a expressão $Av+Bu$ mantém o seu valor e é portanto igual ao valor do instante do impacto: $Aa+Bb$. Temos, assim, a equação

$$Av+Bu=Aa+Bb.$$

Esta representa uma propriedade geral associada a todos os casos de colisão, de acordo com o grande princípio de que o movimento do centro de gravidade comum não se altera através da ação dos corpos que se chocam.

41. A equação $Av+Bu=As+Bb$ não é suficiente para calcular as duas incógnitas u e v . Assim, nos voltamos para as duas equações diferenciais em dv e du . Uma vez que isto envolve a questão de determinar o valor verdadeiro da força P através da utilização da diferencial dz , devemos introduzir as diferenciais de espaço dx e dy tal que

$$dt=dx/v=dy/u.$$

Se substituimos estes valores para dt nas duas equações diferenciais, obtemos

$$Avdv=-Pdx, \quad Budu=Pdy.$$

A partir destas, obtemos as expressões

$$P=-Avdv/dx, \quad P=Budu/dy$$

$$P=-Audv/dy, \quad P=Bvdu/dx.$$

42. Mas estas equações por si mesmas não nos ajudam a calcular P . Para isso, precisamos de outra integral, que obtemos adicionando os dois lados de

$$Avdv=-Pdx$$

$$Budu=Pdy$$

para obter

$$Avdv+Budu=-Pdx+Pdy.$$

Como $dx-dy=dz$, isso fica

$$Avdv+Budu=-Pdz.$$

Se integramos essa equação, obtemos

$$Avv+Buu=\text{constante}-2\int Pdz.$$

Como no instante do impacto $z=0$, $v=a$ e $u=b$, podemos escrever

$$Avv+Buu=Aaa+Bbb-2\int Pdz$$